УДК 512.542

О. А. Алексеева (Южно-Урал. ун-т, Челябинск, Россия),
А. С. Кондратьев (Ин-т математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия)

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ ГРУППЫ $E_8(q)$ ПО МНОЖЕСТВУ ПОРЯДКОВ ЭЛЕМЕНТОВ

We prove that if a finite group G has the same set of element orders as the group $E_8(q)$, then $O^3(G/F(G))$ is isomorphic to $E_8(q)$.

Доведено, що якщо скінченна група G має таку ж множину порядків елементів, як і група $E_8(q)$, то $O^3(G/F(G))$ ізоморфна групі $E_8(q)$.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ множество всех порядков элементов группы G. Множество $\omega(G)$ определяет *граф Грюнберга – Кегеля* $GK(G)$ группы G, вершинами которого являются простые делители порядка группы G, и два простых числа p, q из $\omega(G)$ соединены ребром, если G содержит элемент порядка pq. Это множество частично упорядочено относительно делимости и однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных элементов.

Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n и положим $\pi(G) = \pi(|G|)$. Обозначим через $s(G)$ число компонент связности графа $GK(G)$, а через $\pi_i = \pi_i(G)$, $i = 1, \ldots, s(G)$, — его i-ю связную компоненту. Для группы G четного порядка положим $2 \in \pi_1$. Обозначим через $\mu_i = \mu_i(G)$ множество всех тех $n \in \mu(G)$, для которых каждый простой делитель числа n принадлежит π_i.

По теореме Грюнберга – Кегеля (см. теорему А в [1]) для группы G с несвязным графом $GK(G)$ верно одно из следующих утверждений:

а) G — группа Фробениуса;

б) $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, и AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;

в) G является расширением $\pi_1(G)$-группы N посредством группы A, где $P \leq A \leq \mathrm{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с несвязным графом $GK(P)$, A/P — $\pi_1(G)$-группа.

Компоненты связности графа Грюнберга – Кегеля простых неабелевых групп описаны в [1, 2].

Результаты, полученные для конечных групп с несвязным графом Грюнберга – Кегеля, нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по множеству порядков элементов (см., например, [3]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по множеству порядков элементов), если для любой конечной группы H с $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

В. Д. Мазуров высказал гипотезу, что конечные простые группы с несвязным графом Грюнберга – Кегеля, как правило, распознаваемы. Первым этапом доказательства этой гипотезы, по-видимому, будет доказательство условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с $\omega(G) = \omega(P)$ имеет композиционный фактор, изоморфный P. В данной работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Если G — конечная группа с $\omega(G) = \omega(E_8(q))$, то $O^3(G/F(G)) \cong E_8(q)$. В частности, группы $E_8(q)$ квазираспознаваемы.*

Заметим, что граф Грюнберга – Кегеля группы $E_8(q)$ имеет при $q \equiv 2, 3 \pmod 5$ четыре, а при $q \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ пять компонент связности. Из теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *Конечные простые группы, граф Грюнберга – Кегеля которых имеет по крайней мере четыре компоненты связности, квазираспознаваемы.*

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [4 – 6]. Запись $p^m \| n$ для простого числа p и натуральных чисел m, n означает, что p^m делит n, но p^{m+1} не делит n.

При доказательстве теоремы и следствия используются три предварительные леммы.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга – Кегеля. Тогда в случаях* а) *и* б) *теоремы Грюнберга – Кегеля граф $GK(G)$ имеет точно две компоненты связности.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть для G выполняется случай а) теоремы Грюнберга – Кегеля, т. е. $G = AB$ — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B. Если $2 \in \pi(B)$, то A — абелева группа и $Z(B)$ содержит инволюцию, откуда $\pi_1(G) = \pi(B)$ и $\pi_2(G) = \pi(A)$.

Пусть $2 \notin \pi(B)$. Тогда B разрешима, и можно считать, что $\pi_1(G) = \pi(A)$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в B. Тогда N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого нечетного числа $p \in \pi_2(G)$. Поскольку силовские подгруппы в B циклические, то N — группа порядка p. Ясно, что $C_B(N) \trianglelefteq B$ и $\overline{B} = B/C_B(N)$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Кроме того, $\omega(C_B(N)) \subseteq \pi_2(G)$. Значит, существует простой делитель r числа $p-1$, который принадлежит $\pi(G) - (\pi_1(G) \cup \pi_2(G))$. Элемент порядка r из $B - C_B(N)$ действует полурегулярно на $AN - \{1\}$, следовательно, по теореме Томпсона подгруппа AN нильпотентна. Это противоречит тому, что AN — группа Фробениуса.

Пусть для G выполняется случай б) теоремы Грюнберга – Кегеля, т. е. $G = ABC$, где AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно. Тогда A и B нильпотентны. Если $2 \in \pi(B)$, то в B имеется единственная инволюция, которая содержится в центре группы Фробениуса BC, противоречие. Итак, B — циклическая подгруппа нечетного порядка, изолированная в G. Поскольку группа автоморфизмов циклической группы абелева, то C — циклическая группа. Если C — изолированная подгруппа в G, то в C найдется элемент простого порядка, действующий полурегулярно на $AB - \{1\}$, следовательно, по теореме Томпсона AB нильпотентна, противоречие. Итак, в C найдется элемент простого порядка, централизующий некоторый неединичный элемент из A. Отсюда $\pi(B)$ и $\pi(AC)$ образуют две компоненты связности группы G. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга – Кегеля. Тогда:*

а) $|\mu_i(P)| = 1$ *для $i > 1$, $n_i = n_i(P)$ обозначает единственный элемент из $\mu_i(P)$ для $i > 1$;*

б) *для каждого $i > 1$ группа P содержит изолированную абелеву холлову $\pi(n_i)$-подгруппу X_i, причем эта подгруппа циклическая порядка n_i, за исключением случаев $P \cong L_3(4)$, $n_2(P) = 3$ и подгруппа X_2 элементарная абелева порядка 9; $P \cong L_2(q)$, где q — непростая степень нечетного простого числа p, $n_2(P) = p$ и подгруппа X_2 элементарная абелева порядка q;*

в) *если $s(P) > 3$, то P, $\pi_1(P)$, n_i для $2 \leq i \leq s(P)$ такие, как в приведенной ниже таблице.*

Доказательство. См. доказательство леммы 4 из [7].

Конечные простые группы P с $s(P) > 3$

$s(P)$	P	Ограничение на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
4	$A_2(4)$		$\{2\}$	3	5	7		
	${}^2B_2(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	$\{2\}$	$q-1$	$q-\sqrt{2q}+1$	$q+\sqrt{2q}+1$		
	${}^2E_6(2)$		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	13	17	19		
	$E_8(q)$	$q \equiv 2, 3(5)$	$\pi(q(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1))$	$\dfrac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$\dfrac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	q^8-q^4+1		
	M_{22}		$\{2, 3\}$	5	7	11		
	J_1		$\{2, 3, 5\}$	7	11	19		
	$O'N$		$\{2, 3, 5, 7\}$	11	19	31		
	LyS		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	31	37	67		
	Fi'_{24}		$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	17	23	29		
	F_1		$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 47\}$	41	59	71		
5	$E_8(q)$	$q \equiv 0, 1, 4(5)$	$\pi(q(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1))$	$\dfrac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$\dfrac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	q^8-q^4+1	$\dfrac{q^{10}+1}{q^2+1}$	
6	J_4		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	23	29	31	37	4[illegible]

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа, L — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга – Кегеля и $\omega(G)=\omega(L)$. Пусть для G выполняется случай* в) *теоремы Грюнберга – Кегеля и P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда*:

а) *если X — изолированная холлова подгруппа нечетного порядка в G, то в P существует изоморфная X изолированная холлова подгруппа нечетного порядка*;

б) $s(L)\le s(P)$.

Доказательство. Пункт а) следует из того, что при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу $G/F(G)$ изолированная холлова подгруппа нечетного порядка переходит в изоморфную ей холлову изолированную подгруппу. Пункт б) следует из пункта а) и леммы 2.

Доказательство теоремы. Пусть G — конечная группа с $\omega(G)=\omega(E_8(q))$, где q — степень простого числа p. По лемме 2 имеем $s(G)\ge 4$. Отсюда ввиду леммы 1 для G выполняется случай в) теоремы Грюнберга – Кегеля. Пусть P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда по лемме 3 $s(P)\ge 4$. По лемме 2 группа P изоморфна одной из групп, приведенных в таблице. Поскольку $n_4(G)=q^8-q^4+1=q^4(q^4-1)+1\ge 2^4(2^4-1)+1=241$, ввиду лемм 2 и 3, а) получаем, что P изоморфна ${}^2B_2(r)$ или $E_8(r)$ для некоторой степени r простого числа s.

Пусть $P\cong {}^2B_2(r)$, $r=2^{2m+1}>2$, $m\ge 1$. Ввиду лемм 2 и 3 получаем

$$\left\{\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1},\ \frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1},\ q^8-q^4+1\right\}=$$

$$=\left\{r-1,\ r-\sqrt{2r}+1,\ r+\sqrt{2r}+1\right\},\quad \text{где}\quad q\equiv 2,3\,(5).$$

Пусть $q^8-q^4+1=r-1$. Тогда $q^4(q^4-1)=r-2=2(2^{2m}-1)$, в частности, 2 делит $q^4(q^4-1)$. Предположим, что $2\mid q$. Тогда $2^4\mid q^4(q^4-1)$ и, значит, $2^4\mid 2(2^{2m}-1)$, противоречие. Итак, 2 делит $q^4-1=(q+1)(q-1)(q^2+1)$, откуда 8 делит $2(2^{2m}-1)$, противоречие.

Пусть $q^8-q^4+1=r-\sqrt{2r}+1$. Получаем $q^4(q^4-1)=2^{2m+1}-2^{m+1}=2^{m+1}(2^m-1)$. Если $2\mid q$, то $q^4=2^{m+1}$ и, следовательно, $2^{m+1}=2^m$, противоречие. Итак, 2 делит q^4-1. Отсюда $2^{m+1}\,\|\,(q^4-1)$, т. е. $q^4-1=t2^{m+1}$ для некоторого натурального числа t. Поскольку $q^4\mid(2^m-1)$, имеем $2^m-1=uq^4$ для некоторого натурального числа u. Учитывая равенство $q^4=t2^{m+1}+1$, получаем $2^m-1=u(t2^{m+1}+1)$. Левая часть этого равенства меньше 2^m, а правая больше 2^{m+1}, противоречие.

Пусть $q^8-q^4+1=r+\sqrt{2r}+1$. Тогда получаем $q^4(q^4-1)=2^{2m+1}+2^{m+1}=2^{m+1}(2^m+1)$. Предположим, что $2\mid q$. Тогда $q^4=2^{m+1}$, $q^4-1=2^{m+1}-1$, $q^4(q^4-1)=2^{m+1}(2^{m+1}-1)=2^{m+1}(2^m+1)$, $2^{m+1}-1=2^m+1$, $2^m=2$, $m=1$. Отсюда $r=8$ и, следовательно, $r+\sqrt{2r}+1=13$. Но, как мы видели выше, $q^8-q^4+1\ge 241$, противоречие. Итак, 2 делит q^4-1, поэтому $2^{m+1}\,\|\,(q^4-1)$ и $q^4\mid(2^{m+1}-1)$. Отсюда $2^{m+1}-1=tq^4$ и $q^4-1=u2^{m+1}$ для некоторых натуральных чисел t, u. Получаем равенство $q^4-1=s(tq^4+1)$, левая часть которого меньше q^4, а правая больше q^4, противоречие.

Итак, $P \cong E_8(r)$. Покажем, что $q = r$. Ввиду леммы 3 имеем $\{n_i(G) | i > 1\} \subseteq \{n_i(P) | i > 1\}$. С помощью леммы 2 проведем анализ случаев.

Пусть сначала $q^8 - q^4 + 1 = r^8 - r^4 + 1$. Тогда $r^4(r^4 - 1) = q^4(q^4 - 1)$.

Допустим, что $(r, q) = 1$. Тогда $q^4 \mid (r^4 - 1)$ и $r^4 \mid (q^4 - 1)$. Отсюда следует, что $r^4 - 1 = q^4 a$ и $q^4 - 1 = r^4 b$ для некоторых натуральных чисел a, b. Таким образом, $r^4 = q^4 a + 1$, $q^4 - 1 = (q^4 a + 1)b$, $q^4 - 1 < q^4 < (q^4 a + 1)b$, противоречие.

Итак, $(r, q) \neq 1$, т. е. $p = s$. Если $r \neq q$, то можно считать, что $r > q$. Тогда неединичная степень $(r/q)^4$ простого числа p делит $q^4 - 1$, противоречие. Значит, $r = q$.

Пусть теперь $q^8 - q^4 + 1 = (r^{10} + 1)/(r^2 + 1)$. Тогда получаем $(q^8 - q^4 + 1)(r^2 + 1) = r^{10} + 1$, $(q^8 - q^4)(r^2 + 1) + r^2 + 1 = r^{10} + 1$, $q^4(q^4 - 1)(r^2 + 1) = r^{10} - r^2$, $q^4(q^4 - 1)(r^2 + 1) = r^2(r^8 - 1)$. Отсюда $q^4(q^4 - 1) = r^2(r^4 + 1)(r^2 - 1)$.

Предположим, что $(r, q) = 1$. Тогда $q^4 - 1 = r^2 t$ для некоторого натурального числа t и, следовательно, $q^4 = r^2 t + 1$. Отсюда $q^4 r^2 t = r^2(r^4 + 1)(r^2 - 1)$. После сокращения получаем равенство $q^4 t = (r^4 + 1)(r^2 - 1)$, где $r^4 + 1$ можно представить в виде $r^4 + 1 = r^4 - 1 + 2 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) + 2$.

Предположим, что q четно и, следовательно, r нечетно. Поскольку $4 \mid (r^2 - 1)$ и $(r^4 + 1, r^2 - 1) = 2$, имеем $2 \parallel (r^4 + 1)$ и, следовательно, $r^2 - 1 = q^4 u/2$ для некоторого натурального числа u. Таким образом, получаем $(r^2 t + 1)u = 2(r^2 - 1) = 2r^2 - 2$. Если $t \geq 2$, то $(r^2 t + 1)u \geq 2r^2 + 1 > 2r^2 - 2$, поэтому $t = 1$ и $(r^2 + 1)u = 2(r^2 - 1)$. Если $u \geq 2$, то $(r^2 + 1)u \geq 2(r^2 + 1) > 2(r^2 - 1)$, поэтому $u = 1$ и $r^2 + 1 = 2(r^2 - 1)$. Но тогда $r^2 - 3 = 0$, противоречие.

Итак, q нечетно. Имеем $q^4 t = (r^4 + 1)(r^2 - 1)$. Поскольку $(r^4 + 1, r^2 - 1) = 2$, то q^4 делит $r^4 + 1$ или $r^2 - 1$.

Предположим, что $q^4 \mid (r^2 - 1)$. Тогда $r^2 - 1 = q^4 u$ для некоторого натурального числа u и, следовательно, $(r^2 t + 1)u = r^2 - 1$. Но $(r^2 t + 1)u = r^2 - 1$, противоречие.

Таким образом, $q^4 \mid (r^4 + 1)$. Тогда $r^4 + 1 = q^4 u$ для некоторого натурального числа u, откуда $(r^2 t + 1)u = r^4 + 1$, $r^4 + 1 = r^2 tu + u$, $r^4 = r^2 tu + u - 1$, $u - 1 = r^2(r^2 - tu)$. Положим $k = (r^2 - tu)$. Если $k > 0$, то $u = r^2 k + 1$, $r^4 = r^2 t(r^2 k + 1) + r^2 k$, $r^4 = r^4 tk + r^2(k + t)$, $r^4 tk + r^2(k + t) > r^4$, противоречие. Поэтому $k = 0$ и, следовательно, $u = 1$, $q^4 = r^4 + 1$. Ввиду леммы 2.2 из [8] это невозможно.

Итак, $(r, q) \neq 1$. Тогда $q^4 = r^2$ и, следовательно, $r^2(r^2 - 1) = r^2(r^4 + 1)(r^2 - 1)$. Левая часть равенства отличается от правой на множитель $r^4 + 1$, больший 1, противоречие.

Итак, мы доказали, что $q^8 - q^4 + 1 \notin \{r^8 - r^4 + 1, (r^{10} + 1)/(r^2 + 1)\}$, $r^8 - r^4 + 1 \notin \{q^8 - q^4 + 1, (q^{10} + 1)/(q^2 + 1)\}$.

Рассмотрим оставшиеся случаи.

Пусть

$$q^8 - q^4 + 1 = \frac{r^{10} + r^5 + 1}{r^2 + r + 1} = r^8 - r^7 + r^5 - r^4 + r^3 - r + 1,$$

$$r^8 - r^4 + 1 = \frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1} = q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1.$$

Тогда $q^8 - q^4 + 1 = q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1 + (-r^7 + r^5 + r^3 - r)$, $q^7 - q^5 - q^3 + q = -r^7 + r^5 + r^3 - r$, $(q^2-1)(q^5-q) = (r^2-1)(r^5-r)$. Левая часть последнего равенства положительна, правая отрицательна, противоречие.

Пусть

$$q^8 - q^4 + 1 = \frac{r^{10} - r^5 + 1}{r^2 - r + 1} = r^8 + r^7 - r^5 - r^4 - r^3 + r + 1,$$

$$r^8 - r^4 + 1 = \frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1} = q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1.$$

Тогда $q^8 - q^4 + 1 = q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1 + (r^7 - r^5 - r^3 + r)$, $-q^7 + q^5 + q^3 - q = r^7 - r^5 - r^3 + r$, $(q^2-1)(q-q^5) = (r^2-1)(r^5-r)$. Левая часть последнего равенства отрицательна , правая положительна, противоречие.

Рассмотрим последний случай. Пусть

$$q^8 - q^4 + 1 = \frac{r^{10} + r^5 + 1}{r^2 + r + 1} = r^8 - r^7 + r^5 - r^4 + r^3 - r + 1,$$

$$r^8 - r^4 + 1 = \frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1} = q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1.$$

Тогда $q^8 - q^4 + 1 = q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1 + (-r^7 + r^5 + r^3 - r)$, $q^7 - q^5 - q^3 + q = r^7 - r^5 - r^3 + r$, $q(q-1)^2(q+1) = r(r-1)^2(r+1)$. В результате исследования функции $f(x) = x^7 - x^5 - x^3 + x$ с помощью производной получаем, что $f(x)$ возрастает при $x \geq 1$. Отсюда $r = q$. Теперь, применяя результаты работы [9] к почти простой группе $G/F(G)$, получаем, что она изоморфна расширению группы $E_8(q)$ посредством циклической 3-группы. Теорема доказана.

Доказательство следствия. Ввиду доказанной нами теоремы и теоремы 1.1 из [3] остается доказать только квазираспознаваемость группы ${}^2E_6(2)$. Это легко сделать по аналогии с доказательством нашей теоремы.

1. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. – 1981. – **69**, № 2. – P. 487–513.
2. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. – 1989. – **180**, № 6. – С. 787 – 797.
3. *Mazurov V. D., Shi W. J.* Groups whose elements have given orders // London Math. Soc. Lect. Note Ser. – 1999. – **261**. – P. 532 – 537.
4. *Ashbacher M.* Finite group theory. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. – 274 p.
5. *Conway J. H., Curtis R., Norton S., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
6. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. – М.: Мир, 1976. – 184 с.
7. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. – 2000. – **41**, № 2. – С. 359 – 369.
8. *Tiep Pham Huu.* p-Steinberg characters of finite simple groups // J. Algebra. – 1997. – **187**, № 1. – P. 304 – 319.
9. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1999. – **102**. – P. 1 – 22.

Получено 22.02.2002