УДК 512.554

А. П. Петравчук (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О СИЛЬНО ИНЕРТНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

We study infinite-dimensional Lie algebras L over an arbitrary field that contain a subalgebra A with the property $\dim (A+[A,L])/A<\infty$. We prove that, in the case of local finiteness of an algebra L, the subalgebra A is contained in some ideal I of the Lie algebra L such that $\dim I/A<\infty$. We show that the condition of local finiteness of the algebra L is essential in this statement.

Вивчаються нескінченновимірні алгебри Лі L над довільним полем, які містять підалгебру A з властивістю $\dim (A+[A,L])/A<\infty$. Доведено, що у випадку локальної скінченності алгебри L підалгебра A міститься в деякому ідеалі I алгебри Лі L такому, що $\dim I/A<\infty$. Показано, що умова локальної скінченності алгебри L в цьому твердженні є суттєвою.

Одно из направлений в теории алгебр Ли составляют исследования алгебр Ли с теми или иными ограничениями на систему подалгебр или идеалов. Эта тематика в значительной мере происходит из теории групп, где изучение групп с заданными свойствами системы подгрупп тесно связано с именем С. Н. Черникова (см. [1]). Так же, как и в теории групп, где часто рассматриваются ослабления условия инвариантности подгруппы в группе, можно поставить аналогичные вопросы для алгебр Ли. Например, если A — подалгебра алгебры Ли L над некоторым полем, то мерой отклонения A от идеала алгебры L естественно считать размерность $\dim (A+[A,L])/A$ (если A — идеал в L, то эта размерность равна 0). Если $\dim (A+[A,L])/A<\infty$, то подалгебру A, в определенном смысле, можно считать почти идеалом алгебры L (естественно, об этом имеет смысл говорить только при $\dim L=\infty$). Если подалгебра A конечномерна, то условие $\dim (A+[A,L])/A<\infty$ влечет включение $A\subseteq FC(L)$, где $FC(L)$ — так называемый FC-центр алгебры L (это множество всех элементов из L, централизаторы которых в L имеют конечную коразмерность). Если $FC(L)=L$, то алгебра L называется FC-алгеброй Ли (или идеально конечной). Такие алгебры изучались ранее другими авторами (см., например, [2]). В связи с этим представляется интересным вопрос о свойствах подалгебры A бесконечномерной алгебры Ли L, удовлетворяющей условию $\dim(A+ +[A,L])/A<\infty$. Такие подалгебры, для удобства, будем называть сильно инертными, учитывая, что по аналогии с теорией групп [3] инертной подалгеброй алгебры Ли L можно называть такую подалгебру A, для которой $\dim(A+ +[A,g])/A<\infty$ для произвольного элемента $g\in L$.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1, где доказано, что сильно инертная подалгебра A локально конечной алгебры Ли L содержится в некотором идеале I алгебры L таком, что $\dim I/A<\infty$. Отмечено, что условие локальной конечности в этой теореме нельзя опустить. В случае разрешимой подалгебры A существует разрешимый идеал алгебры L, который „почти" содержит подалгебру A (теорема 2).

Все алгебры Ли рассматриваются над произвольным, но фиксированным полем F. Обозначения в работе стандартные, произведения в алгебрах Ли левонормированные; если X — некоторое F-подпространство алгебры Ли L, то $X^1=X$, $X^2=[X,X]$, … , $X^k=[X^{k-1},X]$, $k>2$. Пусть U и V — подпространства векторного пространства. Для краткости будем говорить, что подпространство U конечномерно над V, если $\dim (U+V)/V<\infty$.

Определение. *Подалгебру A бесконечномерной алгебры Ли L будем называть сильно инертной в L, если* $\dim (A+[A,L])/A<\infty$.

Очевидно, что произвольная подалгебра конечной коразмерности из L будет сильно инертной в L.

Лемма 1. *Пусть A — сильно инертная подалгебра алгебры Ли L. Тогда в алгебре L существует такое конечномерное подпространство M (над основным полем), что*

$$A+[A,L]\subseteq A+[A,M] \ \text{и}\ [A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i}]\subseteq A+M+\ldots+M^i,\ i=1,2,\ldots .$$

Доказательство. Выберем элементы $g_1,\ldots,g_m\in L$ и $a_1,\ldots,a_m\in A$ таким образом, чтобы $[a_i,g_i]+A$, $i = 1, 2, \ldots, m$, были системой линейных образующих фактор-пространства $(A+[A,L])/A$. Положим $g_{m+1}=[a_1,g_1]$, … …, $g_{2m}=[a_m,g_m]$. Обозначим через M линейную оболочку множества $\{g_1,\ldots,g_{2m}\}$. Поскольку $[a_i,g_i]\in[A,M]$, то $A+[A,L]\subseteq A+[A,M]$. Далее, $[A,M]\subseteq[A,L]$ и поэтому ввиду включения $[A,L]\subseteq A+M$ имеем $[A,M]\subseteq \subseteq A+M$. Индукцией по i покажем, что

$$A+[A,M]+\ldots+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i}] \subseteq A+M+\ldots+M^i,\quad i=1,2,\ldots . \tag{1}$$

Для $i=1$ это доказано в предыдущем абзаце. Пусть соотношение (1) выполняется для $i-1$, докажем его справедливость для i. По индуктивному предположению имеем

$$A+[A,M]+\ldots+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i}] \subseteq A+M+\ldots+M^{i-1}+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i-1},M].$$

Последнее слагаемое в правой части этого соотношения содержится по индуктивному предположению в $[A+M+\ldots+M^{i-1},M]$. Отсюда ввиду включения $[A,M]\subseteq A+M$ следует

$$A+[A,M]+\ldots+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i}] \subseteq A+M+\ldots+M^i.$$

В частности, $[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i}]\subseteq A+M+\ldots+M^i$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть L — алгебра Ли и A — ее сильно инертная подалгебра. Обозначим через L_i подпространство $A+[A,L]+\ldots+[A,\underbrace{L,\ldots,L}_{i}]$, $i=1,2,\ldots$. Тогда в L существует конечномерное подпространство M такое, что $L_i\subseteq A+M+\ldots+M^i$ для $i=1,2,\ldots$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1 существует конечномерное подпространство M такое, что $A+[A,L]\subseteq A+[A,M]$ и $[A,M]\subseteq A+M$. Тогда, очевидно, $L_1=A+[A,L]\subseteq A+M$. Индукцией по i покажем, что

$$L_i \subseteq A+[A,M]+\ldots+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i}]. \tag{2}$$

Для $i=1$ это отмечено выше. Пусть доказано включение

$$L_{i-1} \subseteq A+[A,M]+\ldots+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i-1}].$$

Поскольку $L_i=L_{i-1}+[A,\underbrace{L,\ldots,L}_{i}]$, то по индуктивному предположению

$$L_i \subseteq A+[A,M]+\ldots+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i-1}]+\big[A+[A,M]+\ldots+[A,\underbrace{M,\ldots,M}_{i-1}],\ L\big].$$

Заметим далее, что для произвольного $s = 1, 2, \dots$ справедливо соотношение

$$[A,\underbrace{M,\dots,M}_{s},L] \subseteq A+[A,M]+\dots+[A,\underbrace{M,\dots,M}_{s+1}]. \tag{3}$$

Действительно, для $s=1$ имеем $[A,M,L] \subseteq [A,[M,L]]+[A,L,M]$. Учитывая, что $[M,L]\subseteq L$ и $[A,L]\subseteq A+[A,M]$, получаем включение

$$[A,M,L] \subseteq A+[A,M]+[A,M,M].$$

Пусть утверждение (3) доказано для $s-1$, докажем его для s. Имеем последовательность включений (используя индуктивное предположение)

$$[A,\underbrace{M,\dots,M}_{s},L] \subseteq [A,\underbrace{M,\dots,M}_{s-1},M,L] \subseteq$$

$$\subseteq [A,\underbrace{M,\dots,M}_{s-1},[M,L]]+[A,\underbrace{M,\dots,M}_{s-1},L,M] \subseteq$$

$$\subseteq A+[A,M]+\dots+[A,\underbrace{M,\dots,M}_{s}]+\big[A+[A,M]+\dots+[A,\underbrace{M,\dots,M}_{s}],M\big] \subseteq$$

$$\subseteq A+[A,M]+\dots+[A,\underbrace{M,\dots,M}_{s+1}],$$

поэтому $L_i\subseteq A+[A,M]+\dots+[A,\underbrace{M,\dots,M}_{i}]$. Далее, ввиду леммы 1 имеем

$$[A,\underbrace{M,\dots,M}_{i}] \subseteq A+M+\dots+M^i$$

и, значит, $L_i\subseteq A+M+\dots+M^i$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть L — алгебра Ли и A — ее сильно инертная подалгебра. Тогда подпространство $L_i = A+[A,L]+\dots+[A,\underbrace{L,\dots,L}_{i}]$ конечномерно над A для $i = 1, 2, \dots$.*

Действительно, ввиду леммы 2 $L_i\subseteq A+M+\dots+M^i$, где M — некоторое конечномерное подпространство из L. Поэтому $\dim L_i/A<\infty$.

Лемма 3. *Пусть A — сильно инертная подалгебра бесконечномерной алгебры Ли L. Тогда в L существуют конечнопорожденная подалгебра B и идеал I такие, что $A+B$ является подалгеброй алгебры L и выполняются соотношения $A\subseteq I\subseteq A+B$.*

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность подпространств из L вида $I_s=A+[A,L]+\dots+[A,\underbrace{L,\dots,L}_{s}]$, $s = 1, 2, \dots$. Тогда $I = \bigcup_{s=1}^{\infty} I_s$ — идеал алгебры L, содержащий подалгебру A. Поскольку ввиду леммы 2 справедливо включение $I_s\subseteq A+M+\dots+M^s$, $s = 1, 2, \dots$, для некоторого конечномерного подпространства M, то $I\subseteq A+M+\dots+M^i+\dots$. Обозначим через B подалгебру из L, порожденную каким-нибудь базисом конечномерного подпространства M. Тогда B — конечнопорожденная подалгебра из L. Покажем, что $A+B$ — подалгебра из L. Индукцией по i покажем, что

$$[A,M^i] \subseteq A+M+\dots+M^i. \tag{4}$$

По определению пространства M имеем включение $[A,M]\subseteq A+M$, т. е. для $i=1$ это справедливо. Пусть соотношение (4) выполняется для $i-1$, докажем его справедливость для i. Имеем

$$[A, M^i] = [A, [M^{i-1}, M]] \subseteq [A, M^{i-1}, M] + [A, M, M^{i-1}] \subseteq$$
$$\subseteq [A + M + \ldots + M^{i-1}, M] + [A + M, M^{i-1}].$$

Последнее слагаемое $[A + M, M^{i-1}]$ в этом соотношении по индуктивному предположению лежит в $A + M + \ldots + M^i$ и поэтому $[A, M^i] \subseteq A + M + \ldots + M^i$. Отсюда следует, что $[A, B] \subseteq A + B$, т.е. $A + B$ — подалгебра из L. При этом, очевидно, $A \subseteq I \subseteq A + B$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть L — локально конечная алгебра Ли над произвольным полем и A — ее сильно инертная подалгебра. Тогда A содержится в некотором идеале I алгебры L таком, что* $\dim I / A < \infty$.

Доказательство. Ввиду леммы 3 подалгебра A содержится в некотором идеале I алгебры L, лежащем в подалгебре $A + B$, где B — некоторая конечнопорожденная подалгебра из L. Поскольку L локально конечна, то $\dim B < < \infty$ и поэтому $\dim A + B / A < \infty$. Но тогда $\dim I / A < \infty$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что в теореме 1 условие локальной конечности алгебры Ли L является существенным.

Пример. Пусть L_1 — абелева алгебра Ли с базисом $\{e_i, i \in \mathbb{Z}\}$ над произвольным полем F ($\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел). Через L_2 обозначим одномерную алгебру Ли с базисом $\{f\}$ над полем F и сопоставим элементу f дифференцирование алгебры Ли L_1, определенное по правилу $e_i \to e_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим полупрямую сумму $L = L_1 \leftthreetimes L_2$ этих алгебр Ли, соответствующую указанному гомоморфизму $L_2 \to \mathrm{Der}\, L_1$. Выберем в алгебре L абелеву подалгебру A с базисом $\{e_i, i \leq 0\}$. Очевидно, $A + [A, L]$ имеет базис $\{e_i, i \leq 1\}$ и поэтому $\dim (A + [A, L]) / A = 1$. Однако, как нетрудно убедиться, наименьший идеал алгебры Ли L, содержащий подалгебру A, совпадает с L_1 и $\dim L_1 / A = \infty$.

В случае, когда подалгебра A в условии теоремы 1 разрешима, можно указать больше информации об алгебре L, ее содержащей.

Теорема 2. *Пусть L — локально конечная алгебра Ли над произвольным полем и A — ее разрешимая сильно инертная подалгебра. Тогда алгебра L содержит разрешимый идеал J такой, что* $\dim A / (A \cap J) < \infty$. *В частности, если* $\dim A = \infty$, *то J — бесконечномерный идеал алгебры L.*

Доказательство. Согласно теореме 1 подалгебра A содержится в некотором идеале I алгебры L таком, что $\dim I / A < \infty$. Тогда ввиду [4] идеал I содержит некоторый разрешимый идеал J алгебры L такой, что $\dim I / J < \infty$. Идеал J и будет искомым идеалом.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
2. *Stewart I.* Lie algebras generated by finite dimensional ideals // Res. Notes. Math. – 1972. – **2**.
3. *Беляев В. В.* Инертные подгруппы в бесконечных простых группах // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 4. – С. 17 – 23.
4. *Петравчук А. П.* О бесконечномерных алгебрах Ли с разрешимыми идеалами конечной коразмерности // Алгебраические исследования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 158 – 167.

Получено 31.01.2002