УДК 517.927.25; 517.984.55

Я. М. Дымарский (Луган. пед. ун-т)

МНОГООБРАЗИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ПОТЕНЦИАЛОВ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

We consider a family of eigenfunction boundary-value problems with a potential as a parameter. We study a smooth structure and homotopic properties of the manifolds of eigenfunctions and the manifolds of degenerate potentials associated with double eigenvalues.

Розглянуто сукупність крайових задач на власні функції, параметром якої є потенціал. Досліджено гладку структуру та гомотопічні властивості многовидів власних функцій та многовидів вироджених потенціалів, яким відповідають двократні власні значення.

Введение. Рассмотрим семейство вещественных периодических краевых задач

$$-u'' + p(x)u = \lambda u, \quad u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi), \tag{1}$$

в котором в качестве функционального параметра используется 2π-периодический потенциал $p \in C^2$. Известно [1], что при фиксированном p собственные значения (с. зн.) задачи (1) располагаются в виде неограниченной последовательности $\lambda_0 < \lambda_1^- \le \lambda_1^+ < \ldots < \lambda_n^- \le \lambda_n^+ < \ldots$, причем: 1) если имеет место знак $=$, то с. зн. двукратное, т. е. все решения уравнения (1) с $\lambda_n^{\mp} = \lambda_n^{+}$ являются периодическими; 2) нули x_i собственной функции (с. ф.) не вырождены: на $[0, 2\pi)$ количество нулей с. ф. равно $2n$, где n — номер с. зн. В. И. Арнольд [2] высказал предположение, что множество потенциалов, имеющих m двукратных собственных значений, является гладким подмногообразием коразмерности $2m$. Это предположение нашло свое подтверждение в теории обратной задачи Штурма – Лиувилля при восстановлении потенциала по спектрам периодической и антипериодической краевых задач. Так, в [1, с. 254] установлен гомеоморфизм между пространством периодических вещественных потенциалов и множеством всех возможных последовательностей λ_0, h_1, θ_1, h_2, $\theta_2, \ldots$ вещественных чисел. Числа $h_i \ge 0$ имеют асимптотику, определяемую выбором функционального пространства потенциалов: h_i зависит от длины интервала (лакуны) $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$ между с. зн. периодической $(i = 2n)$ или антипериодической $(i = 2n+1)$ задачи для оператора $d^2/dx^2 + p(x)$. Число θ_i — произвольная точка на двусторонней границе разреза $\operatorname{Re}\theta = \pi i$, $|\operatorname{Im}\theta| \le h_i$. Появление двукратного с. зн. задачи (1) означает, что $h_{2n} = 0$. Последнее автоматически влечет условие $\theta_{2n} = 0$. Таким образом, одно двукратное с. зн. приводит к появлению сразу двух независимых условий на пространстве потенциалов. Гладкость указанного гомеоморфизма установлена в других работах (см., например, [3]).

В настоящей работе мы сначала исследуем многообразия собственных функций фиксированной осцилляции, порожденные семейством (1). Затем, решая тривиальную обратную задачу восстановления потенциала по собственной функции, описываем свойства многообразий потенциалов. Достоинства предложенного подхода состоят, по нашему мнению, в следующем: во-первых, удается увязать между собой свойства многообразий собственных функций и многообразий потенциалов; во-вторых, метод позволяет описать не только гладкую структуру исследуемых многообразий (модельные пространства, касательные пространства, коразмерности), но и их гомотопические свойства. В исследовании многообразий собственных функций важную роль играют результаты Ф. Неймана [4], который указал в терминах одного периодического решения $u(x)$ уравнения

$$-u'' + p(x)u = 0 \tag{2}$$

аналитическое условие периодичности всех решений. В п. 1 теорема Ф. Неймана формулируется для случая комплексного аргумента (на целесообразность исследования в комплексной плоскости автору указал В. И. Арнольд). В п. 2 приведены формулировки основных утверждений. Дальнейшие пункты посвящены их доказательству. Первые результаты в данном направлении изложены в[5].

1. Теорема Ф. Неймана гласит: чтобы уравнение (2) с непрерывным 2π-периодическим потенциалом имело только 2π-периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно 2π-периодическое решение $u(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условию $f(x)=0$, где

$$f(u) = \int_0^{2\pi} \left(u^{-2}(x) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n}\left(u'(x_i)\sin\frac{x-x_i}{2}\right)^{-2}\right)dx \tag{3}$$

(x_i — нули функции $u(x)$ на полуинтервале $[0, 2\pi)$). Назовем f функционалом Неймана. Подынтегральное выражение обозначим через $N(u)$. В силу (2) нули x_i решения $u(x)$ не вырождены и $u''(x_i)=0$. Поэтому на решениях уравнения (2) функция $N(u)(x)$ всюду непрерывна. Найдем вид f для случая комплексного аргумента. Пусть 2π-периодический потенциал $p(z)$ является аналитической функцией в некоторой горизонтальной полосе Z комплексной плоскости, причем Z содержит вещественную ось, и сужение $p(x)$ потенциала $p(z)$ на $\mathbf{R}$ является вещественнозначным. В этом случае любое вещественнозначное на $\mathbf{R}$ решение $u(x)$ уравнения (2) является сужением аналитического в Z решения $u(z)$. Полосу Z выберем настолько узкой, чтобы внутри нее функция $u(z)$ имела только вещественные нули.

Лемма 1. *Для любого аналитического и 2π-периодического решения уравнения* (2)

$$f(u) = \int_{z_0}^{z_0+2\pi} u^{-2}(z)dz, \tag{4}$$

где путь интегрирования произвольный в обход нулей решения $u(z)$.

Доказательство. Поскольку на решениях уравнения (2) функция $N(u(z))$ не имеет особенностей, она аналитическая в Z. В силу 2π-периодичности функции $N(u(z))$ получаем $\int_0^{2\pi} N(u(x))dx = \int_\gamma N(u(z))dz$, где γ — любой путь, соединяющий z_0 с $z_0+2\pi$ в обход нулей решения $u(z)$. Теперь

$$f(u) = \int_{z_0}^{z_0+2\pi} u^{-2}(z)dz - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n}\int_{z_0}^{z_0+2\pi}\left(u'(x_i)\sin\frac{z-x_i}{2}\right)^{-2}dz,$$

где каждый интеграл под знаком суммы, очевидно, равен нулю.

2. Основные утверждения. Пусть S^1 — ориентированная единичная окружность. Зафиксируем $n \in \mathbf{N}$. Пусть $(x_1, \ldots, x_{2n}) = (x_i)$ — набор различных точек, принадлежащих S^1, упорядоченных согласно ориентации S^1; т. е. существуют угловые координаты, в которых $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$. Мы не различаем два набора, если они порождены одинаковыми точками: $(x_1, \ldots, x_{2n}) = (x_{2n}, x_1, \ldots, x_{2n-1})$. Множество $X_{2n} = \{(x_i)\}$ наборов является C^∞-многообразием размерности $2n$. Рассмотрим отображение

$$\alpha\colon X_{2n} \to S^1, \quad \alpha((x_i)) = \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right) \bmod 2\pi. \tag{5}$$

Лемма 2 [5]. *Отображение* α *является* C^∞*-расслоением, слой которого диффеоморфен* $\mathbf{R}^{2n-1}$. *Многообразие* X_{2n} *неориентируемо.*

Пример: X_2 — открытый лист Мебиуса.

Впредь задачу (1) мы рассматриваем как задачу на S^1, что допустимо в силу 2π-периодичности всех рассматриваемых функций. Под x мы понимаем точку, принадлежащую S^1, или ее угловую координату в какой-то параметризации. Обозначим через $C^k(S^1)$ банахово пространство вещественных функций на S^1 с обычной C^k-нормой $\|\cdot\|_k$, $k = 0, 1, \ldots$, а через $\hat{C}^k(S^1)$ — C^∞-многообразие, полученное из $C^k(S^1)\setminus 0$ отождествлением антиподальных точек. Нечетность по u задачи (1) позволяет отождествить отличающиеся знаком с. ф. $\pm u$ и интерпретировать семейство (1) как семейство операторных уравнений на $\hat{C}^2(S^1)$. Сохраним для полученных элементов название „собственные функции" и обозначение u. Обозначим: $U_n^\pm$ — множества всех с. ф. семейства (1), которым соответствуют простые с. зн. $\lambda_n^\pm$; U_n^* — множество всех с. ф. семейства (1), которым соответствуют двукратные с. зн. λ_n^*. Введенные с. ф. попарно не пересекаются. Их объединение $U_n = U_n^+ \cup U_n^- \cup U_n^*$ — множество всех с. ф., которым соответствуют с. зн. с номером n. Обозначим: $P = \{p \in C^2(S^1): \oint p\,dx = 0\}$ — банахово пространство потенциалов, порождающих семейство (1); $P_n^* \subset P$ — множество потенциалов, которым соответствуют двукратные с. зн. с номером n. Мы также будем рассматривать множества

$$Q_n = \{(p, \lambda, u) = q \in P \times \mathbf{R} \times U_n : -u'' + p(x)u = \lambda u\}, \tag{6}$$

$$M_n = \{(p, u) \in P \times U_n : \exists \lambda \in \mathbf{R}, \text{ для которого } -u'' + p(x)u = \lambda u\}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Множество* U_n *состоит из всех функций* $u \in \hat{C}^4(S^1)$ *таких, что:* 1) *существуют* $2n$ *точек* x_i, *в которых* $u(x_i) = u''(x_i) = 0$, $u'(x_i) \neq 0$; *других нулей функция* $u(x)$ *не имеет;* 2) *существуют производные* $u^{(5)}(x_i)$.

Теорема 2. *Множество* $Q_n \subset P \times \mathbf{R} \times \hat{C}^4(S^1)$ *является* C^∞*-подмногообразием с модельным пространством* $P \times \mathbf{R}$. *Касательное пространство*

$$T_q Q_n = \{(\Delta p, \Delta\lambda, \Delta u) \in P \times \mathbf{R} \times C^4(S^1) :$$
$$-\Delta u'' + p\Delta u + \Delta p u - \Delta\lambda u - \lambda \Delta u = 0\}. \tag{8}$$

В любой точке $q \in Q_n$ *касательное пространство* $T_q Q_n$ *не содержит прямую, совпадающую с прямой* $0 \times \mathbf{R} \times 0 = \{(0, \Delta\lambda, 0)\}$.

Пусть $\pi : P \times \mathbf{R} \times \hat{C}^4(S^1) \to P \times \hat{C}^4(S^1)$, $\pi(p, \lambda, u) = (p, u)$.

Теорема 3. *Сужение проектирования* π *на* Q_n *является вложением класса* C^∞, *образ которого* $\pi(Q_n) = M_n \subset P \times \hat{C}^4(S^1)$. M_n *является* C^∞*-подмногообразием с модельным пространством* $P \times \mathbf{R}$. *В любой точке* $(p, u) \in M_n$ *касательное пространство* $T_{(p,u)} M_n$ *не содержит прямую, принадлежащую подпространству* $P \times 0 \subset P \times C^4(S^1)$.

Обозначим через π_1 и π_2 проектирования на сомножители в прямом произведении $P \times \hat{C}^4(S^1)$. Введем топологию в U_n.

Теорема 4. *Сужение на M_n проектирования π_2 является биекцией на U_n, индуцирующей в U_n структуру C^∞-многообразия, модельным пространством которого является $P \times \mathbf{R}$. Сужение оператора проектирования π_2 на касательное пространство $T_{(p,u)} M_n$ является линейной биекцией на касательное пространство $T_u U_n$, индуцирующей в $T_u U_n$ норму $\|\Delta u\|_T = \|\Delta u\|_4 + \|\Delta p\|_2$, где $(\Delta p, \Delta u) \in T_{(p,u)} M_n$. Пространство*

$$T_u U_n = \{\Delta u \in C^4(S^1)\colon -\Delta u''(x_i) + (p(x_i) - \lambda)\Delta u(x_i) = 0;$$

$$\text{существуют производные} \quad (-\Delta u''(x) + (p(x) - \lambda)\Delta u(x))^{(3)}|_{x = x_i}\},$$

где $(p, \lambda, u) \in Q_n$, а (x_i) — набор нулей с. ф. $u(x)$.

Топология, индуцированная в U_n отображением π_2, отлична от топологии, индуцированной вложением $U_n \subset \hat{C}^4(S^1)$, поэтому U_n не является подмногообразием в $\hat{C}^4(S^1)$.

Целесообразно пронормировать с. ф. Обозначим

$$S_n = \left\{u \in U_n : \|u\|^2 \equiv \sum_{i=1}^{2n} (u'(x_i))^2 = 1\right\}$$

(введенное условие нормировки согласовано с рассмотренными ниже расслоениями). Аналогично определяются множества $S_n^{\pm}$, S_n^{*}.

Теорема 5. *Подмножество $S_n \subset U_n$ является C^3-подмногообразием коразмерности один с модельным пространством P. Касательное пространство $T_u S_n = \{\Delta u \in T_u U_n : \sum u'(x_i)\Delta u'(x_i) = 0\}$.*

Теорема 6. *Подмножество $S_n^{*} \subset S_n$ является связным C^1-подмногообразием коразмерности один, которое определяется условием Неймана $f(u) = 0$. Подмножества S_n^{+}, $S_n^{-} \subset S_n$ — открытые связные подмногообразия, определяемые неравенствами $f(u) > 0$ и $f(u) < 0$ соответственно.*

Теорема 7. *Функционал $f\colon S_n \to \mathbf{R}$ является тривиальным C^1-расслоением. Многообразие S_n C^1-диффеоморфно $S_n^{*} \times \mathbf{R}$.*

Рассмотрим отображение $\beta\colon S_n \to S^1$, где $\beta(u) = \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right) \bmod 2\pi$.

Теорема 8. *Отображение β — тривиальное C^3-расслоение, слой которого — некоторое гомотопически тривиальное банахово многообразие B. Сужение β^{*} отображения β на S_n^{*} является тривиальным C^1-подрасслоением, слой которого $B^{*} \subset B$ — гомотопически тривиальное подмногообразие коразмерности один. Многообразия S_n и S_n^{*} C^1-диффеоморфны $S^1 \times B$ и $S^1 \times B^{*}$ соответственно. Касательные пространства*

$$T_u B = \{\Delta u \in T_u S_n : \textstyle\sum_{i=1}^{2n} \Delta u(x_i) / u'(x_i) = 0\},$$

$$T_u B^{*} = \{\Delta u \in T_u B\colon Df(u)\Delta u = 0\}.$$

Теперь сформулируем теоремы о свойствах многообразий потенциалов.

Теорема 9. *Подмножество $P_n^{*} \subset P$ — гомотопически тривиальное C^1-подмногообразие коразмерности два. Пусть $p \in P_n^{*}$ и u_n, v_n — ортонорми-*

рованные в $L_2(S^1)$ *с. ф., соответствующие с. зн.* λ_n^*. *Тогда касательное пространство* $T_p P_n^*$ *задается двумя линейно независимыми условиями*

$$\oint \Delta p u_n v_n dx = 0, \qquad \oint \Delta p (u_n^2 - v_n^2) dx = 0. \tag{9}$$

Теорема 10. *Открытое подмножество* $P \setminus P_n^* \subset P$ *тривиально* C^1*-расслоено над* P_n^*; *слой расслоения диффеоморфен* $S^1 \times \mathbf{R}^+$. *Пространство* P *тривиально* C^0*-расслоено над* P_n^*; *слой расслоения гомеоморфен* $\mathbf{R}^2$.

Теорема 11. *Для любого набора* $(n_1, \ldots, n_m)$ *пересечение* $P^*_{(n_1, n_2, \ldots, n_m)} = \bigcap_{k=1}^m P^*_{n_k} \subset P$ *является* C^1*-подмногообразием коразмерности* $2m$.

Многообразие Q впервые рассмотрено К. Уленбек [6] для семейства самосопряженных эллиптических операторов. Условия (9) были получены методами теории возмущений в 20-х годах [7], однако сами по себе они еще не означают наличия гладкой структуры у множества P_n^*. В конечномерном случае наличие гладкой структуры у множества операторов с кратным спектром доказано в [2], а для операторов Гильберта – Шмидта — в работе [8]. В [6] доказано, что в пространстве гладких кривых, соединяющих два потенциала $p_1, p_2 \in P \setminus P_n^*$, множество второй категории образуют кривые $\gamma: [0, 1] \to P$, которые не пересекают подмногообразие P_n^*. В силу теоремы 9 последнее утверждение является следствием теоремы о плотности отображений, трансверсальных к P_n^* ($\operatorname{codim} P_n^* = 2 > 1 = \dim \operatorname{Im} \gamma$, следовательно, трансверсальность означает, что $\operatorname{Im} \gamma \cap P_n^* = \varnothing$). В [5] для семейства C^0-потенциалов доказано наличие у множеств U_n, U_n^* и P_n^* структуры C^0-подмногообразий.

3. Доказательства теорем 1 – 4.

***Доказательство теоремы* 1.** Необходимость свойств 1 и 2 известна [1], а свойство 3 вытекает из уравнения (1). Для доказательства достаточности рассмотрим отображение

$$F: U_n \to P, \qquad F(u) \equiv p = \frac{u''}{u} - \frac{1}{2\pi} \oint \frac{u''}{u} dx, \tag{10}$$

однозначно определяющее потенциал, для которого функция u является собственной с номером n. Но отображение F определено и действует в P для всех функций, имеющих перечисленные свойства. Из (10) следует, что функция u является собственной для полученного потенциала p и с. зн.

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{u''}{u} dx. \tag{11}$$

***Доказательство теоремы* 2.** Нетрудно проверить, что отображение

$$G: P \times \mathbf{R} \times \hat{C}^4(S^1) \to C^2(S^1),$$

где $G(p, \lambda, u) = -u'' + p(x)u - \lambda u$, является субмерсией, и ядро оператора производной $DG(q)$ в каждой точке $q = (p, \lambda, u) \in Q_n$ изоморфно $P \times \mathbf{R}$ и не содержит элементов вида $(0, \Delta\lambda, 0)$.

***Доказательство теоремы* 3.** Из определений Q_n и M_n и формулы (11) следует, что проектирование π осуществляет биекцию между Q_n и M_n. Из последнего утверждения теоремы 2 следует, что для любой точки $q \in Q_n$ сужение оператора производной $D\pi$ на касательное пространство $T_q Q_n$ инъективно. Наконец, уравнение $D_1G(q)\Delta p \equiv u\Delta p = 0 \in C^2(S^1)$ имеет единственное решение $\Delta p = 0$.

Доказательство теоремы 4. Из определения M_n следует, что сужение на M_n проектирования π_2 является биекцией на U_n: по с. ф. $u(x)$ соответствующий потенциал $p \in P$ восстанавливается по формуле (10) однозначно. Из последнего утверждения теоремы 3 следует, что оператор $D\pi_2$ инъективен на $T_{(p,u)}M_n$. По этой причине, а также в силу введенной в U_n топологии оператор $D\pi_2$ является непрерывным линейным изоморфизмом между касательными пространствами $T_{(p,u)}M_n$ и T_uU_n, и норма элемента из T_uU_n определяется как норма его единственного прообраза из $T_{(p,u)}M_n$. Последнее утверждение теоремы следует из (8).

4. Доказательства теорем 5 – 8 опираются на леммы.

Лемма 3. *Пусть* $x_0 \in S^1$ *— невырожденный нуль функции* $u_0 \in \hat{C}^4(S^1)$. *Тогда существует некоторая окрестность* $R(u_0) \subset \hat{C}^4(S^1)$ *функции* u_0 *и единственное* C^4*-отображение* $\tau: R(u_0) \to S^1$, *которое функции* $u(x)$ *сопоставляет ее ближайший к* x_0 *нуль, т. е.:* 1) $\tau(u_0) = x_0$, 2) $u(\tau(u)) \equiv 0$, 3) *оператор производной* $D\tau(u_0)\Delta u = -\Delta u(x_0)/u'(x_0)$.

Как было отмечено, многообразие U_n не является подмногообразием объемлющего многообразия $\hat{C}^4(S^1)$. Однако некоторые свойства отображений, заданных на U_n, можно исследовать в терминах многообразия $\hat{C}^4(S^1)$, так как введенная в U_n топология сильнее, чем топология $\hat{C}^4(S^1)$.

Лемма 4. *Пусть* $V \subset U_n$ *—* C^k*-подмногообразие,* B^l *—* l*-мерное* C^∞*-многообразие,* $a: V \to B^l$. *Предположим, что существуют открытое подмножество* $R \subset \hat{C}^4(S^1)$ *(с топологией, индуцированной объемлющим многообразием) и отображение* $\hat{a}: R \to B^l$ *такие, что:* 1) $U_n \subset R$ *как подмножество;* 2) $\hat{a} \in C^m(R)$, $m \le k$; 3) $\hat{a} \equiv a$ *на* V. *Тогда отображение* $a \in C^m(V)$. *Если, дополнительно, в каждой точке* $u \in V$ *сужение на* T_uV *оператора* $D\hat{a}(u)$ *является накрытием, то* a *является субмерсией, прообраз точки которой — подмногообразие коразмерности* l.

Доказательство теоремы 5 основано на леммах 3, 4.

Доказательство теоремы 6. Из теоремы Неймана следует, что $S_n^\circ = \{u \in S_n : f(u) = 0\}$. Обозначим через $R = R_{2n} \subset \hat{C}^4(S^1)$ открытое подмножество, состоящее из всех функций, имеющих в точности $2n$ невырожденных нулей. Для функций $u \in R_{2n}$ обозначим

$$\mu(x_i, x) = \sin(x - x_i)\left(1 + \left(\frac{u''(x_i)}{u'(x_i)}\sin(x - x_i)\right)^2\right)^{-1}.$$

Функция $\mu(x_i, x) \in C^\infty$ по обеим переменным и ее разложение по степеням $(x - x_i)$ имеет вид $\mu(x_i, x) = (x - x_i) - (1/6)(x - x_i)^3 + \ldots$. Определим на R_{2n} функционал

$$\hat{f}(u) = \oint\left(u^{-2}(x) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n}\left(u'(x_i) + \frac{1}{2}u''(x_i)\mu(x_i, x)\right)^{-2}\left(\sin\frac{x - x_i}{2}\right)^{-2}\right)dx,$$

совпадающий с $f(u)$ на U_n. Благодаря свойствам функции μ, подынтегральная функция $\hat{N}(u)$ имеет, быть может, особенности по переменным x_i, $i = 1$,

$2, \ldots, 2n$, и x только в случае совпадения $x_i = x$. Раскладывая функцию $u(x) \in C^4$ в ряд по степеням $(x - x_i)$, получаем

$$\hat{N}(u)(x_i, x) = b_i(x_i, x)(x - x_i)^{-3} \int_{x_i}^{x} u^{(4)}(t)(x - t)^3 dt + c_i(x_i, x),$$

где $b_i(x_i, x)$ и $c_i(x_i, x)$ непрерывно дифференцируемы по обеим переменным. Таким образом, функционал $\hat{f} \in C^1(R_{2n})$. Выписав дифференциал $D\hat{f}(u)\Delta u$, нетрудно установить, что в каждой точке $u \in S_n^*$ он является невырожденным на касательном пространстве $T_u S_n$. В силу леммы 4 S_n^* является C^1-подмногообразием коразмерности один.

Докажем связность S_n^*. С этой целью рассмотрим расслоение $h\colon S_n \to X_{2n}$, где $h(u) = (x_i)$ (т. е. h ставит в соответствие с.ф. $u(x)$ упорядоченный набор ее нулей), и докажем гомотопическую тривиальность слоя $h^{-1}((x_i))$. Сужение расслоения h на S_n^* обозначим через h^*. Если слой фиксирован, то мы фактически исследуем обычные с. ф., у которых зафиксированы знаки производных $u'(x_i)$. Введем еще одно расслоение $\theta\colon h^{-1}((x_i)) \to K^{2n} \cap S^{2n-1}$, где $\theta(u) = (k_i) = (u'(x_i))$, конус $K^{2n} = (\mathbf{R}^-)^n \times (\mathbf{R}^+)^n$, сфера $S^{2n-1} = \{u'(x_i)\colon \sum (u'(x_i))^2 = 1\}$. Гомотопия, стягивающая слой $\theta^{-1}((k_i))$ в любую принадлежащую ему точку u_0, имеет вид $u(x,t) = u_0 |u| ((1-t)u_0^2 + tu^2)^{-1/2}$, $t \in [0,1]$. В самом деле, $u(x_i, t) \equiv u''(x_i, t) \equiv 0$; $u'(x_i, t) \equiv u_0'(x_i)$; других нулей, кроме x_i, функции $u(x,t)$ не имеют; существуют производные $u^{(5)}(x_i, t)$. Из стягиваемости базы и слоя расслоения θ следует стягиваемость тотального пространства $h^{-1}((x_i))$. Описанная гомотопия инвариантна относительно действия f: если $f(u) = f(u_0)$, то $f(u(x,t)) = (1-t)f(u) + tf(u_0) \equiv \text{const}$ для всех $t \in [0,1]$. Следовательно, прообраз $(h^*)^{-1}((x_i))$ так же стягиваем по себе. Поэтому из связности базы X_{2n} и стягиваемости слоя $(h^*)^{-1}((x_i))$ расслоения h^* следует связность многообразия S_n^*.

Отображение h по той же формуле продолжается до C^4-отображения $\hat{h}$ на R_{2n} (лемма 3). С помощью леммы 4 устанавливаем, что $h^{-1}((x_i)) \subset S_n$ является C^3-подмногообразием коразмерности $2n$, а $(h^*)^{-1}((x_i)) \subset h^{-1}((x_i))$ — C^1-подмногообразием коразмерности один. Из предыдущих рассуждений следует, что подмножества $S_n^{\pm} \subset S_n$ являются открытыми, связными и на каждом из множеств $S_n^{\pm}$ функционал f знакопостоянен и эти знаки различны.

Теперь покажем, что на всех множествах S_n^- (или S_n^+), $n = 1, 2, \ldots$, с одинаковым верхним индексом знаки функционала f совпадают. Пусть некоторый потенциал $p \notin P_n^*$ порождает собственные функции $u_1^{\pm} \in S_1^{\pm}$, которым соответствуют с. зн. $\lambda_1^{\pm}$, т. е. $-(u_1^{\pm})'' + pu_1^{\pm} = \lambda_1^{\pm} u_1^{\pm}$. Тогда функции $u_n^{\pm}(x) = \dfrac{u_1^{\pm}(nx)}{\|u_1^{\pm}(nx)\|} \in S_n$, так как они имеют требуемые осцилляционные свойства (теорема 1). Функции $u_n^{\pm}(x)$ порождены общим потенциалом $r(x) = n^2 p(nx)$ и им соответствуют с. зн. $n^2 \lambda_1^{\pm}$, так как $-(u_1^{\pm}(nx))'' + n^2 p(nx) u_1^{\pm}(nx) \equiv n^2 \lambda_1^{\pm} u_1^{\pm}(nx)$. Из неравенства $n^2 \lambda_1^- < n^2 \lambda_1^+$ следует, что $u_n^{\pm}(x) \in S_n^{\pm}$. Но $f(u_1^-(x)) = f(u_1^-(nx))$, что доказывает сформулированное утверждение.

Наконец, покажем, что $f(u_1^-) < 0$. Рассмотрим краевую задачу (1) с малым аналитическим потенциалом $p(x) = -\varepsilon\cos 2x$, $\varepsilon \geq 0$. При $\varepsilon = 0$ с. зн. $\lambda_n^* = n^2$, $n \in \mathbf{N}$, являются двукратными. В силу теоремы Айнса об уравнении Матье [9] при $\varepsilon > 0$ все с. зн. расщепляются и становятся простыми. Методом теории возмущений [10] устанавливаем, что имеют место следующие разложения по степеням ε: $\lambda_1^-(\varepsilon) = 1 - \varepsilon/2 + \ldots$, $u_1^-(\varepsilon) = \sin x - (\varepsilon/16)\sin 3x + \ldots$. Поскольку потенциал аналитический, для вычисления значения функционала Неймана применим формулу (4). Получаем для малых $\varepsilon > 0$ разложение $f(u_1^-(\varepsilon)) = = \int_{z_0}^{z_0+2\pi}(\sin z - (\varepsilon/16)\sin 3z + \ldots)^{-2}dz = -\varepsilon\pi + \ldots < 0$.

***Доказательство теоремы* 7.** Функционал f всюду невырожден, поэтому прообразы $f^{-1}(c) \subset S_n$ являются C^1-подмногообразиями коразмерности один. Тривиализуем расслоение f. Пусть $u \in S_n$. Определим вслед за Ф. Нейманом [4] функцию

$$\nu((x_i),(k_i),x) = \frac{2k_1\sin\dfrac{x-x_1}{2}\cdots k_{2n}\sin\dfrac{x-x_{2n}}{2}}{\left(\sum_{i=1}^{2n}k_1^2\sin^2\dfrac{x-x_1}{2}\ldots\left\{k_i^2\sin^2\dfrac{x-x_i}{2}\right\}\ldots k_{2n}^2\sin^2\dfrac{x-x_{2n}}{2}\right)^{1/2}},$$

где сомножители в знаменателе, заключенные в фигурные скобки, отсутствуют и $k_i = u'(x_i)$. Функция $\nu \in S_n^*$. Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство диффеоморфизмов многообразия S_n вида $g^t(u) = u\exp(-\nu^2 t)$. Вдоль траектории семейства производная $(d/dt)(f(g^t(u))) = 2\oint(\nu/u)^2 > 0$ и $\lim_{t\to\pm\infty} f(g^t(u)) = \pm\infty$. Следовательно, каждая траектория семейства пересекает трансверально каждую поверхность уровня $f^{-1}(c)$. Отсюда следует, что существует проекция $\omega\colon S_n \to S_n^*$, порожденная семейством g^t, тривиализующая f.

***Доказательство теоремы* 8.** Вдоль траектории справедливо $\beta(g^t(u)) = = \mathrm{const}$, поэтому $\beta(u) = \beta^*(\omega(u))$. Следовательно, достаточно исследовать свойства подрасслоения β^*. Поскольку $\beta^* = \alpha h^*$, то для любого $\varphi \in S^1$ слой $B^* = (\beta^*)^{-1}(\varphi)$ гомотопически тривиален. Из лемм 3 и 4 следует, что β^* — субмерсия. Остается только тривиализовать β^*. С этой целью покажем, что для любого фиксированного $\varphi_0 \in S^1$ существует гладкое расслоение $\eta\colon S_n^* \to \to (\beta^*)^{-1}(\varphi_0)$ над слоем расслоения β^*, причем слоем расслоения η является окружность и сужение на нее отображения β^* есть диффеоморфизм. Из определения многообразия S_n^* следует, что оно является объединением непересекающихся окружностей $S^1(p^*) = F^{-1}(p^*) \cap S_n$ (см. (10)), каждая из которых содержит с. ф., порожденные одним и тем же потенциалом $p^* \in P_n^*$, и которым соответствует общее с. зн. λ_n^*. Возьмем произвольные линейно независимые с. ф. $u_1, u_2 \in S^1(p^*)$, тогда

$$S^1(p^*) = \left\{u(x,\psi) = (u_1\cos\psi + u_2\sin\psi)/\|u_1\cos\psi + u_2\sin\psi\|,\ \psi \in S^1\right\}.$$

Пусть $\beta^*(u_1) = \varphi$. Пусть $x_i(\psi)$ — зависимость i-го нуля с.ф. $u(x,\psi)$. К тождеству $u_1(x_i(\psi))\cos\psi + u_2(x_i(\psi))\sin\psi \equiv 0$ в любой точке ψ применима теорема о существовании неявной функции $x_i = x_i(\psi)$, и при этом

$x_i'(\psi) = (u_2(x_i(\psi))\cos\psi - u_1(x_i(\psi))\sin\psi) / (u_1'(x_i(\psi))\cos\psi + u_2(x_i(\psi))\sin\psi) \neq 0.$
Поэтому значение $x_i(\psi)$ меняется монотонно. Для всех нулей монотонность может иметь только один и тот же вид, например возрастание. Следовательно, функция $b^*(\psi) = \beta^*(u(\psi))$ также возрастающая. По определению $b^*(0) = \beta^*(u_1) = \varphi$. С ростом ψ каждый нуль будет расти от значения $x_i(0)$ и при каком-то значении ψ_i впервые займет положение ближайшего нуля с. ф. u_1: $x_i(\psi_i) = x_{i+1}(0)$. Для этого значения функция $u(\psi_i)$ с необходимостью совпадет с u_1, так как задача $-u''+p^*(x)u = \lambda_n^* u$ с краевыми условиями $u(x_{i+1}(0)) = u(x_{i+1}(0)+2\pi) = 0$ имеет единственное решение в S_n. Следовательно, $\psi_i = 2\pi$ для всех i. Но это означает, что отображение b^* — диффеоморфизм на $S^1(p^*)$. Таким образом, на каждой окружности $S^1(p^*)$ существует единственная точка $u_0 \in (\beta^*)^{-1}(\varphi_0)$. Сопоставим с. ф. $u \in S_n^*$ указанную с. ф. u_0 — существование отображения η доказано. Из диффеоморфности отображения b^* и гладкой зависимости решений уравнения (2) от начальных условий следует, что η — субмерсия. Тривиализация расслоения β^* имеет вид $T^*: S_n^* \to S^1 \times (\beta^*)^{-1}(\varphi_0)$, где $T^*(u) = (\beta^*(u), \eta(u))$.

5. Доказательства теорем 9 – 11.

***Доказательство теоремы* 9.** Из свойств расслоения β^* и отображения F (см. теорему 8 и формулу (10)) следует, что сужение F_φ^* отображения F на слой $B^* = B^*(\varphi)$ является непрерывной биекцией на P_n^*. Поскольку B^* гомотопически тривиально (теорема 8), то P_n^* имеет то же свойство. Покажем, что F_φ^* является C^1-иммерсией и вычислим коразмерность образа. Сначала исследуем сужение F_φ отображения F на слой $B = B(\varphi)$. В силу теоремы 4 проектирование π_2 осуществляет диффеоморфизм между M_n и U_n. Пусть $(\pi_2)_n^{-1}$ — обратный диффеоморфизм. Отображение $F = \pi_1(\pi_2)_n^{-1}$, поэтому F является C^∞-отображением. Так как слой $B \subset S_n$ есть C^3-подмногообразие (теоремы 5, 8), сужение F_φ принадлежит классу C^3.

Пусть $(p, \lambda, u) \in Q_n$ и $p \in P_n^*$. Рассмотрим дифференциальный оператор $\delta(\Delta u) = \Delta u'' - (p-\lambda)\Delta u$ на касательном пространстве $T_u B$ (см. теоремы 4, 5, 8). Обозначим $C^2(S^1, (x_i)) = \{w \in C^2(S^1): w(x_i) = 0;$ существуют производные $w^{(3)}(x_i)\}$ ((x_i) — нули функции $u(x)$). Множество $C^2(S^1, (x_i))$ является незамкнутым линейным подпространством пространства $C^2(S^1)$. Поскольку $p \in P_n^*$, ядро оператора δ порождено функцией u и некоторой функцией v; последние выберем ортонормированными в $L_2(S^1)$. Покажем, что δ является линейной биекцией между $T_u B$ и $C^2(S^1, (x_i), \perp) = \{w \in C^2(S^1, (x_i)): \oint wu = \oint wv = 0\}$. Оператор δ симметрический и пространство $C^2(S^1, (x_i), \perp)$ ортогонально его ядру, поэтому в $C^4(S^1)$ полный прообраз $\delta^{-1}(w) = y + k_1 u + k_2 v$, где k_1, k_2 — произвольные параметры. Так как $w \in C^2(S^1, (x_i))$, любая функция $\Delta u \in \delta^{-1}(w)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, т.е. $\Delta u \in T_u U_n$. Условия $\Delta u \in T_u S_n \cap T_u B$ (теоремы 5, 8) порождают линейную систему для определения k_1 и k_2. Коэффициент при k_1 в первом уравнении равен $\sum (u'(x_i))^2 > 0$. Коэффициент при k_1 во втором уравнении равен нулю, так как $\Delta u(x_i) = u(x_i) = 0$. Коэффициент при k_2 во втором уравнении отличен от нуля, так как в нулях с нечетными номерами все производные $u'(x_{2i-1})$ одного знака, и все значения $v(x_{2i-1})$ одного знака в силу теоремы о перемежаемости нулей любых двух функций из $\mathrm{Ker}\,(\delta)$. Следовательно, параметры k_1 и k_2 определяются однозначно.

На $C^2(S^1,(x_i))$ определен инъективный линейный оператор $\sigma(w) = wu^{-1}$. Очевидно, что его образ $\mathrm{Im}\,(\sigma) = C^2(S^1)$. Поэтому образ произведения операторов $(\sigma\delta)(T_uB) = \{\Delta p \in C^2(S^1) : \oint \Delta pu^2 = \oint \Delta puv = 0\}$. Наконец, линейный оператор $\chi(\Delta p) = \Delta p - (2\pi)^{-1}\oint \Delta p$ является биекцией между пространствами $\{\Delta p \in C^2(S^1) : \oint \Delta pu^2 = 0\}$ и P и при этом $\oint \chi(\Delta p)uv = \oint \Delta puv$. Но в силу (10) и (1) на пространстве T_uB отображение

$$DF_\varphi(u)\Delta u = \frac{\Delta u'' - (p-\lambda)\Delta u}{u} - \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\Delta u'' - (p+\lambda)\Delta u}{u} = (\chi\sigma\delta)\Delta u.$$

Поэтому линейный оператор $DF_\varphi(u)$ осуществляет биекцию между T_uB и подпространством $\{\Delta p \in P : \oint \Delta puv = 0\} \subset P$ коразмерности один.

Слой B^* есть C^1-подмногообразие коразмерности один в слое B (теорема 8), поэтому сужение F_φ^* принадлежит классу C^1 и в T_uB $\mathrm{codim}\, T_uB^* = 1$. Следовательно, $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\, DF_\varphi^*(u) = 2$ в P. Итак, F_φ^* — C^1-иммерсия, имеющая образ $\mathrm{Im}\, F_\varphi^* = P_n^* \subset P$ — C^1-подмногообразие коразмерности два. Касательное пространство $T_pP_n^* = DF_\varphi^*(T_uB_\varphi^*)$ определяется двумя линейными условиями, одно из которых установлено: $\oint \Delta puv = 0$. Второе условие порождено функционалом Неймана: $Df(u)\Delta u = 0$ (теорема 8). Однако перенести это условие на пространство P с помощью отображения $DF_\varphi^*(u)$ затруднительно. Воспользуемся тем, что $P_n^* = F_\varphi^*(B_\varphi^*)$ для любого $\varphi \in S^1$. Функции $(u-v)$ и $(u+v)$ являются ортогональными и им соответствует тот же потенциал p. Тогда в силу доказанного для функций $\Delta p \in T_pP_n^*$ выполнено условие $\oint \Delta p(u-v)(u+v) = 0$.

***Доказательство теоремы* 10.** Из определения многообразия S_n^+ следует, что отображение F диффеоморфно преобразует S_n^+ в $P \setminus P^*$. Обратный диффеоморфизм обозначим через F_+^{-1}. Расслоения, существование которых утверждается в теореме 10, определим с помощью проектирования ω (см. доказательство теоремы 7) следующим образом:

$$\xi : P \setminus P_n^* \to P_n^*, \qquad \xi(p) = F\omega F_+^{-1}(p),$$

$$\zeta : P \to P_n^*, \qquad \zeta(p) = \begin{cases} \xi(p), & p \in P \setminus P_n^*; \\ p, & p \in P_n^*. \end{cases}$$

Тривиализация расслоения ξ имеет вид

$$\Theta : P \setminus P_n^* \to P_n^* \times (S^1 \times \mathbf{R}^+), \qquad \Theta(p) = (\xi(p), (\beta^* F_+^{-1}(p), fF_+^{-1}(p))).$$

В полярных координатах тривиализация расслоения ζ имеет вид

$$\Omega : P \to P_n^* \times \mathbf{R}^2, \qquad \Omega(p) = \begin{cases} (\xi(p), (\beta^* F_+^{-1}(p), f\,F_+^{-1}(p))), & p \in P \setminus P_n^*; \\ (p, (\text{угол не определен}, 0)), & p \in P_n^*. \end{cases}$$

***Доказательство теоремы* 11.** Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 5. *Пусть u, v — ортонормированные функции. Тогда $k_1(uv) + k_2(u^2 - v^2) = ku_1v_1$, где k — некоторый коэффициент, а u_1, v_1 — некоторые ортонормированные функции из плоскости $\{u, v\}$.*

Доказательство. Возьмем $k = (k_1^2 + (2k_2)^2)^{1/2}$, $u_1 = u\cos\phi - v\sin\phi$, $v_1 = u\sin\phi + v\cos\phi$, где $\cos 2\phi = k_1/k$, $\sin 2\phi = 2k_2/k$.

Пусть $C_0^k(S^1) = \{w \in C^k(S^1) : \oint w = 0\}$. Оператор d/dx: $C_0^1(S^1) \to C_0^0(S^1)$ является линейным изоморфизмом. Обратный к нему оператор обозначим через A. Непосредственно проверяется следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть u, v — ортогональные с. ф., соответствующие двукратному с. зн. λ_n^*. Тогда $A(-(uv)^{(3)} + 2(p(uv))' + 2p(uv)') = 4\lambda_n^*(uv)$.*

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Пусть $p \in P^*_{(n_1, n_2, \ldots, n_m)}$. Из теоремы 9 и леммы 5 следует, что достаточно доказать линейную независимость m функций $u_{n_1}v_{n_1}, \ldots, u_{n_m}v_{n_m}$, где u_{n_k}, v_{n_k} — произвольные ортонормированные с. ф. задачи (1), соответствующие с. зн. $\lambda^*_{n_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Но это так в силу леммы 6 и линейной независимости собственных векторов, которым соответствуют попарно различные с. зн. [11, с. 84].

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
2. *Арнольд В. И.* Моды и квазимоды // Функцион. анализ и его прил. – 1972. – **6**, вып. 2. – С. 94 – 101.
3. *Коротяев Е. Л.* Обратные задачи для операторов Хилла и Дирака // Докл. РАН. – 1999. – **365**, № 6. – С. 730 – 733.
4. *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. – М.: Мир, 1981. – С. 290 – 305.
5. *Дымарский Я. М.* О многообразиях, порожденных семейством периодических краевых задач // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 6. – С. 771 – 781.
6. *Uhlenbeck K.* Generic properties of eigenfunctions // Amer. J. Math. – 1976. – **98**, № 4. – P. 1059 – 1078.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. – М.: Физматгиз, 1963. – 702 с.
8. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of the Laplacian. I // Proc. Jap. Acad. Ser. A. – 1978. – **54**, № 4. – P. 87 – 91.
9. *Ince E. L.* A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1922. – **21** – P. 117 – 120.
10. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. I. – М.: Гостехтеориздат, 1951. – 476 с.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Получено 15.02.2001