УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Ю. І. Каплун, В. Г. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ*

We suggest and justify an algorithm of finding asymptotic solutions of singularly perturbed differential equations with pulse effect.

Запропоновано та обґрунтовано алгоритм побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

1. Вступ. При дослідженні різноманітних фізичних процесів і явищ (горіння для випадку автокаталітичної реакції [1], поширення тепла в тонких тілах [2], коливні процеси в напівпровідникових пристроях [3], акустичні коливання в середовищі з малою в'язкістю [4]) виникає потреба вивчення сингулярно збурених диференціальних рівнянь, для аналізу яких застосовуються методи теорії усереднення [5], асимптотичний метод типу ВКБ [6, 7], методи регуляризації сингулярних збурень [8], метод примежових функцій [9, 10] та інші. З іншого боку, при наявності збурень миттєвого характеру в таких системах постає проблема аналізу математичних моделей, що описуються за допомогою сингулярних диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Подібні задачі вивчались у працях [11 – 13], де розглядались питання про знаходження періодичних розв'язків початкових та крайових задач для сингулярно збурених рівнянь з імпульсною дією. В [14] вивчались нетерові крайові задачі з сингулярним збуренням.

У даній роботі, використовуючи ідеї теорії сингулярно збурених рівнянь [9], розглядаємо задачу про побудову асимптотичних розв'язків сингулярно збурених рівнянь вигляду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = g(t, x) \tag{1}$$

з імпульсною дією

$$\Delta x\big|_{t=t_i} = x(t_i+0) - x(t_i-0) = I_i(x), \qquad i \in \mathbf{Z}, \tag{2}$$

де функція $g(t, x)$ визначена в $\mathbf{R}^2$; моменти імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$, такі, що $t_{i+1} - t_i \geq \delta$ для деякого $\delta > 0$. Крім того, нехай виконуються умови:

1) функція $g(t, x)$ нескінченно диференційовна в $\mathbf{R}^2$;

2) породжуюча задача вигляду

$$g(t, x) = 0, \tag{3}$$

$$\Delta x\big|_{t=t_i} = I_i(x), \qquad i \in \mathbf{Z}, \tag{4}$$

має розв'язок $x = \bar{x}_0(t)$, який є нескінченно диференційовним за винятком точок імпульсної дії:

3) $g'_x(t, \bar{x}_0(t)) < 0$, $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $g'_x(t_i, \lim\limits_{t \to t_i+0} \bar{x}_0(t)) < 0$, $i \geq -1$; $g'_x(t, \bar{x}_0(t)) > 0$, $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $g'_x(t_i, \lim\limits_{t \to t_i+0} \bar{x}_0(t)) > 0$, $i < -1$;

4) функції $I_i(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$, нескінченно диференційовні для всіх $i \in \mathbf{Z}$;

5) значення функцій імпульсної дії $|I'_i(\bar{x}_0(t_i))| \neq 1$, $i \in \mathbf{Z}$.

---

* Виконана при частковій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект 01.07/00109).

Питання про необхідні і достатні умови існування розв'язків задачі (3), (4) детально досліджено в [15].

Рівняння (1) з умовою імпульсної дії (2) має розв'язок, визначений на всій множині $\mathbf{R}^1$, при досить загальних умовах. Тому припустимо, що розв'язок задачі (1), (2) має розв'язок на всій множині $\mathbf{R}^1$. Побудуємо асимптотичний розв'язок задачі (1), (2).

2. Побудова асимптотичного розв'язку. Наближений розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду [10, 11]:

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(t, \tau, \varepsilon), \tag{5}$$

де $\bar{x}(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \varepsilon \bar{x}_1(t) + \ldots$ — регулярна частина асимптотики, а

$$\Pi x(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{t_i \le t} \Pi x(t, \tau_i, \varepsilon), \qquad \tau = (\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots), \tag{6}$$

$$\Pi x(t, \tau_i, \varepsilon) = \Pi_0 x(\tau_i) + \varepsilon \Pi_1 x(\tau_i) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\tau_i = \frac{t - t_i}{\varepsilon}, \quad i \ge 0; \quad \tau_i = \frac{t_i - t}{\varepsilon}, \quad i < 0,$$

— її сингулярна частина. Примежові функції $\Pi_k x(\tau_i)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, при кожному $i \in \mathbf{Z}$ визначені в деякому правому околі точки $\tau_i = 0$.

Для знаходження в явному вигляді коефіцієнтів асимптотичного розв'язку (5) підставимо ряд (5) у рівняння (1) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε. Тоді отримаємо рівність

$$\varepsilon \frac{d\bar{x}(t, \varepsilon)}{dt} + \sum_{t_i \le t,\, i \ge 0} \frac{d\Pi x(t, \tau_i, \varepsilon)}{d\tau_i} - \sum_{t_i \le t,\, i < 0} \frac{d\Pi x(t, \tau_i, \varepsilon)}{d\tau_i} =$$

$$= \bar{g}(t, \varepsilon) + \Pi g(t, \tau, \varepsilon), \tag{7}$$

де $\bar{g}(t, \varepsilon) = g(t, \bar{x}(t, \varepsilon))$, $\Pi g(t, \tau, \varepsilon) = g(t, x(t, \tau, \varepsilon)) - g(t, \bar{x}(t, \varepsilon))$.

Із співвідношення (7) можна отримати систему рівнянь для визначення членів регулярної частини асимптотики розв'язку (5). Для цього з урахуванням асимптотичного розвинення (5) потрібно розкласти функцію $\bar{g}(t, \varepsilon)$ в асимптотичний ряд по ε та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях параметра ε.

Функцію $\bar{g}(t, \varepsilon)$ можна записати за допомогою ряду Тейлора (в околі точки $\varepsilon = 0$) у вигляді

$$g(t, \bar{x}(t, \varepsilon)) = g(t, \bar{x}_0(t)) + \sum_{m=1}^{k} \varepsilon^m [G_m(t) + \bar{g}_x(t, \bar{x}_0(t)) \bar{x}_m(t)] + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Тут функція $G_1(t) \equiv 0$, а функції $G_m(t)$, $m = \overline{2, k}$, поліноміально залежать від $\bar{x}_l(t)$, $l = \overline{0, m-1}$, задаються рекурентно і їх можна отримати в явному вигляді.

Таким чином, для регулярної частини асимптотики (5) маємо систему співвідношень

$$0 = g(t, \bar{x}_0(t)), \qquad \frac{d\bar{x}_0(t)}{dt} = g_x(t, x_0(t)) \bar{x}_1(t), \tag{8}$$

$$\frac{d\bar{x}_{k-1}(t)}{dt} = g_x(t, \bar{x}_0(t)) \bar{x}_k(t) + G_k(t), \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

Згідно з умовою 3 з першого рівняння (8) знаходимо функцію $\bar{x}_0(t)$, причому відповідно до глобальної теореми про неявну функцію [16, 17] функція $\bar{x}_0(t)$ визначена на множині $\mathbf{R}^1$ і є нескінченно диференційовною для всіх

$t \in \mathbf{R}^1$, крім точок імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$. З інших рівнянь (8) послідовно знаходимо функції $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t), \ldots$, які також є нескінченно диференційовними для всіх $t \in \mathbf{R}^1$, крім точок імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$.

Опишемо тепер алгоритм побудови примежових функцій $\Pi x(\tau_i, \varepsilon)$, $i \in \mathbf{Z}$, кожна з яких визначена в правому околі точки $\tau_i = 0$. Нехай $i = 1$. При знаходженні асимптотичного розв'язку (5) задачі (1), (2) для $t \geq t_1$ потрібно врахувати умову імпульсної дії (2), що можна зробити, зобразивши примежову функцію у вигляді

$$\Pi x(\tau_1, \varepsilon) = \Pi_0 x(\tau_1) + \varepsilon \Pi_1 x(\tau_1) + \ldots .$$

Позначимо $\Phi(\varepsilon) = \bar{x}(t_1 + \varepsilon\tau_1, \varepsilon) + \Pi x(\tau_1, \varepsilon)$.

Підставивши розклад $\Pi x(\tau_1, \varepsilon)$ в (7), отримаємо

$$\frac{d\Pi x(\tau_1, \varepsilon)}{d\tau_1} = \Pi_1 g, \tag{9}$$

де

$$\Pi_1 g = g(t_1 + \varepsilon\tau_1, \Phi(\varepsilon)) - g(t_1 + \varepsilon\tau_1, \bar{x}(t_1 + \varepsilon\tau_1, \varepsilon)).$$

Знайдемо систему рівнянь для визначення функцій $\Pi_k x(\tau_1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для цього розкладемо в ряд Тейлора функцію $\Pi_1 g$ в околі точки $\varepsilon = 0$ та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Отримаємо

$$\frac{d\Pi_0 x(\tau_1)}{d\tau_1} = g(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1)) - g(t_1, \bar{x}_0(t_1)),$$
$$\frac{d\Pi_k x(\tau_1)}{d\tau_1} = g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1))\Pi_k x(\tau_1) + F_k(\tau_1), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

де $F_k(\tau_1)$ — деякі функції, що поліноміально залежать від примежових функцій $\Pi_l x(\tau_1)$, $l = \overline{1, k-1}$, зокрема,

$$F_1(\tau_1) = g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1))[\Pi_1 x(\tau_1) + \bar{x}_1(t_1) + \bar{x}'_0(t_1)\tau_1] +$$
$$+ \tau_1 g'_t(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1)) - g'_t(t_1, \bar{x}_0(t_1))\tau_1 - g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1))[\bar{x}_1(t_1) + \bar{x}'_0(t_1)\tau_1],$$

причому $g(t_1, \bar{x}_0(t_1)) = 0$.

Розглянемо умову імпульсної дії (2). Функція $I_1(x(t, \varepsilon))$ в умові (2) для асимптотичного розв'язку задачі (1), (2) в околі точки $t = t_1$ з урахуванням вигляду примежової функції (6) записується таким чином:

$$I_1(x(t, \varepsilon)) = I_1[(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1)) + \varepsilon(\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)) + \varepsilon^2 \ldots] =$$
$$= I_1[(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1)) + \varepsilon I'_1(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1))[\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)] +$$
$$+ \varepsilon^2\{I'_1(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1))[\bar{x}_2(t) + \Pi_2 x(\tau_1)] + J_2(t, \tau_1)\} + \varepsilon^3 \ldots, \tag{11}$$

де $J_k(t, \tau_1)$, $k = 2, 3, \ldots$, — деякі функції, що поліноміально залежать від $\bar{x}_l(t)$, $\Pi_l x(\tau_1)$, $l = 0, 1, \ldots, k-1$.

Оскільки функція $\bar{x}_0(t)$ за побудовою задовольняє умову імпульсної дії (2), то в першому рівнянні в системі (10) можна покласти $\Pi_0 x(\tau_1) \equiv 0$.

Розглянемо тепер рівняння для визначення примежової функції $\Pi_1 x(\tau_1)$. Із другого рівняння в (10) знаходимо

$$\frac{d\Pi_1 x(\tau_1)}{d\tau_1} = g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1))\Pi_1 x(\tau_1). \tag{12}$$

Із розкладу функції $I_1(x(t,\varepsilon))$ в асимптотичний ряд по ε в околі значення $\varepsilon = 0$ випливає рівність

$$\Delta\bar{x}_1\big|_{t=t_1} + \Pi_1 x(0) = I_1'(\bar{x}_0(t_1))[\bar{x}_1(t_1) + \Pi_1\bar{x}(0)],$$

звідки додатково до диференціального рівняння (12) знаходимо початкову умову для функції $\Pi_1 x(\tau_1)$ вигляду

$$\Pi_1 x(0) = \frac{-\Delta\bar{x}_1\big|_{t=t_1} + I_1'(\bar{x}_0(t_1))\bar{x}_1(t_1)}{1 - I_1'(\bar{x}_0(t_1))}, \tag{13}$$

причому всі величини в правій частині формули (13) вже відомі, оскільки регулярна частина асимптотики (8) побудована вище і функція $\bar{x}_1(t)$ має в точці $t = t_1$ розрив першого роду.

Аналогічно для примежової функції $\Pi_k x(\tau_1)$, $k = 2, 3, \ldots$, маємо таку задачу Коші:

$$\frac{d\Pi_k x(\tau_1)}{d\tau_1} = g_x'(t_1, \bar{x}_0(t_1))\Pi_k x(\tau_1) + F_k(\tau_1), \tag{14}$$

$$\Pi_k x(0) = \frac{-\Delta\bar{x}_k\big|_{t=t_1} + I_1'(\bar{x}_0(t_1))\bar{x}_k(t_1) + J_k(t_1, 0)}{1 - I_1'(\bar{x}_0(t_1))}. \tag{15}$$

Покажемо, що функції $\Pi_k x(\tau_1)$, $k = 1, 2, \ldots$, дійсно є примежовими, тобто $\Pi_k x(\tau_1) \to 0$ при $\tau_1 \to \infty$. Справедлива така лема.

Лема 1. *Функції* $\Pi_k x(\tau_1)$, $k = 1, 2, \ldots$, *що є розв'язками задачі* (14), (15), *мають властивість*

$$\lim_{\tau_1 \to +\infty} \Pi_k x(\tau_1) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Більш того, для деяких чисел C_k, $\gamma_k > 0$ *виконується нерівність*

$$|\Pi_k x(\tau_1)| \le C_k e^{-\gamma_k \tau_1}, \quad \tau_1 \ge 0. \tag{16}$$

Доведення. Спочатку доведемо твердження для $k = 1$. Враховуючи лінійність диференціального рівняння (12), розв'язок задачі Коші (12), (13) запишемо у вигляді

$$\Pi_1 x(\tau_1) = \Pi_1 x(0)\exp\left(\int_0^{\tau_1} g_x'(t_1, \bar{x}_0(t_1))\,d\xi\right),$$

звідки для модуля розв'язку $\Pi_1 x(\tau_1)$ отримуємо

$$|\Pi_1 x(\tau_1)| = |\Pi_1 x(0)|\exp(\tau_1 g_x'(t_1, \bar{x}_0(t_1))) = |\Pi_1 x(0)| e^{-\gamma_0 \tau_1},$$

де число $\gamma_0 = -g_x'(t_1, \bar{x}_0(t_1))$ додатне в силу умови $g_x'(t, x) < 0$.

Скористаємось тепер методом математичної індукції. Припустимо, що твердження леми справедливе для функції $\Pi_k x(\tau_1)$, і покажемо, що це твердження залишається вірним і для функції $\Pi_{k+1} x(\tau_1)$. З цією метою розглянемо задачу Коші для функції $\Pi_{k+1} x(\tau_1)$, що має вигляд

$$\frac{d\Pi_{k+1} x(\tau_1)}{d\tau_1} = g_x'(t_1, \bar{x}_0(t_1))\Pi_{k+1} x(\tau_1) + F_{k+1}(\tau_1), \tag{17}$$

$$\Pi_{k+1} x(0) = \frac{-\Delta\bar{x}_{k+1}\big|_{t=t_1} + I_1'(\bar{x}_0(t_1))\bar{x}_{k+1}(t_1) + J_{k+1}(t_1, 0)}{1 - I_1'(\bar{x}_0(t_1))}. \tag{18}$$

Функції $F_{k+1}(\tau_1)$ в (17), як зазначалось вище, поліноміально залежать від $\Pi_l x(\tau_1)$, $l = \overline{1, k}$. Знайшовши k-ту похідну функції $g(t_1 + \varepsilon\tau_1, \Phi(\varepsilon))$, можна показати, що виконується нерівність

$$|F_{k+1}(\tau_1)| \le (c_{k+1}|\tau_1|^{k+1} + c_{k+1}^0)e^{-\gamma_{k+1}\tau_1}, \quad \tau_1 \ge 0,$$

де c_{k+1}, c_{k+1}^0, γ_{k+1} — деякі додатні сталі. Тоді, очевидно, справедлива оцінка

$$|F_{k+1}(\tau_1)| \le \bar{c}_{k+1}e^{-\bar{\gamma}_{k+1}\tau_1}, \quad \tau_1 \ge 0,$$

де $\bar{c}_{k+1}$, $\bar{\gamma}_{k+1}$ — деякі додатні числа, причому $\bar{\gamma}_{k+1} < \gamma_{k+1}$.

Розв'язок задачі Коші (17), (18) можна записати таким чином:

$$\Pi_{k+1}x(\tau_1) = \Pi_{k+1}x(0)\exp(\tau_1 g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1))) + \int_0^{\tau_1}\exp((\tau_1 - s)g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1)))F_{k+1}(s)ds.$$

Звідси для примежової функції $\Pi_{k+1}x(\tau_1)$ знаходимо оцінку

$$|\Pi_{k+1}x(\tau_1)| = |\Pi_{k+1}x(0)|\exp(\tau_1 g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1))) +$$

$$+ \exp(\tau_1 g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1)))\int_0^{\tau_1}\exp(-sg'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1)))|F_{k+1}(s)|ds \le$$

$$\le |\Pi_{k+1}x(0)|e^{-\gamma_0\tau_1} + e^{-\gamma_0\tau_1}\int_0^{\tau_1}\bar{c}_{k+1}e^{s(\gamma_0 - \bar{\gamma}_{k+1})}ds \le$$

$$\le |\Pi_{k+1}x(0)|e^{-\gamma_0\tau_1} + \bar{c}_{k+1}e^{-\gamma_0\tau_1}\frac{e^{(\gamma_0 - \bar{\gamma}_{k+1})s}}{\gamma_0 - \bar{\gamma}_{k+1}}\bigg|_0^{\tau_1} =$$

$$= |\Pi_{k+1}x(0)|e^{-\gamma_0\tau_1} + \frac{\bar{c}_{k+1}}{\gamma_0 - \bar{\gamma}_{k+1}}e^{-\tau_1\bar{\gamma}_{k+1}} + \frac{\bar{c}_{k+1}}{\gamma_0 - \bar{\gamma}_{k+1}}e^{-\tau_1\gamma_0}.$$

Отже,

$$|\Pi_{k+1}x(\tau_1)| \le C_{k+1}e^{-\gamma_{k+1}\tau_1}, \quad \tau_1 \ge 0,$$

для деяких додатних чисел C_{k+1}, γ_{k+1}. Лему доведено.

Сингулярна частина асимптотики розв'язку (5) задачі (1), (2) в околах інших точок імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$, будується аналогічним чином згідно з процедурою, описаною вище. Таким чином, задачу знаходження асимптотичного розв'язку (5) для (1), (2) можна вважати розв'язаною.

3. Обґрунтування асимптотики. Позначимо

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\left[\bar{x}_k(t) + \sum_{t_i \le t}\Pi_k x\left(\frac{t - t_i}{\varepsilon}\right)\right]. \tag{19}$$

Теорема 1. *При виконанні умов 1 – 5 ряд (5) є асимптотичним рядом для розв'язку $x(t, \varepsilon)$ задачі (1), (2) на довільному проміжку $[a, b]$, тобто справедлива асимптотична оцінка вигляду*

$$\max_{a \le t \le b}|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

де функція $X_n(t, \varepsilon)$ визначена згідно з формулою (19).

Доведення. Спочатку з'ясуємо порядок точності, з якою функція $X_n(t, \varepsilon)$ задовольняє умову імпульсної дії. Позначимо $u_n(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)$ і розглянемо

$$\Delta u_n\big|_{t=t_i} = \left[\Delta x(t,\varepsilon) - \Delta X_n(t,\varepsilon)\right]\big|_{t=t_i} = \left[I_i(x(t,\varepsilon)) - I_i(X_n(t,\varepsilon))\right]\big|_{t=t_i}.$$

Перший доданок останньої формули з урахуванням (11) і того, що $\Pi_0 x(\tau_i) = 0$, запишеться таким чином:

$$I_i(x(t,\varepsilon)) = I_i(\bar{x}_0(t)) + \left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k I_i'(\bar{x}_0(t))\left[\bar{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau_i)\right] + J_k(t,\tau_i)\right] + O(\varepsilon^{n+1}),$$

причому з побудови асимптотичного розв'язку $x(t,\varepsilon)$ випливає виконання нерівності

$$\left|I_i(x(t,\varepsilon)) - I_i(X_n(t,\varepsilon))\right|\big|_{t=t_i} \le C_n \varepsilon^{n+1}.$$

Для доведення теореми досить показати, що асимптотична рівність (20) має місце для інтервалу $(t_i, t_{i+1}]$, де t_i, t_{i+1} — два послідовні моменти імпульсної дії. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $i \ge 0$.

Введена вище функція $u_n(t,\varepsilon)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\varepsilon \frac{du_n}{dt} = g_x'(t, \bar{x}_0(t))u_n + F_n(t, u_n, \varepsilon), \tag{21}$$

де позначено

$$F_n(t, u_n, \varepsilon) = g(t, u_n + X_n) - \varepsilon \frac{dX_n}{dt} - g_x'(t, \bar{x}_0(t))u_n$$

і, крім того, $u_n(t,\varepsilon)$ в точках імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$, асимптотично (з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$) рівна нулеві.

Таким чином, функція $u_n(t,\varepsilon)$ визначається як розв'язок задачі Коші вигляду

$$\varepsilon \frac{du_n}{dt} = g_x'(t, \bar{x}_0(t))u_n + F_n(t, u_n, \varepsilon), \tag{22}$$

$$u_n(t_i, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}). \tag{23}$$

Покажемо, що задача Коші (22), (23) має лише тривіальний (з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$) розв'язок. Для цього попередньо доведемо справедливість нерівності $|F_n(t, v, \varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1}$, якщо $v = v(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Дійсно, оскільки

$$F_n(t, v, \varepsilon) = g(t, X_n) - \varepsilon \frac{dX_n}{dt} - g_x'(t, \bar{x}_0(t))v,$$

то при умові, що $v(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, маємо нерівність

$$|F_n(t, v, \varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1},$$

яка випливає з означення функції $X_n(t,\varepsilon)$.

У правому околі точки $t = t_i$ задачу (22), (23) можна записати в еквівалентному вигляді за допомогою інтегрального рівняння вигляду

$$u_n(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_i}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} g_x'(\xi, \bar{x}_0(\xi))\,d\xi\right) F_n(s, u_n, \varepsilon)\,ds + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{24}$$

для розв'язування якого застосуємо метод послідовних наближень, взявши за початкове значення $u_n^{(0)}(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)$, де $v(t,\varepsilon)$ — довільна функція така, що $v(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Послідовні наближення для розв'язку інтегрального рівняння (24) визначимо згідно з формулою

$$u_n^{(k)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_i}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t g_x'(\xi,\bar{x}_0(\xi))d\xi\right)F_n(s,u_n^{(k-1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)ds +$$

$$+\,O(\varepsilon^{n+1}), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{25}$$

Врахувавши оцінку $\left|u_n^{(0)}(t,\varepsilon)\right| \le c\varepsilon^{n+1}$, покажемо виконання нерівності $\left|u_n^{(1)}(t,\varepsilon)\right| \le c_1\varepsilon^{n+1}$ для деякої додатної сталої c_1.

З (25) знаходимо

$$u_n^{(1)}(t,\varepsilon) = \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_i}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t g_x'(\xi,\bar{x}_0(\xi))d\xi\right)F_n(s,u_n^{(0)}(s,\varepsilon),\varepsilon)ds + O(\varepsilon^{n+1})\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_i}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t g_x'(\xi,\bar{x}_0(\xi))d\xi\right)c\varepsilon^{n+1}ds + O(\varepsilon^{n+1})\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{\varepsilon}c\varepsilon^{n+1}\int_{t_i}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t [g_x'(\xi,\bar{x}_0(\xi))]d\xi\right)ds + O(\varepsilon^{n+1})\right| =$$

$$= \left(\left|\frac{1}{\varepsilon}c\int_{t_i}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t c_1 d\xi\right)ds\right| + C_0\right)\varepsilon^{n+1} \le \overline{C}\varepsilon^{n+1}, \tag{26}$$

де $\overline{C}$ — деяка додатна стала.

Покажемо тепер, що для довільного $\mu > 0$ існують $\delta = \delta(\mu)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu)$ такі, що якщо $|v_1| < \delta$, $|v_2| < \delta$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, то виконується нерівність

$$|F_n(t,v_1,\varepsilon) - F_n(t,v_2,\varepsilon)| \le \mu|v_1 - v_2|.$$

Дійсно, це так, оскільки маємо

$$|F_n(t,v_1,\varepsilon) - F_n(t,v_2,\varepsilon)| =$$

$$= \left|g(t,v_1+X_n) - \varepsilon\frac{dX_n}{dt} - g_x'(t,\bar{x}_0(t))v_1 - g(t,v_2+X_n) + \varepsilon\frac{dX_n}{dt} + g_x'(t,\bar{x}_0(t))v_2\right| =$$

$$= |g_x'(t,\bar{v}+X_n)(v_1-v_2) - g_x'(t,\bar{x}_0(t))(v_1-v_2)| \le \mu|v_1-v_2|, \tag{27}$$

де $\bar{v} = v_1 + \theta(v_2 - v_1)$, θ — деяке число з інтервалу $(0, 1)$; величина $\mu = |g_x'(t,\bar{v}+X_n) - g_x'(t,\bar{x}_0(t))|$ може бути як завгодно малою при $\varepsilon \to 0$ в силу нескінченної диференційовності функції $g(t,x)$.

Враховуючи нерівність (27), знаходимо

$$\left|u_n^{(k+1)}(t,\varepsilon) - u_n^{(k)}(t,\varepsilon)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_{t_i}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t g_x'(\xi,\bar{x}_0(\xi))d\xi\right)\left[F_n(s,u_n^{(k)}(s,\varepsilon),\varepsilon) - F_n(s,u_n^{(k-1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right]ds\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_i}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t g_x'(\xi,\bar{x}_0(\xi))d\xi\right)\cdot\left|u_n^{(k)}(s,\varepsilon) - u_n^{(k-1)}(s,\varepsilon)\right|\mu\,ds \le$$

$$\le \mu\max_{t_i\le s\le t}\left|u_n^{(k)}(s,\varepsilon) - u_n^{(k-1)}(s,\varepsilon)\right|,$$

тобто для $t_i < t \le t_{i+1}$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ має місце нерівність

$$\left|u_n^{(k+1)}(t, \varepsilon) - u_n^{(k)}(t, \varepsilon)\right| \le \mu \max_{t_i \le s \le t} \left|u_n^{(k)}(s, \varepsilon) - u_n^{(k-1)}(s, \varepsilon)\right| \tag{28}$$

при умові, що виконуються нерівності

$$\left|u_n^{(k)}(s, \varepsilon)\right| \le \delta(\mu), \qquad \left|u_n^{(k-1)}(s, \varepsilon)\right| < \delta(\mu).$$

Останні умови виконуються, якщо взяти $\mu = \mu_0$, де $0 < \mu_0 < 1/2$. Тоді з (26) випливає існування $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu)$ такого, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\mu)]$ виконується нерівність

$$\max_{t_i \le t \le t_{i+1}} \left|u_n^{(1)}(t, \varepsilon)\right| \le c\varepsilon^{n+1} < \frac{1}{4}\delta(\mu).$$

З (26) і нерівностей (28) при $k = 1, 2, \ldots, l-1$ випливають співвідношення

$$\left|u_n^{(l)}\right| \le \left|u_n^{(l)} - u_n^{(l-1)}\right| + \left|u_n^{(l-1)} - u_n^{(l-2)}\right| + \ldots + \left|u_n^{(1)} - u_n^{(0)}\right| \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2^{l-1}} + \frac{1}{2^{l-2}} + \ldots + 1\right)\frac{1}{2}\delta(\mu) = \delta(\mu),$$

де $t_i < t \le t_{i+1}$ та $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0(\mu)$, звідки отримуємо, що послідовність функцій $u_n^{(l)}(t, \varepsilon)$, $l = 0, 1, \ldots$, збігається рівномірно відносно $t \in (t_i, t_{i+1}]$ до деякої функції $u_n(t, \varepsilon)$, причому $u_n(t, \varepsilon)$ є єдиним (з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$) розв'язком інтегрального рівняння (24).

Таким чином, інтегральне рівняння (24) має лише розв'язок $u_n(t, \varepsilon)$, причому $u_n(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Якщо проміжок $[a, b]$ містить одну або більше точок імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$, то для доведення співвідношення (20) досить повторити викладені вище міркування.

Теорему доведено.

4. Періодичні розв'язки. Припустимо, що незбурена система (3), (4) має T-періодичний розв'язок $x_0(t)$, тобто $x_0(t) = x_0(t+T)$. Тоді [18] існує натуральне m таке, що $t_{i+m} = t_i + T$ для всіх точок імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$. Нехай $\{U(t_i): i \in \mathbf{Z}\}$ — множина як завгодно малих, але фіксованих околів точок імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{Z}$. Покажемо, що задача (1), (2) при певних умовах має розв'язок, який є T-періодичним в асимптотичному сенсі. А саме, справедливі такі твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* 1 – 5, *а незбурена система* (3), (4) *має T-періодичний розв'язок $\bar{x}_0(t)$. Тоді задача* (1), (2) *має асимптотичний на довільному відрізку $[a, b]$ розв'язок вигляду* (5), *для якого при кожному натуральному p справедливе співвідношення*

$$\max_{t \in [a,b] \setminus \{U(t_i): i \in \mathbf{Z}\}} \left|X_n(t+T, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\right| = O(\varepsilon^p),$$

де функція $X_n(t, \varepsilon)$ визначена згідно з формулою (19).

Доведення. Як зазначено вище, в силу періодичності функції $\bar{x}_0(t)$ існує натуральне m таке, що $t_{i+m} = t_i + T$ для всіх точок імпульсної дії t_i. Як і при доведенні теореми 1, розглянемо систему рівнянь (8), з якої визначається регулярна частина асимптотики розв'язку задачі (1), (2). Оскільки розв'язок першого рівняння (8) з умовою (2) можна покласти рівним $\bar{x}_0(t)$, то враховуючи його T-періодичність, з другого рівняння (8) знаходимо функцію $\bar{x}_1(t)$, яка є, очевидно, також T-періодичною. Продовжуючи ці міркування далі, приходимо до висновку, що регулярна частина асимптотики розв'язку (5) задачі (1), (2) задається асимптотичним рядом, кожен член якого є T-періодичною кусково-неперервною функцією.

Примежові функції $\Pi_k x(\tau_i)$, $k = 1, 2, \ldots$, є ненульовими лише в деякому околі точки $t = t_i$ і в силу леми 1 прямують до нуля швидше, ніж будь-який степінь ε. Отже, для будь-якого проміжку $[\alpha, \beta]$, що не містить точок імпульсної дії t_i, має місце співвідношення

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} \left| X_n(t+T, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon) \right| = O(\varepsilon^p),$$

де функція $X_n(t, \varepsilon)$ визначена формулою (19), а p — довільне натуральне число, звідки випливає твердження теореми.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* 1 – 5, *задача* (3), (4) *має* T-*періодичний розв'язок* $\bar{x}_0(t)$, *а функції* $I_i(x)$, $i \in \mathbf{Z}$, *задовольняють умову періодичності, тобто* $I_{i+m}(x) \equiv I_i(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}^1$, *де натуральне число* m *таке, що* $t_{i+m} = t_i + T$.

Тоді існує асимптотичний на довільному відрізку $[a, b] \not\ni t_0$ *такому, що* $[a+T, b+T] \not\ni t_0$, *розв'язок* $x(t, \varepsilon)$ *задачі* (1), (2), *для якого при кожному натуральному* p *має місце співвідношення*

$$\max_{t\in[a,b]} \left| X_n(t+T, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon) \right| = O(\varepsilon^p),$$

де функція $X_n(t, \varepsilon)$ *визначена згідно з формулою* (19), $b - a \geq T$.

Схема доведення. Враховуючи міркування, викладені при доведенні теореми 2, для доведення цієї теореми досить розглянути точки імпульсної дії. Примежові функції задовольняють початкові умови (14). Нехай $[a, b] \subset (t_0, +\infty)$.

Із вигляду задачі Коші (14), (15) для визначення примежових функцій та періодичності регулярних членів асимптотики розв'язку $x(t, \varepsilon)$ випливає, що задачі Коші, які визначають примежові функції, збігаються при всіх індексах $i \geq 0$. Очевидно, що й початкові значення $\Pi_k x(0)$ теж збігаються, тобто для довільного $k \geq 0$ і для довільного $i \geq 0$ справедлива рівність

$$\Pi_k x(\tau_i)\big|_{\tau_i = 0} = \Pi_k x(\tau_{i+1})\big|_{\tau_{i+1} = 0} = \ldots .$$

Крім того, в силу леми 1 при $\varepsilon \to 0$ примежові функції $\Pi_k x(\tau_i)$, $k = 1, 2, \ldots$, прямують до нуля експоненціально, тобто виконується нерівність

$$\left| \Pi_k x\left(\frac{t-t_i}{\varepsilon} + \frac{T}{\varepsilon}\right) - \Pi_k x\left(\frac{t-t_i}{\varepsilon}\right) \right| \leq Ce^{-\gamma(t-t_i)/\varepsilon}, \quad t \geq t_i, \quad i \geq 0,$$

звідки випливає твердження теореми.

5. Побудова асимптотичного розв'язку у випадку наявності малого параметра в умові імпульсної дії. Розглянемо систему вигляду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = g(t, x), \tag{29}$$

$$\Delta x\big|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = \varepsilon I_i(x), \quad i \in \mathbf{N}, \tag{30}$$

де функція $g(t, x)$ задана в $\mathbf{R}^2$, моменти імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{N}$, такі, що $t_{i+1} - t_i \geq \delta$ для деякого $\delta > 0$.

Незбурена для (29), (30) задача має вигляд $g(t, x) = 0$, щодо якої припустимо, що дане співвідношення має нескінченно диференційовний розв'язок $x = \bar{x}_0(t)$, $t \in \mathbf{R}^1$. Тоді розв'язок задачі (29), (30) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду (5). Аналогічно викладеному вище при виконанні умов 1, 3, 4 для регулярної частини асимптотики отримаємо систему вигляду (8). З першого рівняння (8) знаходимо $\bar{x}_0(t)$, з другого — $\bar{x}_1(t)$ і т. д., тобто регулярну частину асимптотики. При цьому кожна функція $\bar{x}_n(t)$ є нескінченно диференційовною на $\mathbf{R}^1$.

Розглянемо тепер умову імпульсної дії (30). Примежові функції $\Pi_k x(\tau_i)$ будуть задовольняти систему рівнянь (14), причому умова імпульсної дії (30) має вигляд

$$\Delta x\big|_{t=t_1} = I_1(\bar{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau_1,\varepsilon))\big|_{t=t_1},$$

звідки, записавши праву частину рівності у вигляді асимптотичного ряду, отримаємо

$$[\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1) + \varepsilon(\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)) + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n(\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)) + \ldots +]\big|_{t=t_1+0} -$$

$$- [\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1) + \varepsilon(\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)) + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n(\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)) + \ldots +]\big|_{t=t_1-0} =$$

$$= \Pi_0 x(0) + \varepsilon\Pi_1 x(0) + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n \Pi_n x(0) + \ldots =$$

$$= [\varepsilon[I_1(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1))] + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n+1}[I_1'(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1)) \times$$

$$\times [\bar{x}_n(t) + \Pi_n x(\tau_1)] + J_n(t,\tau_1)\big|_{t=t_1,\,\tau_1=0} + \varepsilon^{n+2} \ldots.$$

Як і раніше, можна покласти $\Pi_0 x(0) = 0$. Тоді знаходимо

$$\begin{aligned} \Pi_1 x(0) &= I_1(\bar{x}_0(t_1)), \\ \Pi_2 x(0) &= I_1'(\bar{x}_0(t_1))[\Pi_1 x(0) + \bar{x}_1(t_1)], \\ \Pi_{k+1} x(0) &= I_1'(\bar{x}_0(t_1))[\Pi_k x(0) + \bar{x}_k(t_1)] + J_k(t_1, 0), \quad k = 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{31}$$

Таким чином, для визначення примежових функцій отримано систему (14) з початковими умовами (31). За допомогою міркувань, використаних при доведенні леми 1, можна показати, що розв'язки задачі Коші (14), (31) (примежові функції) при $\varepsilon \to 0$ прямують до нуля експоненціально. Отже, справедлива така теорема.

Теорема 4. *При виконанні умов* 1, 3, 4 *ряд* (5) *є асимптотичним рядом для розв'язку* $x(t,\varepsilon)$ *задачі* (29), (30) *на довільному відрізку* $[a,b] \subset \mathbf{R}^1$, *тобто справедлива оцінка*

$$\max_{a\le t\le b} |x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad n \in \mathbf{N},$$

де $X_n(t,\varepsilon)$ *визначена згідно з формулою* (19).

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 1.

Розглянемо питання про існування періодичного розв'язку задачі (29), (30). Припустимо, що рівняння $g(t,x) = 0$ має T-періодичний розв'язок $x_0(t)$, визначений на $\mathbf{R}^1$. Справедливі такі аналоги теорем 2, 3.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* 1, 3, 4, *рівняння* $g(t,x) = 0$ *має* T-*періодичний розв'язок, а моменти імпульсної дії* t_i, $i \in \mathbf{N}$, *задовольняють умову періодичності* $t_{i+m} = t_i + T$ *для деякого натурального числа* m. *Тоді задача* (29), (30) *має асимптотичний на довільному відрізку* $[a,b] \subset [t_1, +\infty)$ *розв'язок вигляду* (5), *для якого при довільному натуральному* p *справедливе співвідношення*

$$\max_{t\in[a,b]\setminus\{U(t_i):i\in\mathbf{N}\}} |X_n(t+T,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)| = O(\varepsilon^p),$$

де $X_n(t,\varepsilon)$ *визначена згідно з формулою* (19).

Теорема 6. *Нехай виконуються умови 1, 3, 4, рівняння $g(t, x) = 0$ має T-періодичний розв'язок, а моменти імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{N}$, та функції $I_i(x)$, $i \in \mathbf{N}$, задовольняють умову періодичності, тобто*

$$t_{i+m} = t_i + T, \qquad I_{i+m}(x) \equiv I_i(x), \qquad x \in \mathbf{R}^1,$$

для деякого натурального числа m.

Тоді задача (29), (30) має асимптотичний на довільному відрізку $[a, b] \not\ni t_1$ такому, що $[a + T, b + T] \not\ni t_1$, розв'язок вигляду (5), для якого при довільному натуральному p справедливе співвідношення

$$\max_{t \in [a, b]} \left| X_n(t + T, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon) \right| = O(\varepsilon^p),$$

де $X_n(t, \varepsilon)$ визначена згідно з формулою (19), $b - a > T$.

1. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классе разрывных функций и уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 394 с.
2. *Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А.* Асимптотическое решение задачи о распространении тепла в тонких телах // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 1. – С. 13 – 21.
3. *Польский Б. С.* Численное моделирование полупроводниковых приборов. – Рига: Зинатне, 1986. – 167 с.
4. *Вельжанина К. А., Вожукова Е. А., Нефедов Н. Н.* О влиянии вязкости и теплопроводности среды на характеристики цилиндрического резонатора // Акуст. журн. – 1986. – **32**, № 1. – С. 114 – 116.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
6. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып. 3. – С. 63 – 123.
7. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приложениях // Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1980. – **15**. – С. 3 – 94.
8. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
9. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
11. *Bainov D. D., Hristova S. G.* Asymptotic of the solution of the initial value problem for a nonlinear singularly perturbed system of impulsive differential equation // Riv. Mat. Pura Appl. – 1992. – № 10. – P. 67 – 87.
12. *Bainov D. D., Hekimova M. A., Veliov V. M.* Asymptotic procedure for solving boundary value problems for singularly perturbed linear systems with impulses // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1992. – **20**, № 3. – P. 211 – 229.
13. *Караnджулов Л. И.* Краевая задача с импульсным воздействием для сингулярно возмущенных систем в некритическом случае // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 2. – С. 188 – 205.
14. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Караnджулов Л. И.* Нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 9. – С. 1186 – 1193.
15. *Kaplun Yu., Perestyuk M., Samoylenko V.* Implicit functional equations with discontinuous trajectories // Math. Notes (Miskolc). – 2001. – **2**, № 1. – P. 145 – 157.
16. *Самойленко В. Г., Каплун Ю. И.* О глобальных решениях функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 11. – С. 1578.
17. *Самойленко В. Г., Каплун Ю. І.* Рівняння $g(t, x) = 0$: існування та продовжуваність його розв'язків // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 372 – 382.
18. *Самойленко В. Г., Єлгондиев К. К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Там же. – 1997. – **49**, № 1. – С. 141 – 148.

Отримано 22.11.2001