УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, С. И. Жир (Академия таможен. службы Украины, Днепропетровск)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

For entire transcendental functions of finite generalized order, we obtain limiting relations between the growth characteristic mentioned above and sequences of their best polynomial approximations in the Hardy, Bergman, and $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$ Banach spaces.

Для цілих трансцендентних функцій скінченного узагальненого порядку одержано граничні співвідношення між вказаною характеристикою зростання та послідовностями їх найкращих поліноміальних наближень у банахових просторах Харді, Бергмана та $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$.

1. Первые результаты, касающиеся указанной в заглавии проблемы, были получены С. Н. Бернштейном (см., например, [1, с. 172, 173, 176]) для случая равномерной аппроксимации алгебраическими многочленами вещественной на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(x)$, являющейся сужением на $[-1, 1]$ целой трансцендентной функции $f(z)$. Работа [1] послужила своеобразным толчком к исследованию связей между характеристиками роста максимума модуля целой функции и скоростью стремления к нулю последовательности ее наилучших полиномиальных приближений в равномерной метрике пространства $C[-1, 1]$ (см., например, [2]). Дальнейшее развитие исследований в этом направлении связано с работами R. A. Reddy [3, 4], изучавшего поведение аппроксимативных характеристик для целых трансцендентных функций быстрого и медленного роста.

Предложенные М. Н. Шеремстой [5, 6] и дополненные С. Б. Балашовым [7] обобщения классических характеристик роста целых функций существенно обогатили шкалу роста и позволили получить несколько новых результатов теории аппроксимации в $C[-1, 1]$ (см., например, [8]).

Началом распространения идей С. Н. Бернштейна на случай комплексной плоскости $\mathbb{C}$ послужила работа А. В. Батырева [9]. В дальнейшем И. И. Ибрагимов и Н. И. Шихалиев [10], A. Giroux [11], С. Б. Вакарчук [12 – 14] продолжили исследования, начатые в [2, 4, 9], в $\mathbb{C}$. Данная статья является в некотором смысле распространением тематики [8] на случай банаховых пространств аналитических в круге функций и содержит теоремы, обобщающие некоторые основные утверждения из [10, 12, 13].

2. Напомним необходимые в дальнейшем понятия и определения (см., например, [5, 6]). Пусть $\mathcal{L}$ — класс функций $h(x) > 0$, определенных на полусегменте $[1, \infty)$ и удовлетворяющих условиям:

1) $h(x)$ дифференцируемы на $[1, \infty)$ и строго монотонно возрастают;

2) для произвольной функции $\gamma(x)$ такой, что $\gamma(x) \to 0$ при $x \to \infty$, справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h[(1+\gamma(x))x]}{h(x)} = 1. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_0$ множество функций $h(x) \in \mathcal{L}$, которые вместо (1) удовлетворяют более сильному требованию, а именно являются медленно возрастающими, т. е.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1 \qquad \forall c \in (0, \infty).$$

Под обобщенным порядком роста целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) z^n$ понимают величину

$$\rho(f; \alpha, \beta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\alpha[\ln M(f, r)]}{\beta(\ln r)}, \tag{2}$$

где $\alpha(x) \in \mathcal{L}_0$, $\beta(x) \in \mathcal{L}$, $M(f, r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Если, например, полагать $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$, то получим обычное определение порядка целой функции.

Имеет место следующая теорема.

Теорема А [5]. *Пусть* $\alpha(x) \in \mathcal{L}_0$, $\beta(x) \in \mathcal{L}$; $F(x, c) = \beta^{-1}[c \cdot \alpha(x)]$. *Если для всех* $c \in (0, \infty)$ *при* $x \to \infty$

$$\frac{dF(x, c)}{d \ln x} = O(1),$$

то справедливо равенство

$$\rho(f; \alpha, \beta) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(n^{-1} \ln(1/|c_n(f)|)\right)}. \tag{3}$$

3. Обозначим через H_q, $q > 0$, пространство Харди аналитических в единичном круге $U \overset{\text{df}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{H_q} = \lim_{r \to 1-0} M_q(f, r) < \infty,$$

где

$$M_q(f, r) = \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(r \exp(it))|^q \, dt\right\}^{1/q},$$

а через H'_q, $q > 0$, пространство Бергмана аналитических в U функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H'_q} = \left\{\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^q \, dx \, dy\right\}^{1/q} < \infty.$$

Полагаем $\|f\|_{H'_\infty} = \|f\|_{H_\infty} = \sup\{|f(z)| : z \in U\}$. Очевидно, что при $q \geq 1$ H_q и H'_q — банаховы пространства.

Говорят [15], что аналитическая в U функция $f(z)$ принадлежит пространству $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, где $0 < p < q \leq \infty$; $0 < \lambda \leq \infty$, если

$$\|f\|_{p,q,\lambda} = \left\{\int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p - 1/q) - 1} M_q^\lambda(f, r) dr\right\}^{1/\lambda} < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

$$\|f\|_{p,q,\infty} = \sup\left\{(1-r)^{1/p - 1/q} M_q(f, r) : 0 < r < 1\right\} < \infty.$$

Пространство $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$ является банаховым при $p > 0$ и $q, \lambda \geq 1$, а в остальных случаях — пространством Фреше. Рассматривая всюду далее лишь банаховы пространства, отметим, что [14]

$$H_q \subset H'_q = \mathcal{B}(q/2, q, q), \quad 1 \leq q < \infty. \tag{4}$$

Пусть X — одно из перечисленных банаховых пространств, а $E_n(f, X)$ — наилучшее приближение функции $f(z) \in X$ элементами подпространства $\mathbb{P}_n$, состоящего из алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\leq n$, т. е.

$$E_n(f, X) = \inf\{\|f - p_n\|_x : p_n \in \mathbb{P}_n\}.$$

Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы* A *и* $\gamma(\alpha, \beta)$ — *конечное положительное число. Тогда для функции* $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ *соотношение*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left[-n^{-1} \ln E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda))\right]} = \gamma(\alpha, \beta) \tag{5}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(z)$ *была целой функцией обобщенного порядка роста* $\gamma(\alpha, \beta)$.

Теорема 2. *Пусть имеют место условия теоремы* A. *Тогда для функции* $f(z) \in H_q$ *предельное равенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left[-n^{-1} \ln E_n(f; H_q)\right]} = \delta(\alpha, \beta), \tag{6}$$

где $\delta(\alpha, \beta)$ — *конечное положительное число, является необходимым и достаточным для того, чтобы* $f(z)$ *была целой функцией обобщенного порядка роста* $\delta(\alpha, \beta)$.

В качестве замечания отметим, что для банахова пространства H'_q аналогичная теорема при $1 \leq q < \infty$ следует из (4), а при $q = \infty$ — из теоремы 2.

4. ***Доказательство теоремы* 1.** Рассуждения проведем в два этапа: на первом — для пространств $\mathcal{B}(p, 2, \lambda)$, где $0 < p < 2$ и $\lambda \geq 1$, а на втором — для пространств $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$ при $0 < p < q$, $q \neq 2$ и $q, \lambda \geq 1$. В [15] показано, что для $p \geq p_1$, $q \leq q_1$, $\lambda \leq \lambda_1$, когда хотя бы одно из неравенств строгое, имеет место строгое включение $\mathcal{B}(p, q, \lambda) \subset \mathcal{B}(p_1, q_1, \lambda_1)$ и справедливо соотношение

$$\|f\|_{p_1, q_1, \lambda_1} \leq 2^{1/q - 1/q_1} [\lambda(1/p - 1/q)]^{1/\lambda - 1/\lambda_1} \|f\|_{p, q, \lambda}.$$

Очевидно, что для любой функции $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ отсюда получим

$$E_n(f; \mathcal{B}(p_1, q_1, \lambda_1)) \leq 2^{1/q - 1/q_1} [\lambda(1/p - 1/q)]^{1/\lambda - 1/\lambda_1} E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda)). \tag{7}$$

4.1. Переходя непосредственно к первому этапу, докажем достаточность условия (5). Используя определения множеств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ и учитывая, что $\alpha(x) \in \mathcal{L}_0$ и $\beta(x) \in \mathcal{L}$, из (5) имеем $\ln\left[1/E_n(f; \mathcal{B}(p, 2, \lambda))\right]^{1/n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f; \mathcal{B}(p, 2, \lambda))} = 0. \tag{8}$$

В [14] показано, что соотношение (8) является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(z)$ была целой. Пусть $f(z)$ имеет обобщенный порядок роста $\rho(f; \alpha, \beta)$, определенный формулой (3). Покажем, что $\rho(f; \alpha, \beta)$ совпадает с числом $\gamma(\alpha, \beta)$, определенным формулой (5).

4.1.1. Из (3) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, для которого при всех $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\beta\left(\frac{1}{n}\ln(1/|c_n(f)|)\right) > \frac{\alpha(n)}{\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}$$

или

$$|c_n(f)| < \frac{1}{\exp\left\{n\,\beta^{-1}\left[\alpha(n)/(\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon)\right]\right\}}, \tag{9}$$

где $\beta^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\beta(\cdot)$.

Обозначая через $T_n(f,z)=\sum_{j=0}^{n}c_j(f)z^j$ частную сумму n-го порядка ряда Тейлора функции $f(z)$, записываем

$$E_n(f;\mathcal{B}(p,2,\lambda)) = \|f-T_n(f)\|_{p,2,\lambda} =$$

$$= \left\{\int_0^1(1-r)^{\lambda(1/p-1/2)-1}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}r^{2j}|c_j(f)|^2\right)^{\lambda/2}dr\right\}^{1/\lambda} \le$$

$$\le B^{1/\lambda}[(n+1)\lambda+1;\ \lambda(1/p-1/2)]\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}|c_j(f)|^2\right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Здесь $B(a,b)$ $(a,b>0)$ — интеграл Эйлера первого рода. Используя (9), продолжаем оценку сверху (10) величины наилучшего полиномиального приближения для $n>n_0$:

$$\le \frac{B^{1/\lambda}[(n+1)\lambda+1;\ \lambda(1/p-1/2)]}{\exp\left\{(n+1)\beta^{-1}[\alpha(n+1)/(\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon)]\right\}}\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}\psi_j^2(\alpha,\beta)\right\}^{1/2}, \tag{11}$$

где

$$\psi_j(\alpha,\beta) \overset{\text{df}}{=} \exp\left\{(n+1)\beta^{-1}\left[\frac{\alpha(n+1)}{\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right]-j\beta^{-1}\left[\frac{\alpha(j)}{\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right]\right\}.$$

Полагая

$$\Psi(\alpha,\beta) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\exp\left\{\beta^{-1}\left[\alpha(1)/(\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon)\right]\right\}},$$

записываем оценку сверху для числа $\psi_j(\alpha,\beta)$ $(j\ge n+1)$:

$$\psi_j(\alpha,\beta) \le \exp\left\{(n+1-j)\beta^{-1}\left[\frac{\alpha(n+1)}{\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right]\right\} \le \Psi^{j-n-1}(\alpha,\beta). \tag{12}$$

С учетом (12) и очевидного неравенства $\Psi(\alpha,\beta)<1$ оценка (10), (11) принимает вид

$$E_n(f;\mathcal{B}(p,2,\lambda)) \le \frac{B^{1/\lambda}[(n+1)\lambda+1;\ \lambda(1/p-1/2)]}{\left(1-\Psi^2(\alpha,\beta)\right)^{1/2}\exp\left\{(n+1)\beta^{-1}[\alpha(n+1)/(\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon)]\right\}}. \tag{13}$$

Из (13) при $n>n_0$ получаем

$$\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon \ge$$

$$\ge \frac{\alpha(n+1)}{\beta\left\{(n+1)^{-1}\left[-\ln E_n(f;\mathcal{B}(p,2,\lambda))+\ln\dfrac{B^{1/\lambda}((n+1)\lambda+1;\lambda(1/p-1/2))}{(1-\Psi^2(\alpha,\beta))^{1/2}}\right]\right\}}. \tag{14}$$

Учитывая произвольность выбора $\varepsilon > 0$ и переходя в (14) к верхнему пределу при $n \to \infty$, на основании (5) имеем

$$\rho(f; \alpha, \beta) \geq \gamma(\alpha, \beta). \tag{15}$$

Покажем, что одновременно имеет место и неравенство, противоположное (15). Для этого записываем

$$r^{n+1} c_{n+1}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(re^{it}) - T_n\left(f, re^{it}\right) \right] e^{-i(n+1)t} dt, \quad 0 < r < 1.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, получаем

$$r^{n+1} |c_{n+1}(f)| \leq M_2(f - T_n(f); r), \quad 0 < r < 1.$$

Используя определение нормы в пространстве $\mathcal{B}(p, 2, q)$ и левую часть формулы (10), имеем

$$|c_{n+1}(f)| \, B^{1/\lambda}((n+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2)) \leq E_n(f; \mathcal{B}(p, 2, \lambda)). \tag{16}$$

Тогда для всех достаточно больших n

$$\frac{\alpha(n)}{\beta\left[-n^{-1} \ln E_n(f; \mathcal{B}(p, 2, \lambda))\right]} \geq$$

$$\geq \frac{\alpha[(1 - 1/(n+1))(n+1)]}{\beta\left\{(1 + 1/n)\left[\ln\left(1/\sqrt[n+1]{|c_{n+1}(f)|}\right) + \ln\left(1/\sqrt[(n+1)\lambda]{B((n+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/2))}\right)\right]\right\}}.$$

Переходя в обеих частях данного неравенства к верхнему пределу при $n \to \infty$ и используя соотношение (1) для функции $\alpha(x)$, в силу (5) и (3) получаем

$$\gamma(\alpha, \beta) \geq \rho(f; \alpha, \beta). \tag{17}$$

Сравнивая (17) и (15), имеем требуемое равенство

$$\gamma(\alpha, \beta) = \rho(f; \alpha, \beta). \tag{18}$$

4.1.2. Показывая необходимость условия (5), полагаем, что $f(z)$ — целая функция конечного обобщенного порядка $\rho(f; \alpha, \beta)$, который определяется формулой (3). Доказательство равенства (18) проводится по рассмотренной в п. 4.1.1 схеме.

4.2. На втором этапе рассуждений для общего случая $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, $q \neq 2$, докажем вначале необходимость условия (5).

4.2.1. Пусть $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ — целая трансцендентная функция конечного обобщенного порядка $\rho(f; \alpha, \beta)$, определенного формулой (3). Покажем справедливость равенства (18).

Используя (9), при $n > n_0$ записываем оценку сверху для величины наилучшего полиномиального приближения

$$E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \leq \|f - T_n(f)\|_{p,q,\lambda} \leq$$

$$\leq \frac{B^{1/\lambda}[(n+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q)]}{(1 - \Psi(\alpha, \beta)) \exp\left\{(n+1)\beta^{-1}[\alpha(n+1)/(\rho(f; \alpha, \beta) + \varepsilon)]\right\}}. \tag{19}$$

Разрешая (19) относительно $\rho(f; \alpha, \beta) + \varepsilon$, получаем неравенство, в общем аналогичное (14). Учитывая, что в нем $\varepsilon > 0$ — произвольное число, и переходя в обеих частях неравенства к верхнему пределу при $n \to \infty$, в силу (5) получаем (15).

Покажем, что одновременно справедливо обратное неравенство (17). Если

$0 < p < q < 2$ и $\lambda, q \geq 1$, то на основании (7), где $p_1 = p$, $q_1 = 2$, $\lambda_1 = \lambda$, и условия (5), уже доказанного для пространства $\mathcal{B}(p, 2, \lambda)$, имеем

$$\gamma(\alpha, \beta) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left[-n^{-1} \ln E_n(f; \mathcal{B}(p, 2, \lambda))\right]} = \rho(f; \alpha, \beta).$$

Пусть теперь $0 < p \leq 2 < q$. Поскольку в данном случае

$$M_2(f, r) \leq M_q(f, r), \quad 0 < r < 1,$$

то очевидно, что

$$E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \geq \left\{\int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1} \inf\left[M_2^\lambda(f-p_n; r) \colon p_n \in \mathbb{P}_n\right] dr\right\}^{1/\lambda} \geq$$

$$\geq |c_{n+1}(f)|\, B^{1/\lambda}((n+1)\lambda + 1;\, \lambda(1/p - 1/q)). \tag{20}$$

Из (3), (5) и (20) получаем следующую оценку:

$$\gamma(\alpha, \beta) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left[n^{-1} \ln(1/|c_n(f)|)\right]} = \rho(f; \alpha, \beta).$$

Если $2 \leq p < q$, то, полагая в (7) $q_1 = q$, $\lambda_1 = \lambda$ и $p_1 \in (0, 2)$, где p_1 — произвольное фиксированное число, и используя в (20) вместо p число p_1, записываем

$$E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \geq |c_{n+1}(f)|\, B^{1/\lambda}((n+1)\lambda + 1;\, \lambda(1/p_1 - 1/q)). \tag{21}$$

Используя (21) и действуя аналогично предыдущему случаю $(0 < p \leq 2 < q)$, получаем оценку (17).

Анализируя полученные на данном этапе неравенства (15) и (17), убеждаемся в справедливости (18).

4.2.2. В заключение кратко остановимся на идее доказательства достаточности условия (5). Исходя из свойств функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, видим, что при выполнении (5) имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda))} = 0,$$

а это означает, что функция $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ — целая [14]. Пусть ее обобщенный порядок роста равен $\rho(f; \alpha, \beta)$. В силу неравенств (16) и (7), (20) и (21), а также (5) и (3) имеем $\rho(f; \alpha, \beta) \leq \gamma(\alpha, \beta)$. Из соображений, аналогичных приведенным в п. 4.2.1, получим противоположное неравенство (15), что означает справедливость формулы (18). Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. 5.1. Покажем вначале необходимость условия (6). Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) z^n$ — целая трансцендентная функция конечного обобщенного порядка $\rho(f; \alpha, \beta)$. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(f)|} = 0 \tag{22}$$

и $f(z) \in \mathcal{B}(p, q, \lambda)$, где $0 < p < q \leq \infty$, $q, \lambda \geq 1$. В силу (4) имеем

$$E_n(f; \mathcal{B}(q/2, q, q)) \leq \tau_q E_n(f, H_q), \quad 1 \leq q < \infty. \tag{23}$$

Здесь τ_q — константа, не зависящая от n и f. В случае пространства Харди H_∞ записываем

$$E_n(f; \mathcal{B}(p, \infty, \infty)) \leq E_n(f, H_\infty), \quad 1 < p < \infty. \tag{24}$$

Используя доказанные в теореме 1 необходимость и достаточность равенства (5) для характеристики обобщенного порядка роста целой функции через последовательность ее наилучших полиномиальных приближений в метрике пространства $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, а также неравенство (23), из соотношения (6) получаем оценку для $\delta(\alpha, \beta)$:

$$\delta(\alpha, \beta) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\left[n^{-1} \ln \dfrac{1}{E_n(f; H_q)}\right]} \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\left[n^{-1} \ln \dfrac{1}{E_n(f; \mathcal{B}(q/2, q, q))}\right]} = \rho(f; \alpha, \beta), \quad 1 \leq q < \infty. \tag{25}$$

Поступая аналогичным образом с оценкой (24), имеем неравенство (25) и в случае $q = \infty$.

Для получения противоположного неравенства

$$\delta(\alpha, \beta) \leq \rho(f; \alpha, \beta) \tag{26}$$

воспользуемся соотношением (9), справедливым при $n > n_0$, и запишем оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения целой трансцендентной функции $f(z)$ обобщенного порядка $\rho(f; \alpha, \beta)$:

$$E_n(f, H_q) \leq \|f - T_n(f)\|_{H_q} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |c_j(f)| \leq$$

$$\leq \exp\left\{-(n+1)\,\beta^{-1}[\alpha(n+1)/(\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon)]\right\} \sum_{j=n+1}^{\infty} \psi_j(\alpha,\beta).$$

Используя (12), продолжаем данную оценку:

$$\leq (1 - \Psi(\alpha,\beta))^{-1} \exp\left\{-(n+1)\,\beta^{-1}[\alpha(n+1)/(\rho(f;\alpha,\beta)+\varepsilon)]\right\}.$$

Отсюда следует

$$\rho(f; \alpha, \beta) + \varepsilon \geq \frac{\alpha(n+1)}{\beta\left\{\dfrac{1}{n+1}\left[\ln \dfrac{1}{E_{n+1}(f, H_q)} + \ln \dfrac{1}{1 - \Psi(\alpha,\beta)}\right]\right\}}. \tag{27}$$

Учитывая (6), произвольность выбора $\varepsilon > 0$ и переходя в (27) к верхнему пределу при $n \to \infty$, получаем (26). Таким образом, имеет место требуемое равенство

$$\delta(\alpha, \beta) = \rho(f; \alpha, \beta). \tag{28}$$

5.2. При доказательстве достаточности полагаем, что условие (6) выполнено. Тогда очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f, H_q)} = 0.$$

Отсюда и из оценки $|c_{n+1}(f)| \leq E_n(f, H_q)$ непосредственно следует предельное равенство (22). Это означает, что $f(z) \in H_q$ является целой трансцендентной функцией. Пусть ее обобщенный порядок роста равен $\rho(f; \alpha, \beta)$. На основании (7), (16), (20), (21), (23), (24) и теоремы 1 получаем, что имеет место неравенство (25). Выполнение неравенства (26) показывается так же, как в п. 5.1. Вытекающая отсюда справедливость равенства (28) завершает доказательство теоремы 2.

1. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.
2. *Varga R. S.* On an extension of a result of S. N. Bernstein // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**, № 2. – P. 176–179.
3. *Reddy A. R.* Approximation of an entire function // Ibid. – 1970. – **3**, № 1. – P. 128–137.
4. *Reddy A. R.* Best polynomial approximation to certain entire functions // Ibid. – 1972. – **5**, № 1. – P. 97–112.
5. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100–108.
6. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений // Там же. – 1968. – № 6. – С. 115–121.
7. *Балашов С. К.* О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней // Там же. – 1972. – № 8. – С. 10–18.
8. *Shah S. M.* Polinomial approximation of an entire function and generalized orders // J. Approxim. Theory. – 1977. – **19**, № 4. – P. 315–324.
9. *Батырев А. В.* К вопросу о наилучшем приближении аналитических функций полиномами // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 2. – С. 173–175.
10. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // Там же. – 1976. – **227**, № 2. – С. 280–283.
11. *Giroux A.* Approximation of entire functions over bounded domains // J. Approxim. Theory. – 1980. – **28**, № 1. – P. 45–53.
12. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1994. – **47**, № 9. – С. 1123–1133.
13. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. II // Там же. – № 10. – С. 1318–1322.
14. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении в некоторых банаховых пространствах аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки. – 1994. – **55**, № 4. – С. 6–14.
15. *Гварадзе М. И.* Об одном классе пространств аналитических функций // Там же. – 1977. – **21**, № 2. – С. 141–150.

Получено 05.04.2001