УДК 517.925.51

І. Є. Вітриченко (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ГЛОБАЛЬНА λ-СТІЙКІСТЬ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We obtain sufficient conditions of the λ-stability of trivial solution of a second order quasilinear differential equation.

Одержано достатні умови λ-стійкості тривіального розв'язку одного квазілінійного диференціального рівняння другого порядку.

1. Постановка задачі. У теорії розповсюдження хвиль [1] вивчається поведінка розв'язків диференціального рівняння (д. р.) другого порядку стосовно степенів коефіцієнта при першому степені невідомої функції. Тому далі досліджуються властивості $G_\Delta St_\lambda$, $G_\Delta AsSt_\lambda$, $UnSt_\lambda$ при $t\uparrow\omega$ д. р. вигляду

$$y'' + \lambda(t)y = F(t, y, y'), \tag{1}$$

де $t\in\Delta$, $\Delta\equiv[t_0,\omega[$ або $\Delta\equiv]\omega,t_0]$, $|\omega|\le+\infty$, $\lambda:\Delta\mapsto\mathbf{R}_+$, $\lambda\in\mathbf{C}^2_\Delta$, $F:\Delta\times\times\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}$, $|F|\le L(|y|+|y'|)^{1+\alpha}$, $L\in\mathbf{C}_\Delta$, $L:\Delta\mapsto\mathbf{R}_+$, $\alpha\in\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}\equiv=]-\infty,+\infty[$, $\mathbf{R}_+\equiv]0,+\infty[$, $\mathbf{R}^2\equiv\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Коли $\lambda=\lambda(t)$ — періодична функція, а $L(t)\equiv 0$, д. р. (1) було об'єктом досліджень багатьох авторів (див., наприклад, [2–4]).

Якщо $\lambda=\lambda(t)$ — неперіодична функція, то асимптотична поведінка розв'язків досліджувалась у роботах [5–7].

Наведені нижче результати ефективно застосовуються до д. р. (1), коефіцієнти якого — повільно змінні функції (їхні похідні є малими величинами у порівнянні з самими функціями при $t\uparrow\omega$). До класу таких функцій належать, наприклад, $A+Bt^\sigma$, $C(\ln t)^\beta$, $D\sin t^\gamma$, $A, B, C, D, \sigma, \beta = \mathrm{const}$, $\gamma\in]0,1[$, $\omega=+\infty$. У деяких випадках одержані результати можуть задовольняти і показникові функції.

Позначимо

$$\mathbf{L}_\Delta\equiv\left\{f:\Delta\mapsto\mathbf{R},\ \int^\omega|f|dt<+\infty\right\},$$

$$S(t,\lambda,a,b)\equiv\frac{|y(t;t_0,y_0,y_0')|}{\lambda^a}+\frac{|y'(t;t_0,y_0,y_0')|}{\lambda^b},$$

де $y=y(t;y_0,y_0')$ — розв'язок д. р. (1), $a,b\in\mathbf{R}$.

Означення 1. *Д. р.* (1) *має властивість* $G_\Delta St_\lambda$ *при* $t\uparrow\omega$, *якщо існують сталі* $a,b\in\mathbf{R}$ *такі, що для будь-якого як завгодно малого* $\varepsilon\in\mathbf{R}_+$ *існує* $\delta_\varepsilon\in]0,\varepsilon[$ *таке, що кожний його розв'язок* $y=y(t;t_0,y_0,y_0')$ *з початковою умовою* $S(t_0,\lambda,a,b)\le\delta_\varepsilon$ *задовольняє нерівність* $S(t,\lambda,a,b)<\varepsilon$ *для усіх* $t\in\Delta$ (*глобальна* λ-*стійкість*).

Означення 2. *Д. р.* (1) *має властивість* $G_\Delta AsSt_\lambda$ *при* $t\uparrow\omega$, *якщо вірне означення* 1 *і* $S(t,\lambda,a,b)=o(1)$, $t\uparrow\omega$ (*глобальна асимптотична* λ-*стійкість*).

Означення 3. *Д. р.* (1) *має властивість* $UnSt_\lambda$ *при* $t\uparrow\omega$, *якщо означення* 1 *не виконується.*

2. Допоміжні результати. Наведемо перетворення, які допомагають одержати оцінку $S(t, \lambda, a, b)$.

Лема 1. *Перетворення*

$$y = -i\lambda^{a+b-0,5}(x - \bar{x}), \qquad y' = \lambda^{a+b}(x + \bar{x}) \tag{2}$$

зводить д. р. (1) *до д. р. вигляду*

$$x' = \left[i\lambda^{0,5} - (a+b-0,25)\lambda'\lambda^{-1}\right]x - 0,25\lambda'\lambda^{-1}\bar{x} + \Phi_1(t, x, \bar{x}), \tag{3}$$

де $|\Phi_1(t, x, \bar{x})| \le 2^{\alpha}\lambda^{(a+b-0,25)\alpha}\lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25})^{1+\alpha} L\,|x|^{1+\alpha}$.

Доведення очевидне.

Щоб скористатися результатами теорії майже трикутних систем [8], необхідно збільшити швидкість спадання до нуля, коли $t \uparrow \omega$, коефіцієнта при $\bar{x}$ у порівнянні з дійсною частиною коефіцієнта при x у д. р. (3).

Лема 2. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0$, *то за умов*

$$|\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \qquad t \in \boldsymbol{\Delta}, \qquad \Lambda_0 = 0 \qquad \textit{або} \qquad 0 < |\Lambda_0| < 4$$

заміна

$$x = z + h\bar{z} \tag{4}$$

($h = -\frac{i}{8}\lambda'\lambda^{-1,5}$, *коли* $\Lambda_0 = 0$, *та* $h = -i\dfrac{4 - \sqrt{16 - \Lambda_0^2}}{\Lambda_0}$, *коли* $0 < |\Lambda_0| < 4$) *перетворює д. р.* (3) *на д. р. вигляду*

$$z' = \left[i\lambda^{0,5} - (a+b-0,25)\lambda'\lambda^{-1} + p\right]z + q\bar{z} + G(t, z, \bar{z}), \tag{5}$$

де

$$p \equiv i\lambda^{0,5}\frac{2|h|^2}{1 - |h|^2} + 0,25\lambda'\lambda^{-1}\frac{h - \bar{h}}{1 - |h|^2} - \frac{h\bar{h}'}{1 - |h|^2},$$

$$q \equiv (-h' + 2i\lambda^{0,5}h + 0,25\lambda'\lambda^{-1}h^2 - 0,25\lambda'\lambda^{-1})(1 - |h|^2)^{-1},$$

$$|G(t, z, \bar{z})| \le \frac{4^{1+\alpha}}{1 - |h|^2}\lambda^{(a+b-0,25)\alpha}\lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25})^{1+\alpha} L\,|z|^{1+\alpha}.$$

Доведення. До д. р. (3) застосуємо заміну (4), де коефіцієнт h визначимо так, щоб у д. р. стосовно z коефіцієнт при $\bar{z}$ дорівнював нулю. Стосовно z одержимо д. р. (5), для якого

$$G(t, z, \bar{z}) \equiv \left[\Phi_1(t, z + h\bar{z}, \bar{z} + \bar{h}z) - h\overline{\Phi}_1(t, z + h\bar{z}, \bar{z} + \bar{h}z)\right](1 - |h|^2)^{-1}.$$

Для h маємо д. р. Ріккаті

$$h' - 2i\lambda^{0,5}h - 0,25\lambda'\lambda^{-1}h^2 + 0,25\lambda'\lambda^{-1} = 0. \tag{6}$$

Не маючи змоги точно розв'язати д. р. (6), скористаємося методом „замороженого" t. Для цього розглянемо два випадки: а) $\Lambda_0 = 0$ та б) $0 < |\Lambda_0| < 4$.

У випадку а) коефіцієнт h визначається як розв'язок лінійного рівняння

$$2i\lambda^{0,5}h - 0,25\lambda'\lambda^{-1} = 0, \qquad h \equiv -\frac{i}{8}\lambda'\lambda^{-1,5}. \tag{7}$$

Зауважимо, що у цьому випадку $|h| < 1$ і

$$\operatorname{Re} p \equiv -\frac{\lambda'\lambda^{-1,5}}{64-(\lambda')^2\lambda^{-3}}(\lambda'\lambda^{-1,5})', \quad |q| \le \nu,$$
$$\nu \equiv \frac{4\left|2\lambda''\lambda^{-1,5} - 3(\lambda')^2\lambda^{-2,5}\right| + 0,25|\lambda'|^3\lambda^{-4}}{64-(\lambda')^2\lambda^{-3}}. \tag{8}$$

У випадку б) коефіцієнт h з перетворення (4) необхідно шукати як розв'язок квадратного рівняння

$$0,25\Lambda_0 h^2 + 2ih - 0,25\Lambda_0 = 0, \quad h \equiv -i\frac{4-\sqrt{16-\Lambda_0^2}}{\Lambda_0}. \tag{9}$$

У цьому випадку $|h| < 1$ і

$$\operatorname{Re} p \equiv 0, \quad |q| \equiv \nu, \quad \nu \equiv \frac{1}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0\right|. \tag{10}$$

Визначивши h, оцінимо нелінійність у д. р. (5):

$$|G(t,z,\bar z)| \equiv \left|\Phi_1(t, z+h\bar z, \bar z+\bar h z) - h\overline{\Phi}_1(t, z+h\bar z, \bar z+\bar h z)\right|(1-|h|^2)^{-1} \le$$
$$\le \left|\Phi_1(t, z+h\bar z, \bar z+\bar h z)\right|(1+|h|)(1-|h|^2)^{-1} \le$$
$$\le 2^{1+\alpha}\lambda^{(a+b-0,25)\alpha}\lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25}+\lambda^{0,25})^{1+\alpha}L\,|z+h\bar z|^{1+\alpha}(1-|h|^2)^{-1} \le$$
$$\le \frac{4^{1+\alpha}}{1-|h|^2}\lambda^{(a+b-0,25)\alpha}\lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25}+\lambda^{0,25})^{1+\alpha}L\,|z|^{1+\alpha}.$$

Далі одержимо оцінки величини $S(t;\lambda,a,b)$.

Лема 3. *Якщо* $\lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1)$, $t\uparrow\omega$, $\Lambda_0 \in\,]-4,4[$, *то за умов*

$$1)\ |\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \quad t\in\mathbf{\Delta} \quad \textit{для} \quad \Lambda_0 = 0 \quad \textit{або} \quad 2)\ 0 < |\Lambda_0| < 4$$

справедлива рівність

$$S(t,\lambda,a,b) = 2\sqrt{1+|h|^2}\left(\lambda^a|\cos(\theta-\psi)| + \lambda^{b-0,5}|\sin(\theta+\psi)|\right)\rho, \tag{11}$$

де $\cos\psi \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1+|h|^2}}$, $\sin\psi \equiv -\dfrac{ih}{\sqrt{1+|h|^2}}$, *а функції* $\rho:\mathbf{\Delta}\mapsto\mathbf{R}_+$, $\theta:\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ *задовольняють відповідно диференціальну нерівність* (*д. н.*)

$$\left[-(a+b-0,25)\lambda'\lambda^{-1} + \operatorname{Re} p - \nu\right]\rho - \frac{4^{1+\alpha}}{1-|h|^2}\lambda^{(a+b-0,25)\alpha}\lambda^{-0,25}\times$$
$$\times(\lambda^{-0,25}+\lambda^{0,25})^{1+\alpha}L\rho^{1+\alpha} \le \rho' \le \left[-(a+b-0,25)\lambda'\lambda^{-1} + \operatorname{Re} p + \nu\right]\rho +$$
$$+\frac{4^{1+\alpha}}{1-|h|^2}\lambda^{(a+b-0,25)\alpha}\lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25}+\lambda^{0,25})^{1+\alpha}L\rho^{1+\alpha} \tag{12}$$

та д. р. вигляду

$$\theta' = \lambda^{0,5}\frac{1+|h|^2}{1-|h|^2} + 0,5\lambda'\lambda^{-1}\frac{\operatorname{Im} h}{1-|h|^2} + 0,5\lambda'\lambda^{-1}\frac{|h|}{1-|h|^2} +$$
$$+\operatorname{Im}[q\exp(-2i\theta)] + \Theta, \tag{13}$$

$$|\Theta| \le \frac{4^{1+\alpha}}{1-|h|^2}\lambda^{(a+b-0,25)\alpha}\lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25}+\lambda^{0,25})^{1+\alpha}L\rho^{\alpha},$$

де $h \equiv -\frac{i}{8}\lambda'\lambda^{-1,5}$, *коли* $\Lambda_0 = 0$, *та* $h \equiv -i\dfrac{4-\sqrt{16-\Lambda_0^2}}{\Lambda_0}$, *коли* $0 < |\Lambda_0| < 4$, *а величини* $\operatorname{Re} p$, ν *визначаються відповідно за формулами* (8) *або* (10).

Доведення. Позначивши $|z| = \rho$, $z = \rho\exp(i\theta)$, $\theta = \arg z$, із замін (2), (4) одержимо

$$\begin{aligned} S(t,\lambda,a,b) &= \lambda^{b-0,5}|x-\bar{x}| + \lambda^{a}|x+\bar{x}| = \\ &= \rho\big\{\lambda^{a}|\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)-h[\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)]| + \\ &+ \lambda^{b-0,5}|\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)+h[\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)]|\big\} = \\ &= 2\rho\big[\lambda^{a}|\cos\theta - ih\sin\theta| + \lambda^{b-0,5}|\sin\theta - ih\cos\theta|\big] = \\ &= 2\sqrt{1+|h|^2}\big[\lambda^{a}|\cos(\theta-\psi)| + \lambda^{b-0,5}|\sin(\theta+\psi)|\big]\rho. \end{aligned} \tag{14}$$

Враховуючи, що $0 < |h| < 1$, з (14) одержуємо нерівність (11).

Для величини ρ маємо д. р. вигляду

$$\frac{d\rho}{dt} = \big\{-(a+b-0,25)\lambda'\lambda^{-1} + \operatorname{Re} p + \operatorname{Re}[q\exp(-2i\theta)]\big\}\rho + \Phi, \tag{15}$$

де

$$\Phi \equiv \operatorname{Re}\{\exp(-i\theta)G[t,\rho\exp(i\theta),\rho\exp(-i\theta)]\},$$

з якого легко одержати д. н. (12).

Величина θ задовольняє д. р. (13), де

$$\Theta \equiv \rho^{-1}\operatorname{Im}\{\exp(-i\theta)G[t,\rho\exp(i\theta),\rho\exp(-i\theta)]\}.$$

3. Основні результати. Використовуючи (11), знайдемо умови, за якими д. р. (1) має властивості $G_{\Delta}St_{\lambda}$, $G_{\Delta}AsSt_{\lambda}$, $UnSt_{\lambda}$, коли $t\uparrow\omega$.

Теорема 1. *Нехай для д. р.* (1) $\lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1)$, $t\uparrow\omega$, $\Lambda_0 \in\,]-4,4[$, *та існують* $a, b \in \mathbf{R}$ *такі, що*

$$\big(\lambda^{-a-0,25} + \lambda^{0,25-b}\big)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\nu\,d\tau\right) = \lambda_0 + o(1), \quad t\uparrow\omega, \quad \lambda_0\in\mathbf{R}_+,$$

$$\left(\frac{\lambda^{-0,25}+\lambda^{0,25}}{\lambda^{-a-0,25}+\lambda^{0,25-b}}\right)^{\alpha}(1+\lambda^{-0,25})L \in \mathbf{L}_{\Delta},$$

де

$$\nu \equiv \big[4\big|2\lambda''\lambda^{-1,5} - 3(\lambda')^2\lambda^{-2,5}\big| + 0,25|\lambda'|^3\lambda^{-4}\big]\big[64-(\lambda')^2\lambda^{-3}\big]^{-1},$$

коли $\Lambda_0 = 0$, $|\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8$, $t\in\mathbf{\Delta}$,

$$\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\lambda^{0,5}\big|\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0\big|, \quad \textit{коли} \quad 0 < |\Lambda_0| < 4.$$

Тоді воно має властивість $G_{\Delta}St_{\lambda}$ *при* $t\uparrow\omega$.

Доведення. Знаючи, що $0 < |h| < 1$, з (11) легко одержати оцінку величини $S(t,\lambda,a,b)$ справа, а саме

$$S(t, \lambda, a, b) \leq 2\sqrt{2}\left(\lambda^a + \lambda^{b-0,5}\right)\rho. \tag{16}$$

З (16) маємо нерівність вигляду

$$S_0 \equiv S[t_0, \lambda(t_0), a, b] \leq 2\sqrt{2}\left[\lambda^a(t_0) + \lambda^{b-1/2}(t_0)\right]\rho(t_0; t_0, \rho_0, \theta_0) \equiv$$
$$\equiv 2\sqrt{2}\left[\lambda^a(t_0) + \lambda^{b-1/2}(t_0)\right]\rho_0,$$

де $\rho = \rho(t; t_0, \rho_0, \theta_0)$ — розв'язок д. р. (15), тобто з мализни величини ρ_0 випливає мализна величини S_0. Для оцінки справа величини $S(t, \lambda, a, b)$ у нерівності (11) проінтегруємо за принципом С. О. Чаплигіна [9] д. н. (12), знайшовши для $\rho = \rho(t; t_0, \rho_0, \theta_0)$, $\rho_0 \neq 0$, оцінку вигляду

$$\rho(t; t_0, \rho_0, \theta_0) \leq \rho_0 \frac{\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)} \frac{\lambda^{0,25-a-b}}{\sqrt{1-\mu|h|^2}} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau\right) \times$$
$$\times \left\{1 - 4^{1+\alpha}\alpha\left[\rho_0 \frac{\sqrt{1-|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)}\right]^{\alpha} \times\right.$$
$$\left.\times \int_{t_0}^{t} \exp\left(\alpha\int_{t_0}^{\tau} \nu \, dt\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left(1-\mu|h|^2\right)^{0,5\alpha}\left(1-|h|^2\right)} L \, d\tau\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{17}$$

де $\mu = 1$, якщо h та ν визначено відповідно за формулами (7) та (8); $\mu = 0$, якщо h та ν визначено відповідно за формулами (9) та (10).

Оскільки $h = o(1)$, $t \uparrow \omega$, або $h = \mathrm{const}$, то за умов теореми у сенсі збіжності невласних інтегралів справедливе еквівалентне співвідношення

$$\int_{t_0}^{\omega} \left(\frac{\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}}{\lambda^{-a-0,25} + \lambda^{0,25-b}}\right)^{\alpha} \left(1 + \lambda^{-0,25}\right) L \, dt \sim$$
$$\sim \int_{t_0}^{\omega} \exp\left(\alpha\int_{t_0}^{t} \nu d\tau\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left(1-\mu|h|^2\right)^{0,5\alpha}\left(1-|h|^2\right)} L \, dt \equiv I_0.$$

Тоді для кожного як завгодно малого $\rho_0 \in \left]0, 4^{-1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)}{\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}} (\alpha I_0)^{-\frac{1}{\alpha}}\right[$ з (11) та (17) одержуємо нерівність

$$S(t, \lambda, a, b) \leq 2\sqrt{2}\rho_0 \frac{\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)} \left(\lambda^a + \lambda^{b-0,5}\right) \frac{\lambda^{0,25-a-b}}{\sqrt{1-\mu|h|^2}} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \nu d\tau\right) \times$$
$$\times \left\{1 - 4^{1+\alpha}\alpha\left[\rho_0 \frac{\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)}\right]^{\alpha} \times\right.$$
$$\left.\times \int_{t_0}^{t} \exp\left(\alpha\int_{t_0}^{\tau} \nu \, dt\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left(1-\mu|h|^2\right)^{0,5\alpha}\left(1-|h|^2\right)} L \, d\tau\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{18}$$

За умов теореми з (18) випливає, що д. р. (1) задовольняє означення 1.

***Наслідок* 1.** *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) \neq 0, +\infty, \quad \lambda'\lambda^{-1,5} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad |\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \quad t \in \mathbf{\Delta}, \quad \lambda'', L \in \mathbf{L}_{\mathbf{\Delta}},$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$ *воно має властивість* $G_{\mathbf{\Delta}}St_{\lambda}$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Досить показати, що $\nu \in \mathbf{L}_{\mathbf{\Delta}}$. За умовами наслідку величина ν визначається за формулою (8). Оскільки $\lambda'\lambda^{-1,5} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, то у сенсі збіжності невласних інтегралів маємо еквівалентне співвідношення

$$\int_{t_0}^{\omega} \nu\, dt \sim \int_{t_0}^{\omega} \left[4\left|2\lambda''\lambda^{-1,5} - 3(\lambda')^2\lambda^{-2,5}\right| + 0,25|\lambda'|^3\lambda^{-4}\right] dt. \tag{19}$$

Звідси за умови $|\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8$, $t \in \mathbf{\Delta}$, випливає нерівність

$$\int_{t_0}^{\omega} \left[4\left|2\lambda''\lambda^{-1,5} - 3(\lambda')^2\lambda^{-2,5}\right| + 0,25|\lambda'|^3\lambda^{-4}\right] dt \leq$$

$$\leq 14 \int_{t_0}^{\omega} \left[|\lambda''|\lambda^{-1,5} + (\lambda')^2\lambda^{-2,5}\right] dt. \tag{20}$$

Для завершення доведення досить показати, що з умови $\lambda'' \in \mathbf{L}_{\mathbf{\Delta}}$ випливає $(\lambda')^2 \in \mathbf{L}_{\mathbf{\Delta}}$.

Дійсно, оскільки $\lambda(\omega) \neq +\infty$, то існує $M_0 = \sup\limits_{t \in \mathbf{\Delta}} \lambda$. Тоді, інтегруючи частинами, одержуємо

$$\int_{t_0}^{t} (\lambda')^2\, d\tau \leq \left[|\lambda'|\lambda^{-1,5}\lambda^{2,5} + |\lambda'(t_0)|\lambda^{-1,5}(t_0)\lambda^{2,5}(t_0) + \int_{t_0}^{t} |\lambda''|\lambda\, d\tau\right] \leq$$

$$\leq \left(16 M_0^{2,5} + M_0 \int_{t_0}^{\omega} |\lambda''|\, dt\right), \quad t \in \mathbf{\Delta}.$$

***Наслідок* 2.** *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda'\lambda^{-1,5} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad |\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \quad t \in \mathbf{\Delta},$$

$$\lambda''\lambda^{-1,5}, \quad \lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25})^{1+\alpha} L \in \mathbf{L}_{\mathbf{\Delta}},$$

то для $a = -b = -0,25$ *воно має властивість* $G_{\mathbf{\Delta}}St_{\lambda}$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Покажемо лише, що $\nu \in \mathbf{L}_{\mathbf{\Delta}}$. Для цього, виходячи з (19) та (20), досить показати, що $(\lambda')^2\lambda^{-2,5} \in \mathbf{L}_{\mathbf{\Delta}}$. Маємо

$$\int_{t_0}^{\omega} (\lambda')^2\lambda^{-2,5}\, dt = \int_{t_0}^{\omega} \lambda'\left(-\frac{2}{3}\lambda^{-1,5}\right)' dt = -\frac{2}{3}\lambda'\lambda^{-1,5}\Big|_{t_0}^{\omega} + \frac{2}{3}\int_{t_0}^{\omega} \lambda''\lambda^{-1,5}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{3}\lambda'(t_0)\lambda^{-1,5}(t_0) + \frac{2}{3}\int_{t_0}^{\omega} |\lambda''|\lambda^{-1,5}\, dt < +\infty.$$

***Наслідок* 3.** *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) \neq 0, +\infty, \quad \lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$|\Lambda_0| \in]0, 4[, \qquad \lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0), \qquad L \in \mathbf{L}_\Delta,$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$ *воно має властивість* $G_\Delta St_\lambda$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. За умов наслідку величина ν визначається за формулою (10) і належить до $\mathbf{L}_\Delta$.

Наслідок 4. *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad |\Lambda_0| \in]0, 4[,$$

$$\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0), \quad \lambda^{-0,25}(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25})^{1+\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta,$$

то при $a = -b = -0,25$ *воно має властивість* $G_\Delta St_\lambda$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 3.

Теорема 2. *Нехай для д. р.* (1)

$$\lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad \Lambda_0 \in]-4, 4[,$$

та існують $a, b \in \mathbf{R}$ *такі, що*

$$\left(\lambda^{-a-0,25} + \lambda^{-b+0,25}\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right) = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\exp\left(\alpha \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right) \lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta,$$

де функцію ν *визначено у формулюванні теореми* 1.

Тоді воно має властивість $G_\Delta AsSt_\lambda$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що д. р. (1) має властивість $G_\Delta St_\lambda$ при $t \uparrow \omega$. За умов теореми та нерівності (14) можна переконатися, що $S(t, \lambda, a, b) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, коли початкове значення S_0 досить мале, тобто д. р. (1) задовольняє означення 2.

Наслідок 5. *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = +\infty, \quad \lambda'\lambda^{-1,5} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad |\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \quad t \in \Delta,$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов*:

1) $c_0 + \omega_0 - 0,25 < a$, $c_0 + \omega_0 + 0,25 < b$, $\lambda^{(c_0+\omega_0+0,25)\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

2) $a > -0,25$, $b > 0,25$, $\lambda''\lambda^{-1,5}$, $\lambda^{0,25\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

3) $c_0 + \omega_0 - 0,25 < a$, $c_0 + \omega_0 + 0,25 < b$, $\nu \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \Delta$, $\lambda''(\lambda')^{-1}\lambda^{-0,5} = c_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\lambda^{(\omega_0+0,25)\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$,

де

$$c_0 = \lim_{t \uparrow \omega} (\ln \lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau, \qquad \nu \equiv \frac{4\left|2\lambda''\lambda^{-1,5} - 3(\lambda')^2\lambda^{-2,5}\right| + 0,25|\lambda'|^3\lambda^{-4}}{64 - (\lambda')^2\lambda^{-3}},$$

$$\omega_0 = \sup_{t \in \Delta_0} \left| c_0 - (\ln \lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau \right|, \qquad \Delta_0 = [T_0 + \varepsilon, \omega[\quad \text{або} \quad \Delta_0 =]\omega, T_0 - \varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T \in [t_0, \omega[: \forall t \in [T, \omega[\ \lambda(t) > 1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T \in]\omega, t_0] : \forall t \in]\omega, T] \ \lambda(t) > 1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $G_\Delta AsSt_\lambda$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Доведемо наслідок за умови 1. Покажемо спочатку, що виконується нерівність

$$I_0 \equiv \int_{t_0}^{\omega} \exp\left(\alpha \int_{t_0}^{\tau} \nu\, dt\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left[1 - \frac{1}{64}(\lambda')^2 \lambda^{-3}\right]^{0,5\alpha+1}} L\, dt < +\infty.$$

Нехай $\Delta = [t_0, \omega[$. За умов наслідку існує $T_0 \in \Delta$ таке, що

$$\inf_{t \in \Delta_0} \lambda > 1, \qquad \sup_{t \in \Delta_0} \left| c_0 - (\ln\lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau \right| = \omega_0, \qquad \Delta_0 \equiv [T_0 + \varepsilon, \omega[.$$

Далі маємо

$$I_0 \equiv \int_{t_0}^{T_0} \exp\left(\alpha \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left[1 - \frac{1}{64}(\lambda')^2 \lambda^{-3}\right]^{0,5\alpha+1}} L\, dt +$$

$$+ \int_{T_0}^{\omega} \exp\left(\alpha \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left[1 - \frac{1}{64}(\lambda')^2 \lambda^{-3}\right]^{0,5\alpha+1}} L\, dt <$$

$$< \int_{t_0}^{T_0} \exp\left(\alpha \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left[1 - \frac{1}{64}(\lambda')^2 \lambda^{-3}\right]^{0,25\alpha+1}} L\, dt + I_1,$$

$$I_1 \equiv \int_{T_0}^{\omega} \lambda^{(\omega_0 + c_0)\alpha} \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left[1 - \frac{1}{64}(\lambda')^2 \lambda^{-3}\right]^{0,25\alpha+1}} L\, dt.$$

Оскільки $\lambda(\omega) = +\infty$ і $\lambda'\lambda^{-1,5} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, то відповідно величини $(1 + \lambda^{-0,5})^{1+\alpha}$ та $\left[1 - \frac{1}{64}(\lambda')^2\lambda^{-3}\right]^{-1}$ не впливають на збіжність невласних інтегралів I_0 та I_1. Тоді має місце еквівалентне співвідношення

$$\int^{\omega} \left[1 - \frac{1}{64}(\lambda')^2 \lambda^{-3}\right]^{-0,5\alpha-1} \lambda^{-0,25+\alpha(\omega_0+c_0)}\, \lambda^{0,25(1+\alpha)} \left(1 + \lambda^{-0,5}\right)^{1+\alpha} L\, dt \sim$$

$$\sim \int^{\omega} \lambda^{\alpha(\omega_0 + c_0 + 0,25)} L\, dt.$$

Звідси для I_1 виконується співвідношення $I_1 \sim \int^{\omega} \lambda^{\alpha(\omega_0 + c_0 + 0,25)} L\, dt < +\infty$. Це означає, що $I_0 < +\infty$. Таким чином задовольняється друга умова теореми 2.

Покажемо, що

$$I_2 \equiv \lambda^{-a-0,25} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right) = o(1), \qquad t \uparrow \omega.$$

Для усіх $t \in \Delta_0$ маємо

$$I_2 = \exp\left\{\ln\lambda \left[-a - 0,25 + c_0 + (\ln\lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau - c_0\right]\right\} \le$$

$$\le \lambda^{-a-0,25+c_0+\omega_0} = o(1), \qquad t \uparrow \omega.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\lambda^{-b+0,25}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\nu\,d\tau\right) = o(1), \quad t\uparrow\omega.$$

Отже, виконується перша умова теореми 2.

Тоді на проміжку Δ_0 величина $S(t,\lambda,a,b)$ задовольняє нерівність (14), з якої за умов наслідку випливає $S(t,\lambda,a,b) = o(1)$, $t\uparrow\omega$.

Розглянемо умову 2. З (19), (20) випливає, що у цьому випадку $\nu\in\mathbf{L}_\Delta$. Це означає, що в умовах теореми 2 величину $\exp\left(\int_{t_0}^{t}\nu\,d\tau\right)$ можна замінити сталою, відмінною від нуля.

За умови 3, коли $\int^{\omega}\nu\,dt = +\infty$, до функції $(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\nu\,d\tau$ застосовано правило Лопіталя.

***Приклад* 1.** Якщо у д. р. (1) $t_0 > 0$, $\omega = +\infty$, $\lambda = B_0\exp(\beta t)$, $L = C_0\exp(\gamma t)$, то легко перевірити, що за умов $B_0\in\,]1,+\infty[$, $C_0,\beta\in\,]0,+\infty[$, $\beta B_0^{-0,5}\exp(-\beta t_0) < 8$, $0,25\alpha\beta+\gamma<0$ воно задовольняє умову 2 наслідку 5.

***Наслідок* 6.** *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = 0, \quad \lambda'\lambda^{-1,5} = o(1), \quad t\uparrow\omega, \quad |\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \quad t\in\Delta,$$

то для будь-яких $a,b\in\mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов*:

1) $c_0-\omega_0+0,25 > a$, $c_0-\omega_0+0,25 > b$, $\lambda^{(c_0-\omega_0-0,25)\alpha-0,5}L\in\mathbf{L}_\Delta$;

2) $a < -0,25$, $b < 0,25$, $\lambda''\lambda^{-1,5}$, $\lambda^{-0,25\alpha-0,5}L\in\mathbf{L}_\Delta$;

3) $c_0-\omega_0-0,25 > a$, $c_0-\omega_0+0,25 > b$, $\nu\notin\mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t\in\Delta$, $\lambda''(\lambda')^{-1}\lambda^{-0,5} = o(1)$, $t\uparrow\omega$, $\lambda^{-(\omega_0+0,25)\alpha-0,5}L\in\mathbf{L}_\Delta$,

де

$$c_0 = \lim_{t\uparrow\omega}(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\nu\,d\tau, \qquad \nu \equiv \frac{4\left|2\lambda''\lambda^{-1,5}-3(\lambda')^2\lambda^{-2,5}\right| + 0,25|\lambda'|^3\lambda^{-4}}{64-(\lambda')^2\lambda^{-3}},$$

$$\omega_0 = \sup_{t\in\Delta_0}\left|c_0-(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\nu\,d\tau\right|, \qquad \Delta_0 = [T_0+\varepsilon,\omega[\quad \textit{або} \quad \Delta_0 = \,]\omega,T_0-\varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T\in[t_0,\omega[:\ \forall t\in[T,\omega[\ \ \lambda(t)<1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T\in\,]\omega,t_0]:\ \forall t\in\,]\omega,T]\ \ \lambda(t)<1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $G_\Delta AsSt_\lambda$, *коли* $t\uparrow\omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 5.

***Наслідок* 7.** *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = +\infty, \quad \lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1), \quad t\uparrow\omega, \quad |\Lambda_0|\in\,]0,4[,$$

то для будь-яких $a,b\in\mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов*:

1) $c_0+\omega_0 < (a+0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $c_0+\omega_0 < (b-0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{\left(\frac{c_0+\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}+0,25\right)\alpha}L\in\mathbf{L}_\Delta$;

2) $a > -0,25$, $b > 0,25$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0)$, $\lambda^{0,25\alpha}L\in\mathbf{L}_\Delta$;

3) $\omega_0 < (a+0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\omega_0 < (b-0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0) \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \Delta$, $\lambda^{\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}+0,25\right)\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$,

де

$$c_0 = \lim_{t\uparrow\omega}(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0\right|d\tau,$$

$$\omega_0 = \sup_{t\in\Delta_0}\left|c_0-(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0\right|d\tau\right|,$$

$$\Delta_0 = [T_0+\varepsilon,\omega[\quad \textit{або} \quad \Delta_0 =]\omega, T_0-\varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T\in[t_0,\omega[: \forall t\in[T,\omega[\ \ \lambda(t)>1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T\in]\omega,t_0] : \forall t\in]\omega,T] \ \ \lambda(t)>1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $G_\Delta AsSt_\lambda$, *коли* $t\uparrow\omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 5.

Наслідок 8. *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = 0, \qquad \lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1), \qquad t\uparrow\omega, \qquad |\Lambda_0| \in]0,4[,$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов*:

1) $c_0-\omega_0 > (a+0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $c_0-\omega_0 > (b-0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{\left(\frac{c_0-\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}-0,25\right)\alpha-0,5} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

2) $a < -0{,}25$, $b < 0{,}25$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0)$, $\lambda^{-0,25\alpha-0,5}L \in \mathbf{L}_\Delta$;

3) $\omega_0 > (a+0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\omega_0 > (b-0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0) \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \Delta$, $\lambda^{-\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}+0,25\right)\alpha-0,5} L \in \mathbf{L}_\Delta$,

де

$$c_0 = \lim_{t\uparrow\omega}(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0\right|d\tau,$$

$$\omega_0 = \sup_{t\in\Delta_0}\left|c_0-(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0\right|d\tau\right|,$$

$$\Delta_0 = [T_0+\varepsilon,\omega[\quad \textit{або} \quad \Delta_0 =]\omega, T_0-\varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T\in[t_0,\omega[: \forall t\in[T,\omega[\ \ \lambda(t)<1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T\in]\omega,t_0] : \forall t\in]\omega,T] \ \ \lambda(t)<1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $G_\Delta AsSt_\lambda$, *коли* $t\uparrow\omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 5.

***Приклад* 2.** Нехай у д. р. (1) $t_0 = 2$, $\omega = +\infty$, $\lambda \equiv 4t^{-2}$, $L = C_0 t^{\beta}$, $C_0 = \text{const} \geq 0$. Для такого д. р. $\lambda(\omega) = 0$, $\lambda'\lambda^{-1,5} \equiv -1 = \Lambda_0$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0) \equiv 0$, і при $a + 0,25 < 0$, $b - 0,25 < 0$, $A_0 > 0$, $2a + \gamma < -2$ воно задовольняє умову 2 наслідку 8.

У частковому випадку, коли $A_0 = 0$, маємо лінійне однорідне д. р. вигляду

$$y'' + \frac{4}{t^2} y = 0,$$

для якого

$$y(t; C_1, C_2) = t^{0,5}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln t\right)\right],$$

$$y'(C_1, C_2) = \frac{1}{2} t^{-0,5}\left[\left(C_1 + C_2\sqrt{15}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln t\right) + \right.$$

$$\left. + \left(C_2 - C_1\sqrt{15}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln t\right)\right], \quad C_1, C_2 = \text{const},$$

і умови λ-стійкості мають вигляд $a + 0,25 < 0$, $b - 0,25 < 0$.

***Зауваження* 1.** За умов теорем 1, 2 з (13) випливає, що областями відповідно глобальних λ-стійкості та асимптотичної λ-стійкості тривіального розв'язку д. р. (1) є множина точок початкових значень (y_0, y_0'), координати яких задовольняють нерівність

$$\frac{|y_0|}{\lambda^a(t_0)} + \frac{|y_0'|}{\lambda^b(t_0)} <$$

$$< \frac{\lambda^{-a-0,25}(t_0) + \lambda^{-b+0,25}(t_0)}{2^{0,5+\frac{2}{\alpha}}\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}\left\{\alpha\int\limits_{t_0}^{\omega}\exp\left(\alpha\int\limits_{t_0}^{t}\nu\,d\tau\right)\dfrac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25}+\lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left(1-\mu|h|^2\right)^{0,5\alpha}\left(1-|h|^2\right)} L\,dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}},$$

де $\mu = 1$, якщо h та ν визначено відповідно за формулами (7) та (8); $\mu = 0$, якщо h та ν визначено відповідно за формулами (9) та (10).

Теорема 3. *Нехай для д. р.* (1) $\lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\Lambda_0 \in \left]-4, 4\right[$, *та існують* $a, b \in \mathbf{R}$ *такі, що*

$$\lambda^{(a+0,25)\alpha}\exp\left(\alpha\int\limits_{t_0}^{t}\nu\,d\tau\right)\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(-\alpha\int\limits_{t_0}^{\tau}\nu\,dt\right)\lambda^{-0,25} \times$$

$$\times \left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha} L\,d\tau = o(1), \quad t \uparrow \omega, \tag{21}$$

$$\lambda^{(b-0,25)\alpha}\exp\left(\alpha\int\limits_{t_0}^{t}\nu\,d\tau\right)\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(-\alpha\int\limits_{t_0}^{\tau}\nu\,dt\right)\lambda^{-0,25} \times$$

$$\times \left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha} L\,d\tau = o(1), \quad t \uparrow \omega, \tag{22}$$

де функцію ν *визначено у формулюванні теореми* 1.

Тоді воно має властивість $UnSt_{\lambda}$ *при* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Для оцінки знизу величини $S(t, \lambda, a, b)$ у нерівності (8) знайдемо оцінку знизу величини ρ, проінтегрувавши за принципом С. О. Чаплигіна [9] ліву частину нерівності (9), тобто

$$\rho(t; t_0, \rho_0, \theta_0) \geq \rho_0 \frac{\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)} \frac{\lambda^{0,25-a-b}}{\sqrt{1-\mu|h|^2}} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \nu d\tau\right) \times$$

$$\times \left\{1 + 4^{\alpha+1}\alpha\left[\rho_0 \frac{\sqrt{1-|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)}\right]^{\alpha} \times\right.$$

$$\left.\times \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\alpha\int_{t_0}^{\tau} \nu dt\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left(1-\mu|h|^2\right)^{0,5\alpha}\left(1-|h|^2\right)} L\, d\tau\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{23}$$

де $\mu = 1$, якщо h та ν визначено відповідно за формулами (7) та (8); $\mu = 0$, якщо h та ν визначено відповідно за формулами (9) та (10).

Підставивши (23) у ліву частину (11) та ввівши функцію $\Lambda \equiv \min(\lambda^{-a-0,25}, \lambda^{-b+0,25})$, одержимо

$$S(t, \lambda, a, b) \geq \rho_0 F(t, \rho_0, a, b)[|\cos(\theta-\psi)| + |\sin(\theta+\psi)|], \tag{24}$$

де

$$F(t, \rho_0, a, b) \equiv 2\frac{\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)} \times$$

$$\times \frac{\Lambda(t, a, b)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \nu d\tau\right)}{\left\{1 + 4^{\alpha+1}\alpha\left[\rho_0 \frac{\sqrt{1-\mu|h(t_0)|^2}}{\lambda^{0,25-a-b}(t_0)}\right]^{\alpha} \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\alpha\int_{t_0}^{\tau} \nu dt\right) \frac{\lambda^{-0,25}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha}}{\left(1-\mu|h|^2\right)^{0,5\alpha}\left(1-|h|^2\right)} L\, d\tau\right\}^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Продовжуючи оцінку $S(t, \lambda, a, b)$ з (24), маємо

$$S(t, \lambda, a, b) \geq \rho_0\sqrt{1+|h|^2} F(t, \rho_0, a, b)\sqrt{\cos^2(\theta-\psi) + \sin^2(\theta+\psi)} =$$

$$= \rho_0\sqrt{1+|h|^2} F(t, \rho_0, a, b)\sqrt{1 + 2\sin\psi\cos\psi\cos 2\theta} =$$

$$= \rho_0\sqrt{1+|h|^2} F(t, \rho_0, a, b)\sqrt{1 + \frac{2ih}{1+|h|^2}\cos 2\theta} \geq$$

$$\geq \rho_0\sqrt{1+|h|^2} F(t, \rho_0, a, b)\sqrt{1 - \frac{2|h|}{1+|h|^2}} = \rho_0 F(t, \rho_0, a, b)(1-|h|). \tag{25}$$

Оскільки за умов теореми при будь-якому $\rho_0 > 0$ функція $F(t, \rho_0, a, b)$ є нескінченно великою, коли $t \uparrow \omega$ ($|h| < 1$, $h = o(1)$, $t \uparrow \omega$, або $h = \text{const}$), то з (25) випливає, що для кожного досить малого ρ_0 (а отже, і S_0) величина $S(t, \lambda, a, b)$ є нескінченно великою, коли $t \uparrow \omega$. Таким чином, ця величина завжди залишить будь-який ε-окіл початку координат.

Наслідок 9. *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = +\infty, \quad |\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \quad t \in \mathbf{\Delta}, \quad \lambda'\lambda^{-1,5} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов*:

1) $c_0 + \omega_0 + 0,25 < -a$, $c_0 + \omega_0 - 0,25 < -b$, $\lambda^{(\omega_0 - c_0 + 0,25)\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

2) $a < -0,25$, $b < 0,25$, $\lambda''\lambda^{-1,5}$, $\lambda^{0,25\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

3) $c_0 + \omega_0 + 0,25 < -a$, $c_0 + \omega_0 - 0,25 < -b$, $\nu \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \mathbf{\Delta}$, $\lambda''(\lambda')^{-1}\lambda^{-0,5} = c_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\lambda^{(\omega_0 - c_0 + 0,25)\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

4) $c_0 + \omega_0 + 0,25 < -a$, $c_0 + \omega_0 - 0,25 < -b$, $\lambda^{(\omega_0 - c_0 + 0,25)\alpha} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, *функції* $\lambda' L^{-1} \lambda^{-(a + 2\omega_0 + 0,5)\alpha - 1}$, $\lambda' L^{-1} \lambda^{-(b + 2\omega_0)\alpha - 1}$ *необмежено зростають, коли* $t \uparrow \omega$;

5) $a < -0,25$, $b < 0,25$, $\lambda^{0,25\alpha} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, $\lambda''\lambda^{-1,5} \in \mathbf{L}_\Delta$, *функції* $\lambda' L^{-1} \times \lambda^{-(a + 0,25)\alpha - 1}$, $\lambda' L^{-1} \lambda^{-b\alpha - 1}$ *необмежено зростають, коли* $t \uparrow \omega$;

6) $c_0 + \omega_0 + 0,25 < -a$, $c_0 + \omega_0 - 0,25 < -b$, $\lambda^{(\omega_0 - c_0 + 0,25)\alpha} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \mathbf{\Delta}$, $\lambda''(\lambda')^{-1}\lambda^{-0,25} = c_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, *функції* $\lambda' L^{-1} \lambda^{-(a + 2\omega_0 + 0,5)\alpha - 1}$, $\lambda' L^{-1} \times \lambda^{-(b + 2\omega_0)\alpha - 1}$ *необмежено зростають, коли* $t \uparrow \omega$,

де

$$c_0 = \lim_{t \uparrow \omega} (\ln \lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau, \qquad \nu \equiv \frac{4\left|2\lambda''\lambda^{-1,5} - 3(\lambda')^2\lambda^{-2,5}\right| + 0,25|\lambda'|^3\lambda^{-4}}{64 - (\lambda')^2\lambda^{-3}},$$

$$\omega_0 = \sup_{t \in \Delta_0} \left| c_0 - (\ln \lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau \right|, \qquad \mathbf{\Delta}_0 = [T_0 + \varepsilon, \omega[\quad \textit{або} \quad \mathbf{\Delta}_0 =]\omega, T_0 - \varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T \in [t_0, \omega[: \ \forall t \in [T, \omega[\ \ \lambda(t) > 1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T \in]\omega, t_0] : \ \forall t \in]\omega, T] \ \ \lambda(t) > 1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $UnSt_\lambda$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Розглянемо умову 1. Оцінимо перші множники величин (21), (22). При $t \in \mathbf{\Delta}_0$ маємо

$$\lambda^{-(a + 0,25)\alpha} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau\right) = \lambda^{\left[-a - 0,25 - c_0 + c_0 - (\ln \lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau\right]\alpha} \geq$$

$$\geq \lambda^{(-a - 0,25 - c_0 - \omega_0)\alpha} \to +\infty, \quad t \uparrow \omega.$$

Аналогічно можна показати, що $\lambda^{(-b + 0,25)\alpha} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau\right) \to +\infty$, $t \uparrow \omega$.

Далі оцінимо другі множники величин (21), (22). Маємо

$$\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{\tau} \nu \, dt\right) \lambda^{-0,25} \left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha} L \, d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{T_0} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau\right) \lambda^{0,25\alpha} \left(1 + \lambda^{-0,5}\right)^{1+\alpha} L \, dt +$$

$$+ \int_{T_0}^{t} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{\tau} \nu\, dt\right) \lambda^{0,25\alpha}\left(1 + \lambda^{-0,5}\right)^{1+\alpha} L\, d\tau \equiv I_0 + I_1.$$

Покажемо, що $I_1 \in \mathbf{L}_\Delta$. Дійсно,

$$I_1 = \int_{T_0}^{t} \lambda^{\left[0,25 - c_0 + c_0 - (\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{\tau} \nu\, dt\right]\alpha} L\, d\tau \le$$

$$\le \int_{T_0}^{t} \lambda^{[0,25 - c_0 + \omega_0]\alpha} L\, d\tau < \int_{T_0}^{\omega} \lambda^{[0,25 - c_0 + \omega_0]\alpha} L\, dt < +\infty.$$

Таким чином, умови теореми 3 виконано.

За умови 2 з $\lambda''\lambda^{-1,5} \in \mathbf{L}_\Delta$ випливає, що $\nu \in \mathbf{L}_\Delta$. Тому в умовах (21), (22) величину $\left(-\alpha\int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right)$ можна замінити сталою, відмінною від нуля.

За умови 3 до величини $(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau$ застосовано правило Лопіталя.

Розглянемо умову 4. У цьому випадку оцінимо при $t \in \mathbf{\Delta}_0$ величину

$$I^* \equiv \frac{\lambda^{-(a+0,25)\alpha} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right)}{\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{\tau} \nu\, dt\right) \lambda^{0,25\alpha}\left(1 + \lambda^{-0,5}\right)^{1+\alpha} L\, d\tau} \ge$$

$$\ge \frac{\lambda^{-(a+0,25+c_0+\omega_0)\alpha}}{\int_{t_0}^{T_0} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right) \lambda^{0,25\alpha}\left(1 + \lambda^{-0,5}\right)^{1+\alpha} L\, dt + \int_{T_0}^{t} \lambda^{(0,25 - c_0 + \omega_0)\alpha} L\, d\tau} \sim$$

$$\sim I^{**} \equiv \frac{\lambda^{-(a+0,25+c_0+\omega_0)\alpha}}{\int_{T_0}^{t} \lambda^{(0,25 - c_0 + \omega_0)\alpha} L\, d\tau}, \quad t \uparrow \omega.$$

Якщо до I^{**} застосувати правило Лопіталя, то за умови 4 можна стверджувати, що $I^{**} \to +\infty$, $t \uparrow \omega$. Аналогічно можна показати, що

$$\frac{\lambda^{-(b-0,25)\alpha} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau\right)}{\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{\tau} \nu\, dt\right) \lambda^{-0,25\alpha}\left(\lambda^{-0,25} + \lambda^{0,25}\right)^{1+\alpha} L\, d\tau} \to +\infty, \quad t \uparrow \omega.$$

За умови 5 наслідок доводиться аналогічно. За умови 6, оскільки $|\lambda'| > 0$, $t \in \mathbf{\Delta}$, до величини $(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t} \nu\, d\tau$ можна застосувати правило Лопіталя.

***Наслідок* 10.** *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = 0, \quad |\lambda'|\lambda^{-1,5} < 8, \quad t \in \mathbf{\Delta}, \quad \lambda''\lambda^{-1,5} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов*:

1) $\omega_0 - c_0 - 0{,}25 < a$, $\omega_0 - c_0 + 0{,}25 < b$, $\lambda^{-(\omega_0 + c_0 + 0{,}25)\alpha - 0{,}5} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

2) $a > -0{,}25$, $b > 0{,}25$, $\lambda''\lambda^{-1{,}5}$, $\lambda^{-(0{,}25\alpha + 0{,}5)} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

3) $\omega_0 - c_0 - 0{,}25 < a$, $\omega_0 - c_0 + 0{,}25 < b$, $\nu \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \Delta$, $\lambda''(\lambda')^{-1}\lambda^{-0{,}5} = c_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\lambda^{-(\omega_0 - c_0 + 0{,}25)\alpha - 0{,}5} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

4) $\omega_0 - c_0 - 0{,}25 < a$, $\omega_0 - c_0 + 0{,}25 < b$, $\lambda^{-(\omega_0 + c_0 + 0{,}25)\alpha - 0{,}5} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, *функції* $\lambda' L^{-1} \lambda^{(-a + 2\omega_0)\alpha - 0{,}25}$, $\lambda' L^{-1} \lambda^{(-b + 2\omega_0 + 0{,}25)\alpha - 0{,}25}$ *необмежено зростають, коли* $t \uparrow \omega$;

5) $a > -0{,}25$, $b > 0{,}25$, $\lambda^{-(0{,}25\alpha + 0{,}5)} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, $\lambda''\lambda^{-1{,}5} \in \mathbf{L}_\Delta$, *функції* $\lambda' L^{-1} \times \times \lambda^{-(a + 0{,}5)\alpha - 1}$, $\lambda' L^{-1} \lambda^{-(b - 0{,}5)\alpha - 0{,}5}$ *необмежено зростають, коли* $t \uparrow \omega$;

6) $\omega_0 - c_0 - 0{,}25 < a$, $\omega_0 - c_0 + 0{,}25 < b$, $\lambda^{-(\omega_0 + c_0 + 0{,}25)\alpha - 0{,}5} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \Delta$, $\lambda''(\lambda')^{-1}\lambda^{-0{,}25} = c_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, *функції* $\lambda' L^{-1} \lambda^{(-a + 2\omega_0)\alpha - 0{,}5}$, $\lambda' L^{-1} \times \times \lambda^{(-b + 2\omega_0 + 0{,}25)\alpha - 0{,}25}$ *необмежено зростають, коли* $t \uparrow \omega$,

де

$$c_0 = \lim_{t \uparrow \omega} (\ln \lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau, \qquad \nu \equiv \frac{4\left|2\lambda''\lambda^{-1{,}5} - 3(\lambda')^2\lambda^{-2{,}5}\right| + 0{,}25|\lambda'|^3\lambda^{-4}}{64 - (\lambda')^2\lambda^{-3}},$$

$$\omega_0 = \sup_{t \in \Delta_0} \left| c_0 - (\ln \lambda)^{-1} \int_{t_0}^{t} \nu \, d\tau \right|, \quad \Delta_0 = [T_0 + \varepsilon, \omega[\quad \text{або} \quad \Delta_0 =]\omega, T_0 - \varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T \in [t_0, \omega[: \ \forall t \in [T, \omega[\ \lambda(t) < 1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T \in]\omega, t_0] : \ \forall t \in]\omega, T] \ \lambda(t) < 1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $UnSt_\lambda$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 9.

Наслідок 11. *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = +\infty, \qquad \lambda'\lambda^{-0{,}25} = \Lambda_0 + o(1), \qquad t \uparrow \omega, \qquad |\Lambda_0| \in]0, 4[,$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов*:

1) $c_0 + \omega_0 < -(a + 0{,}25)\sqrt{16 - \Lambda_0^2}$, $c_0 + \omega_0 < -(b - 0{,}25)\sqrt{16 - \Lambda_0^2}$, $\lambda^{\left(\frac{\omega_0 - c_0}{\sqrt{16 - \Lambda_0^2}} + 0{,}25\right)\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

2) $a < -0{,}25$, $b < 0{,}25$, $\lambda^{0{,}5}(\lambda'\lambda^{-1{,}5} - \Lambda_0)$, $\lambda^{0{,}25\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

3) $\omega_0 < -(a + 0{,}25)\sqrt{16 - \Lambda_0^2}$, $\omega_0 < -(b - 0{,}25)\sqrt{16 - \Lambda_0^2}$, $\lambda^{0{,}5}|\lambda'\lambda^{-1{,}5} - \Lambda_0| \notin \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \Delta$, $\lambda^{\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{16 - \Lambda_0^2}} + 0{,}25\right)\alpha} L \in \mathbf{L}_\Delta$;

4) $c_0 + \omega_0 < -(a + 0{,}25)\sqrt{16 - \Lambda_0^2}$, $c_0 + \omega_0 < -(b - 0{,}25)\sqrt{16 - \Lambda_0^2}$, $\lambda^{\left(\frac{\omega_0 - c_0}{\sqrt{16 - \Lambda_0^2}} + 0{,}25\right)\alpha} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{\left(a + 0{,}5 + \frac{2\omega_0}{\sqrt{16 - \Lambda_0^2}}\right)\alpha - 0{,}5} L = o(1)$, $\lambda^{\left(b + \frac{2\omega_0}{\sqrt{16 - \Lambda_0^2}}\right)\alpha - 0{,}5} L = o(1)$, $t \uparrow \omega$;

5) $a < -0{,}25$, $b < 0{,}25$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0) \in \mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{0,25\alpha} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{(a+0,5)\alpha-0,5} \times L = o(1)$, $\lambda^{b\alpha-0,5} L = o(1)$, $t \uparrow \omega$;

6) $\omega_0 < -(a+0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\omega_0 < -(b-0{,}25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{0,5}|\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0| \notin \mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'| > 0$, $t \in \Delta$, $\lambda^{\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}+0,25\right)\alpha} L \notin \mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{\left(a+0,5+\frac{2\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha-0,5} L = o(1)$, $\lambda^{\left(b+\frac{2\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha-0,5} L = o(1)$, $t \uparrow \omega$,

де

$$c_0 = \lim_{t\uparrow\omega}(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0\right| d\tau,$$

$$\omega_0 = \sup_{t\in\Delta_0}\left|c_0 - (\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5} - \Lambda_0\right| d\tau\right|,$$

$$\Delta_0 = [T_0 + \varepsilon, \omega[\quad \textit{або} \quad \Delta_0 =]\omega, T_0 - \varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T \in [t_0, \omega[: \ \forall t \in [T, \omega[\ \ \lambda(t) > 1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T \in]\omega, t_0] : \ \forall t \in]\omega, T] \ \ \lambda(t) > 1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $UnSt_\lambda$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 9. Покажемо лише як оцінюється величина типу I^{**} з наслідку 9. Застосовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} I^{**} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\lambda^{-\left(a+0,25+\frac{c_0+\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha}}{\int_{T_0}^{t}\lambda^{\left(0,25-\frac{c_0-\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha} L\, d\tau} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\lambda'\lambda^{-\left(a+0,25+\frac{c_0+\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha-1}}{\lambda^{\left(0,25-\frac{c_0-\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha} L} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\lambda'\lambda^{-1,5}\lambda^{-\left(a+0,25+\frac{c_0+\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha+0,5}}{\lambda^{\left(0,25-\frac{c_0-\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha} L} =$$

$$= \Lambda_0 \lim_{t\uparrow\omega}\lambda^{-\left(a+0,25+\frac{2\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha+0,5} L^{-1} = \infty\,\mathrm{sgn}\,\Lambda_0.$$

***Наслідок* 12.** *Якщо у д. р.* (1)

$$\lambda(\omega) = 0, \quad \lambda'\lambda^{-1,5} = \Lambda_0 + o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad |\Lambda_0| \in]0, 4[\,,$$

то для будь-яких $a, b \in \mathbf{R}$, *що задовольняють одну з умов:*

1) $c_0-\omega_0 > -(a+0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $c_0-\omega_0 > -(b-0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{\left(\frac{c_0-\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}-0,25\right)\alpha-\frac{1}{2}}L\in\mathbf{L}_\Delta$;

2) $a>-0,25$, $b>0,25$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0)$, $\lambda^{-0,25\alpha-0,5}L\in\mathbf{L}_\Delta$;

3) $\omega_0<(a+0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\omega_0<(b-0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{0,5}|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0|\notin\mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'|>0$, $t\in\mathbf{\Delta}$, $\lambda^{-\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}+0,25\right)\alpha-0,5}L\in\mathbf{L}_\Delta$;

4) $c_0-\omega_0>-(a+0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $c_0-\omega_0>-(b-0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{-\left(\frac{\omega_0+c_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}+0,25\right)\alpha-0,5}L\notin\mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{\left(a-\frac{2\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha-1}L=o(1)$, $\lambda^{\left(b-0,5-\frac{2\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha-1}L = o(1)$, $t\uparrow\omega$;

5) $a>-0,25$, $b>0,25$, $\lambda^{0,5}(\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0)\in\mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{-(0,25\alpha+0,5)}L\notin\mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{a\alpha-0,5}L=o(1)$, $\lambda^{(b-0,25)\alpha-1}L=o(1)$, $t\uparrow\omega$;

6) $\omega_0>-(a+0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\omega_0>-(b-0,25)\sqrt{16-\Lambda_0^2}$, $\lambda^{0,5}|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0|\notin\mathbf{L}_\Delta$, $|\lambda'|>0$, $t\in\mathbf{\Delta}$, $\lambda^{-\left(\frac{\omega_0+c_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}+0,25\right)\alpha-0,5}L\notin\mathbf{L}_\Delta$, $\lambda^{\left(a-\frac{2\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha-1}L=o(1)$, $\lambda^{\left(b-0,5-\frac{2\omega_0}{\sqrt{16-\Lambda_0^2}}\right)\alpha-1}L=o(1)$, $t\uparrow\omega$,

де

$$c_0 = \lim_{t\uparrow\omega}(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0\right|d\tau,$$

$$\omega_0 = \sup_{t\in\Lambda_0}\left|c_0-(\ln\lambda)^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda^{0,5}\left|\lambda'\lambda^{-1,5}-\Lambda_0\right|d\tau\right|,$$

$$\mathbf{\Delta}_0 = [T_0+\varepsilon,\omega[\quad \textit{або} \quad \mathbf{\Delta}_0 =]\omega, T_0-\varepsilon],$$

$$T_0 = \inf\{T\in[t_0,\omega[:\ \forall t\in[T,\omega[\ \ \lambda(t)<1\}$$

або

$$T_0 = \sup\{T\in]\omega,t_0]:\ \forall t\in]\omega,T]\ \ \lambda(t)<1\},$$

ε — *досить мале додатне число, воно має властивість* $UnSt_\lambda$, *коли* $t\uparrow\omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 11.

Зауваження 2. Якщо, наприклад, у д. р. (1) $\omega=+\infty$, $\Lambda_0=-4$, $\lambda = 0,25t^{-2}[1+\beta(t)]$, $\beta(t)=o(1)$, $t\uparrow\omega$, то заміною $t=\exp x$, $y=\sqrt{\exp x}z$ його можна звести до д. р. вигляду

$$z''(x)+\beta(\exp x)z(x) = F(x,z,z'),$$

до якого можна застосувати одержані результати, коли $\beta(\exp x)>0$.

Зауваження 3. При дослідженні існування сім'ї зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків д. р. (1) для задач вказаного типу застосування класичного означення стійкості за Ляпуновим не завжди обґрунтоване. Оскільки д. р. вищого порядку зводиться до диференціальної системи, яка потім досліджується на стійкість, то це призводить до накладання досить жорстких умов мализни на похідні розв'язків даного д. р., що не обов'язково. Наведемо приклад д. р., всі розв'язки якого зникаючі, хоча їхні похідні необмежено зростають, коли $t \uparrow \omega$.

Приклад 3. Нехай д. р. (1) має вигляд

$$y'' + 4t^2\left(1 - \frac{3}{16t^4}\right)y = 0,$$

де $t_0 > 2^{-1}3^{1/4}$, $\omega = +\infty$, $L \equiv 0$. Легко перевірити, що воно має загальний розв'язок

$$y(t, C_1, C_2) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(C_1 \sin t^2 + C_2 \cos t^2\right),$$

тобто

$$y(t; C_1, C_2) = o(1), \qquad t \to +\infty,$$

тоді як його похідна

$$y'(t, C_1, C_2) = 2\sqrt{t}\left[\left(C_1 - \frac{1}{4t^2}C_2\right)\cos t^2 - \left(C_2 + \frac{1}{4t^2}C_1\right)\sin t^2\right]$$

необмежено зростає, коли $t \to +\infty$. В той же час при $a \in [-1/4, +\infty[$, $b \in [1/4, +\infty[$ нульовий розв'язок цього д. р. є λ-стійким, коли $t \to +\infty$.

1. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
2. *Ляпунов А. М.* Об одном вопросе, касающемся дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 2-я сер. – 1896. – **5**, № 3 – 6. – С. 190 – 254.
3. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. – Минск: Наука, 1963. – 272 с.
4. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
5. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 290 с.
6. *Павлюк І. А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970. – 280 с.
7. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
8. *Perron O.* Über Stabilitat und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungensystemen // Math. Z. – 1928. – S. 129 – 160.
9. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды по механике и математике. – М.: Гостехиздат, 1954. – 589 с.

Одержано 05.07.2000