УДК 517.5

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Латышев (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

We pose and solve an extremal problem in the theory of logarithmic potentials that is dual to the principal minimum-problem of the theory of interior capacities of condensers but, in contrast to the last one, is solvable even in the case of a nonclosed condenser. Its solution is a natural generalization of the classical notion of interior equilibrium measure of a set. A condenser is treated as a finite collection of signed sets such that the closures of sets with opposite signs are mutually disjoint. Several assertions on continuity of extremals are also proved.

Знайдено постановку та розв'язано екстремальну задачу теорії логарифмічного потенціалу, яка є дуальною до основної мінімум-проблеми теорії внутрішніх ємностей конденсаторів, але, на відміну від останньої, розв'язна навіть для незамкнених конденсаторів. Її розв'язок є природним узагальненням на випадок конденсатора класичного поняття внутрішньої рівноважної міри множини. Конденсатор трактується як скінченна сукупність множин, кожній з яких приписано знак + або −, причому замикання різнознакових множин попарно диз'юнктні. Доведено також ряд тверджень про неперервність екстремалей.

Введение. В [1 – 3] построена теория внутренних емкостей конденсаторов в локально компактном пространстве $\mathbf{X}$. При этом *ядро* κ на $\mathbf{X}$ определяется как полунепрерывная снизу функция $\kappa\colon \mathbf{X}\times\mathbf{X}\to(-\infty,\infty]$, на которую в процессе исследования накладываются определенные дополнительные условия, а понятие конденсатора трактуется в обобщенном смысле (см. п. 1 настоящей работы).

В настоящей работе утверждения из [1 – 3] применяются для получения новых результатов о внутренних емкостях конденсаторов в случае, который всюду далее предполагаем выполненным: $\mathbf{X}$ — компактное подпространство плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ и

$$\kappa(x,y) := \log\frac{1}{|x-y|},\quad x,\ y\in\mathbf{X}.$$

Интерес к этому случаю обусловлен известными специфическими особенностями логарифмической теории потенциала (см., например, [4]), а также его приложениями в теории рациональных аппроксимаций аналитических функций [5].

Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\mathbf{X})$ обозначает линейное пространство всех вещественных мер Радона на пространстве $\mathbf{X}$, снабженное топологией *широкой* сходимости. Необходимые сведения из теории мер Радона содержатся в [6] (см. также краткие обзоры в [1, 7]).

Обозначим $\nu(1):=\nu(\mathbf{X})$, $\nu\in\mathfrak{M}$. Через $\mathfrak{M}^+(Q)$ (Q — множество в $\mathbf{X}$) обозначим класс всех неотрицательных мер (Радона) ν, *сосредоточенных* на Q, а через $\mathfrak{M}^+(Q,1)$ — множество всех $\nu\in\mathfrak{M}^+(Q)$ с $\nu(1)=1$.

Через $\kappa(x,\nu)$, $\kappa(\nu,\nu)$ и $\kappa(\nu_1,\nu_2)$ обозначим соответственно *потенциал* меры $\nu\in\mathfrak{M}$ в точке $x\in\mathbf{X}$, ее *энергию* и *взаимную энергию* мер $\nu_1,\nu_2\in\in\mathfrak{M}$ относительно ядра κ, если они определены [4, с. 80, 103; 7].

1. Основные понятия. Зафиксируем $m,\ p\in\mathbb{N}$, $m\le p$, и обозначим

$$I := \{1,\dots,p\},\qquad I' := \{1,\dots,m\},\qquad I'' := I\setminus I'.$$

Упорядоченную совокупность $\mathcal{A} := (A_i)_{i\in I}$ произвольных непустых множеств $A_i\subset\mathbf{X}$, $i\in I$, назовем (m,p)-*конденсатором* (или просто конденсатором), если выполнено условие

$$\overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \varnothing \quad \forall\, i \in I', \;\; j \in I''.$$

Никакие ограничения на топологию взаимного расположения множеств $i \in I'$, или A_i, $i \in I''$, не накладываются.[1]

Конденсатор $\mathcal{A}$ назовем *замкнутым* (*универсально измеримым*), если A_i, $i \in I$, замкнуты (соответственно, универсально измеримы).

Пусть $a = (a_i)_{i \in I}$ — числовой вектор, удовлетворяющий одной из следу щих систем условий:

$$a_i > 0 \quad \forall\, i \in I', \qquad a_i < 0 \quad \forall\, i \in I'',$$

$$a_i < 0 \quad \forall\, i \in I', \qquad a_i > 0 \quad \forall\, i \in I''.$$

Через $\mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)$ обозначим класс всех $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$, представимых в виде

$$\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu^i,$$

где μ^i, $i \in I$, — мера из класса $\mathfrak{M}^+(A_i, 1)$. Заметим, что отображение

$$\mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a) \ni \mu \;\; \mapsto \;\; (\mu^i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+(A_i, 1),$$

определенное разложением (2), вообще говоря, не однозначно; для его од значности необходимо и достаточно условие $A_i \cap A_j = \varnothing \;\; \forall\, i \neq j, \;\; i, \; j \in I$.

Обозначим

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \;:=\; \inf_{\mu \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)} \kappa(\mu, \mu).$$

(В (3) рассматриваются только меры μ, энергия $\kappa(\mu, \mu)$ которых определе Инфимум по пустому множеству полагаем равным $+\infty$.) Очевидно,

$$w_\kappa(\mathcal{A}, qa) = q^2 w_\kappa(\mathcal{A}, a) \qquad \forall\, q \in (-\infty, \infty), \quad q \neq 0.$$

При условии $w_\kappa(\mathcal{A}, a) \neq 0$ обозначим

$$c_{\mathcal{A}} \;:=\; \operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a) \;:=\; \frac{1}{w_\kappa(\mathcal{A}, a)};$$

$\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a)$ назовем (внутренней) *емкостью* конденсатора $\mathcal{A}$ (относителі логарифмического ядра κ и вектора распределения масс a). При $I = \{$ $a_1 = 1$ величина $\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a)$ известна под названием *винеровой емкости* м жества A_1 [4]; для ее обозначения будем использовать также символ $\operatorname{cap}_\kappa A$

***Замечание* 1.** Этому подходу к определению емкости конденсатора со ветствует следующая электростатическая модель: конденсатор $\mathcal{A}$ рассмат вается как система заряженных слоев-проводников A_i, $i \in I$, каждый из ко рых отделен от других диэлектриком, не позволяющим помещенному на A_i ряду $a_i \mu^i$ перераспределяться на другие слои-проводники A_j, $j \neq i$ (даж случае их наложения на A_i).

2. Постановка задачи. Для произвольного множества $Q \subset \mathbf{X}$ обозначим

$$r_Q \;:=\; \frac{1}{2} \sup_{x, y \in Q} |x - y|;$$

в случае $Q = \mathbf{X}$ индекс в данном обозначении опускаем.

[1] Первые известные авторам исследования в экстремальных задачах теории потенци конденсаторов с пересекающимися „пластинами" относятся к фундаментальному тр М. Оцуки [8].

Для конденсатора $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ и вектора $a = (a_i)_{i \in I}$ (см. п. 1) обозначим

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i, \qquad \hat{a} := \sum_{i \in I} a_i .$$

Экстремальная характеристика $w_\kappa(\mathcal{A}, a)$ неотрицательна, если либо $\hat{a} = 0$, либо $r_A \le 1$ [4] (теорема 1.16); в других случаях $w_\kappa(\mathcal{A}, a)$ (и $\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a)$) может принимать строго отрицательные значения (ср. с [4, с. 107]). Тем не менее, справедлива оценка

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \ \ge\ -\ \hat{a}^2 \log r_A \quad (> -\infty),$$

и поэтому в случае $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < \infty$ имеет смысл вариационная задача о существовании и единственности меры $\lambda_* \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)$ с минимальной в этом классе энергией:

$$\kappa(\lambda_*, \lambda_*) \ =\ w_\kappa(\mathcal{A}, a).$$

Указанную минимум-проблему назовем $(\mathcal{A}, a, k)_*$*-задачей.*

Если конденсатор $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ замкнут, то минимизирующая в $(\mathcal{F}, a, k)_*$-задаче мера λ_* существует для любого a (см. теоремы 2.6 и 2.30 из [8], взятые при надлежащих значениях входящих в них параметров)[2]. Доказательство этого утверждения основано на широкой компактности класса $\mathfrak{M}_*(\mathcal{F}, a)$. Если же $\mathcal{A}$ не замкнут, то класс $\mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)$ не компактен в широкой топологии и, вообще говоря, не содержит минимизирующей меры. Указанный факт неразрешимости $(\mathcal{A}, a, k)_*$-задачи справедлив уже в случае $I = \{1\}$ [4].

Основная цель настоящей работы состоит в нахождении постановки и решении вариационной задачи, которая была бы дуальной с $(\mathcal{A}, a, k)_*$-задачей, но, в отличие от последней, была бы разрешимой в случае незамкнутого $\mathcal{A}$. Формулировка и решение такой задачи приведены в п. 3 (см. теорему 2). Ее решение является естественным обобщением на случай конденсатора классического понятия внутренней равновесной меры множества (см. теорему 1 настоящей работы; ср. с теоремой 2.6′ из [4]).

Доказан также ряд утверждений о непрерывности экстремалей и экстремальных характеристик при монотонных аппроксимациях конденсаторов.

Обозначим $\overline{\mathcal{A}} := (\overline{A}_i)_{i \in I}$. Вследствие условия (1) $\overline{\mathcal{A}}$ — (замкнутый) (m, p)-конденсатор.

Прежде чем сформулировать основные результаты работы, отметим следующее элементарное свойство внутренней емкости конденсатора.

Лемма 1. *При выполнении одного из следующих условий*:

a) $\hat{a} = 0$,

b) $r_A < 1$

справедливы соотношения

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \ >\ 0, \qquad \operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a) \ >\ 0.$$

Доказательство. Согласно упомянутому выше результату из [8], существует $\lambda_* \in \mathfrak{M}_*(\overline{\mathcal{A}}, a)$ с $\kappa(\lambda_*, \lambda_*) = w_\kappa(\overline{\mathcal{A}}, a)$. Применяя теорему 1.16 из [4] к (ненулевой) мере λ_*, вследствие условия a) или b) получаем $w_\kappa(\overline{\mathcal{A}}, a) > 0$. Отсюда и из очевидного неравенства $w_\kappa(\mathcal{A}, a) \ge w_\kappa(\overline{\mathcal{A}}, a)$ следует утверждение леммы.

3. Основные результаты. Всюду далее будем предполагать, что емкость $c_{\mathcal{A}} = \operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a)$ определена и отлична от нуля. Справедливы следующие утверждения.

---

[2] Это утверждение можно несколько обобщить, использовав лемму 4.5 из [1] (см. теорему 7.1′ из [2]).

Теорема 1 (ср. с теоремой 2.6′ из [4]). *Пусть $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ — произвольный конденсатор с $c_{\mathcal{A}} = \operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a) \neq 0$. Существуют и единственны мера $\theta \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ и набор чисел $\tau_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\kappa(\theta, \theta) = c_{\mathcal{A}}, \tag{5}$$

$$\theta(1) = \hat{a}c_{\mathcal{A}}, \tag{6}$$

$$a_i\kappa(x, \theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}} \geq \tau_i \operatorname{sign} c_{\mathcal{A}} \quad \textit{пр. вс. в } A_i, \quad i \in I,^3 \tag{7}$$

$$\sum_{i\in I} \tau_i = 1. \tag{8}$$

Существуют меры $\theta^i \in \mathfrak{M}^+(\overline{A}_i, 1)$, $i \in I$, такие, что θ представима в виде

$$\theta = c_{\mathcal{A}} \sum_{i\in I} a_i\theta^i, \tag{9}$$

а потенциал $\kappa(x, \theta)$ для каждого $i \in I$ имеет следующие свойства:

$$\kappa(x, \theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}}\, a_i \geq \kappa(\theta^i, \theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}}\, a_i \quad \textit{пр. вс. в } A_i, \tag{10}$$

$$\kappa(x, \theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}}\, a_i \leq \kappa(\theta^i, \theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}}\, a_i \quad \forall x \in \operatorname{supp}\theta^i, \tag{11}$$

$$\kappa(x, \theta) = \kappa(\theta^i, \theta) \quad \theta^i\textit{-почти всюду в } \mathbf{X}. \tag{12}$$

При этом выполняется

$$\tau_i = a_i\kappa(\theta^i, \theta) \qquad \forall i \in I. \tag{13}$$

Замечание 2. При условии $\overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$ меры $c_{\mathcal{A}} a_i\theta^i$, $i \in I$, удовлетворяющие условиям (9)–(12), определяются единственным образом как сужения θ на $\overline{A}_i$. Элементарные примеры показывают, что в общем случае произвольного $\mathcal{A}$ указанное в теореме 1 разложение меры θ не единственно.

Меру $\theta_{\mathcal{A}} := \theta$ будем называть *внутренним емкостным распределением*, ассоциированным с $\mathcal{A}$, а числа $\tau_i(\mathcal{A}) := \tau_i$, $i \in I$, — *внутренними емкостными константами* для $\mathcal{A}$. Эти определения корректны в силу утверждения единственности из теоремы 1.

Через $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{A}, a, \kappa}$ обозначим класс всех $\nu \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ с общей массой

$$\nu(1) = \hat{a}c_{\mathcal{A}} \tag{14}$$

таких, что существуют числа $\tau_i(\nu)$, $i \in I$, удовлетворяющие условиям

$$a_i\kappa(x, \nu)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}} \geq \tau_i(\nu)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}} \quad \text{пр. вс. в } A_i,\ i \in I, \tag{15}$$

$$\sum_{i\in I} \tau_i(\nu) = 1. \tag{16}$$

Из теоремы 1 следует, что класс Γ не пуст: ему принадлежит внутреннее емкостное распределение $\theta_{\mathcal{A}}$. Заметим также, что класс Γ выпуклый.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный конденсатор с $\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a) \neq 0$. Справедливо тождество*

[3] Говорят, что утверждение $R(x)$, содержащее переменную точку x, выполняется *приблизительно всюду* (пр. вс.) в $Q \subset \mathbf{X}$, если множество тех $x \in Q$, где $R(x)$ ложно, имеет нулевую внутреннюю винерову емкость [4].

$$\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a) = \inf_{\nu\in\Gamma} \kappa(\nu, \nu). \tag{17}$$

Вариационная задача о минимуме энергии $\kappa(\nu, \nu)$ *в классе* Γ *имеет решение, притом единственное; им является внутреннее емкостное распределение* $\theta_{\mathcal{A}}$.

***Замечание* 3.** В случае $r_A < 1$ утверждение единственности из теоремы 1 и теорема 2 останутся в силе, если в их формулировках опустить соответственно условия (6) и (14).

При фиксированных m и p на множестве всех конденсаторов в $\mathbf{X}$ введем структуру частичного упорядочения отношением $\prec$, где, по определению, $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' := (A_i')_{i\in I}$, если $A_i \subset A_i'$ $\forall i \in I$. Очевидно, $w_\kappa(\cdot, a)$ — невозрастающая функция конденсатора.

Для монотонных семейств конденсаторов справедливы следующие утверждения о непрерывности внутренних емкостей, соответствующих им внутренних емкостных распределений и констант.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{A}_n = (A_i^n)_{i\in I}$, $n \in \mathbb{N}$, — *последовательность универсально измеримых конденсаторов, возрастающая к* $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_n \prec \mathcal{A}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n \quad \forall i \in I.$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}_n, a) = \operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a), \tag{18}$$

$$\theta_{\mathcal{A}_n} \to \theta_{\mathcal{A}} \quad \textit{широко}, \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(\theta_{\mathcal{A}_n} - \theta_{\mathcal{A}}, \theta_{\mathcal{A}_n} - \theta_{\mathcal{A}}) = 0, \tag{20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_i(\mathcal{A}_n) = \tau_i(\mathcal{A}) \quad \forall i \in I. \tag{21}$$

***Замечание* 4.** Если выполнено одно из условий $\hat{a} = 0$, $r_A \le 1$, то знак предела в соотношении (18) можно заменить знаком точной верхней грани.

***Замечание* 5.** Теорема 3 останется в силе, если возрастающую последовательность универсально измеримых конденсаторов заменить на направленное по отношению $\prec$ семейство всех замкнутых конденсаторов $\mathcal{F} \prec \mathcal{A}$.

Всюду далее S обозначает направленное множество [9, 10].

Теорема 4. *Утверждение теоремы 3 останется в силе, если возрастающую последовательность универсально измеримых конденсаторов заменить на направленность замкнутых конденсаторов* $\mathcal{F}_s = (F_i^s)_{i\in I}$, $s \in S$, *убывающую к* $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$:

$$\mathcal{F}_{s'} \prec \mathcal{F}_s \quad \forall s' \ge s, \qquad F_i = \bigcap_{s\in S} F_i^s \quad \forall i \in I.$$

4. Вспомогательное ядро. Из приведенных ниже лемм 2, 3 и теоремы 5 следует, что в случае $r < 1$ к ядру κ применима теория из [1 – 3]. В этом случае результаты настоящей работы являются конкретизацией соответствующих результатов из [1 – 3]. Если же $r \ge 1$, то многие утверждения доказываются по следующей схеме (ср. с [4]). Экстремальные задачи теории логарифмического потенциала заменяются эквивалентными им задачами для функционала

$$\iint \log \frac{R}{|x - y|}\, d\nu(x) d\nu(y),$$

где $R \in (r, \infty)$ — фиксированное число, и утверждения из [1–3] применяются к ядру

$$\kappa_R(x, y) := \log \frac{R}{|x-y|}, \qquad x, y \in \mathbf{X}.$$

Возможность такого применения следует из приведенных ниже лемм 2, 3 и теоремы 5. Обозначим

$$\kappa_{\mathbf{X}} := \begin{cases} \kappa, & \text{если } r < 1; \\ \kappa_R, & \text{если } r \geq 1. \end{cases}$$

Определения и обозначения всех исследуемых объектов для ядра κ_R $(\kappa_{\mathbf{X}})$ получаются из определений и обозначений соответствующих объектов для κ заменой κ на κ_R $(\kappa_{\mathbf{X}})$. Очевидно, справедливы тождества

$$\kappa_R(x, \nu) = \kappa(x, \nu) + \nu(1) \log R, \qquad x \in \mathbf{X}, \quad \nu \in \mathfrak{M}, \tag{22}$$

$$\kappa_R(\nu_1, \nu_2) = \kappa(\nu_1, \nu_2) + \nu_1(1)\nu_2(1) \log R, \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}, \tag{23}$$

$$\kappa_R(\nu, \nu) = \kappa(\nu, \nu) + \nu(1)^2 \log R, \qquad \nu \in \mathfrak{M}, \tag{24}$$

$$w_{\kappa_R}(\mathcal{A}, a) = w_\kappa(\mathcal{A}, a) + \hat{a}^2 \log R. \tag{25}$$

Лемма 2. *Ядро* $\kappa_{\mathbf{X}}$ *строго положительно определено, регулярно и удовлетворяет принципу максимума Фростмана.*

По поводу определений используемых в лемме 2 понятий см., например, [4].

Доказательство. Согласно классическим результатам (см. соответственно теоремы 1.6, 1.7 и 1.16 из [4]), ядро κ удовлетворяет принципу максимума Фростмана, регулярно и в случае $r < 1$ строго положительно определено. Вследствие принятых определений и тождества (22) отсюда получаем требуемое.

Следствие 1. *Условие* $\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a) \neq 0$ *равносильно следующему условию*:

$$\operatorname{cap}_\kappa A_i \neq 0 \qquad \forall\, i \in I. \tag{26}$$

Доказательство. В силу положительной определенности ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ к нему применимы оба утверждения леммы 4.3 из [1], откуда следует равносильность указанных в следствии 1 условий с $\kappa_{\mathbf{X}}$ вместо κ. Чтобы получить требуемое, достаточно воспользоваться следующим вытекающим из (25) соотношением:

$$\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{A}, a) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{cap}_{\kappa_{\mathbf{X}}}(\mathcal{A}, a) \neq 0. \tag{27}$$

Замечание 6. Из соотношения (27) при $I = \{1\}$, $a_1 = 1$ следует, что понятия приблизительно всюду относительно ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ и, соответственно, относительно κ совпадают. Этот факт часто используется в дальнейшем без дополнительных оговорок.

5. Топологии. Теорема о полноте. Вследствие строгой положительной определенности ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ множество всех $\nu \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ с $\kappa(\nu, \nu) < \infty$ (или, что в силу (24) равносильно, с $\kappa_{\mathbf{X}}(\nu, \nu) < \infty$) образует (см. [7]) предгильбертово пространство $\mathcal{E}$ над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением и нормой, определенными соответственно равенствами

$$(\nu_1, \nu_2) := \kappa_{\mathbf{X}}(\nu_1, \nu_2), \qquad \|\nu\| := \sqrt{\kappa_{\mathbf{X}}(\nu, \nu)}.$$

Топологии в $\mathcal{E}$, задаваемые соответственно нормой $\|\cdot\|$ и конечными семействами полунорм $|\kappa_{\mathbf{X}}(\cdot, \mu_j)|$, $\mu_j \in \mathcal{E}$, называются *сильной* и *$\mathcal{E}$-слабой* топологиями. Из неравенства Коши – Буняковского

$$|\kappa_{\mathbf{X}}(\nu_1,\nu_2)| \le \|\nu_1\|\|\nu_2\| \quad \forall\, \nu_1,\nu_2\in\mathcal{E}$$

непосредственно следует, что сильная топология в $\mathcal{E}$ сильнее $\mathcal{E}$-слабой топологии.

Обозначим $\mathcal{E}^+ := \mathcal{E}\cap\mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$. След сильной и $\mathcal{E}$-слабой топологий на $\mathcal{E}^+$ назовем соответственно сильной и $\mathcal{E}$-слабой топологиями на $\mathcal{E}^+$.

Лемма 3. *Если направленность $(\nu_s)_{s\in S}\subset\mathcal{E}^+$ сильно ограничена и широко сходится к мере ν, то $\nu\in\mathcal{E}^+$ и $(\nu_s)_{s\in S}$ сходится к ν $\mathcal{E}$-слабо.*

***Замечание* 7.** В терминологии работы [7] лемма 3 означает, что ядро $\kappa_{\mathbf{X}}$ удовлетворяет условию (CW).

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1.1 из [8] (см. также [7], п. 3.4), любое регулярное положительно определенное ядро на произвольном компактном пространстве удовлетворяет условию (CW). Учитывая лемму 2, получаем требуемое.

Применяя результаты работы [7], из строгой положительной определенности ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ и свойства (CW) выводим следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пространство $\mathcal{E}^+$ сильно полно, причем сильная топология в нем сильнее индуцированной широкой топологии.*

***Замечание* 8.** В терминологии работы [7] (см. также [4, с. 449]) следствие 2 означает, что ядро $\kappa_{\mathbf{X}}$ *совершенно*.

Для конденсатора $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ обозначим

$$A' := \bigcup_{i\in I'} A_i, \qquad A'' := \bigcup_{i\in I''} A_i.$$

Всюду до конца этого пункта будем предполагать, что $\mathcal{A}$ замкнут. Через $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ обозначим конус в $\mathcal{E}$, состоящий из всех $\nu\in\mathcal{E}$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{supp}\nu^+ \subset A', \qquad \operatorname{supp}\nu^- \subset A''$$

(ν^+ и ν^- — соответственно положительная и отрицательная части канонического разложения меры ν). Вследствие условия (26) конус $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ не пуст. Норма пространства $\mathcal{E}$ задает в $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ структуру метрического пространства. Для его обозначения сохраним символ $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$, а его топологию (являющуюся следом сильной топологии пространства $\mathcal{E}$) назовем сильной топологией.

Теорема 5. *Для каждой сильно фундаментальной направленности $(\nu_s)_{s\in S}\subset\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ существует и единственна мера $\nu_0\in\mathfrak{N}(\mathcal{A})$, являющаяся ее сильным и широким пределом. Кроме того, выполняется*

$$\lim_{s\in S}\kappa(\nu_s-\nu_0,\ \nu_s-\nu_0) = 0. \tag{28}$$

При доказательстве теоремы 5 используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 4. *Вариационная задача о минимуме энергии $\kappa_{\mathbf{X}}(\nu,\nu)$ в классе всех $\nu\in\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ с $\nu(A') = 1$ имеет решение $\tilde\nu$, притом единственное. Справедливы соотношения*

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x,\tilde\nu) \ge \kappa_{\mathbf{X}}(\tilde\nu,\tilde\nu) \qquad \textit{пр. вс. в } A', \tag{29}$$

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x,\tilde\nu) \le \kappa_{\mathbf{X}}(\tilde\nu,\tilde\nu) \qquad \forall\, x\in\operatorname{supp}\tilde\nu^+, \tag{30}$$

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x,\tilde\nu) \le 0 \qquad \textit{пр. вс. в } A'', \tag{31}$$

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x, \tilde{\nu}) \geq 0 \qquad \forall x \in \operatorname{supp} \tilde{\nu}^-, \tag{32}$$

причем

$$\kappa_{\mathbf{X}}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}) > 0. \tag{33}$$

Доказательство. Единственность решения доказывается стандартным методом (см., например, [4, с. 169]) с использованием выпуклости класса допустимых мер, строгой положительной определенности ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ и правила параллелограмма в $\mathcal{E}$.

Докажем существование решения. Для каждой меры $\mu \in \mathfrak{M}^+(A', 1) \cap \mathcal{E}$ обозначим через $P\mu$ ее ортогональную проекцию на выпуклый конус $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}(A'') := \mathfrak{M}^+(A'') \cap \mathcal{E}$ (см., например, [10, с. 140]). Проекция $P\mu$ существует и единственна вследствие теоремы 1.12.3 из [10] и сильной полноты подпространства $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}(A'')$ пространства $\mathcal{E}$, которая в свою очередь вытекает из совершенности ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ (см. следствие 2) и широкой замкнутости $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}(A'')$. Аналогично леммам 13.4 и 13.5 из [3] выполняются

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x, \mu - P\mu) \leq 0 \qquad \text{пр. вс. в } A'', \tag{34}$$

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x, \mu - P\mu) \geq 0 \qquad \forall x \in \operatorname{supp} P\mu. \tag{35}$$

Используя соотношения (34), (35), принцип максимума Фростмана для ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ и рассуждая, как при доказательстве леммы 13.6 из [3], получаем

$$P\mu(1) \leq 1 \qquad \forall \mu \in \mathfrak{M}^+(A', 1) \cap \mathcal{E}.$$

Отсюда заключаем, что экстремали исследуемой в лемме 4 вариационной задачи не изменятся, если сузить класс допустимых мер ν посредством дополнительного условия $\nu^-(1) \leq 1$. А поскольку полученный в результате класс допустимых мер широко компактен, то теперь существование решения $\tilde{\nu}$ может быть доказано стандартными методами (см., например, [11, 12]) с использованием непрерывности $\kappa_{\mathbf{X}}$ на компактном множестве $A' \times A''$ и широкой полунепрерывности снизу функционала $\kappa_{\mathbf{X}}(\nu, \nu)$ на конусе $\mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$.

Вследствие определения ортогональной проекции и единственности решения $\tilde{\nu}$ справедливо тождество $\tilde{\nu}^- = P(\tilde{\nu}^+)$. Применяя (34) и (35), получаем (31) и (32). Следовательно (см. лемму 5.2 из [1]), $\tilde{\nu}^-$-почти всюду в $\mathbf{X}$ выполняется $\kappa_{\mathbf{X}}(x, \tilde{\nu}) = 0$ и поэтому справедливы тождества $\kappa_{\mathbf{X}}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}^-) = 0$, $\kappa_{\mathbf{X}}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}^+) = \kappa_{\mathbf{X}}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu})$. Учитывая последнее равенство и минимальность меры $\tilde{\nu}$, с помощью рассуждений, аналогичных доказательству теорем 5.1 и 5.2 из [1], получаем (29) и (30) (ср. с теоремами 13.1 и 13.2 из [3]). Наконец, (33) следует из соотношения $\tilde{\nu} \neq 0$ в силу строгой положительной определенности $\kappa_{\mathbf{X}}$.

Лемма 4 доказана.

Обозначим $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$, $\nu \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{R}$ — сильно ограниченное подмножество пространства $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$, то множество $\{|\nu|(1), \nu \in \mathfrak{R}\}$ ограничено в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\nu}$ — мера, однозначно определенная леммой 4, а $\tilde{\nu}'$ — решение вариационной задачи, полученной из рассмотренной в лемме 4 взаимной заменой A' и A''. Из (33) и аналогичного соотношения для $\tilde{\nu}'$ заключаем, что мера

$$\tilde{\nu}_* := \frac{\tilde{\nu}}{\|\tilde{\nu}\|^2} - \frac{\tilde{\nu}'}{\|\tilde{\nu}'\|^2}$$

принадлежит $\mathcal{E}$. Из (29), (31), (33) и аналогичных соотношений для $\tilde{\nu}'$ получаем

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x, \tilde{\nu}_*) \geq 1 \quad \text{пр. вс. в } A',$$

$$\kappa_{\mathbf{X}}(x, \tilde{\nu}_*) \leq -1 \quad \text{пр. вс. в } A''.$$

Вследствие леммы 5.2 из [1] неравенства в этих соотношениях выполняются соответственно ν^+- и ν^--почти всюду в $\mathbf{X}$ для каждого $\nu \in \mathfrak{N}(\mathcal{A})$. Интегрируя их соответственно относительно ν^+ и $-\nu^-$, а затем складывая и применяя к $\kappa_{\mathbf{X}}(\nu, \tilde{\nu}_*)$ неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$|\nu|(1) \leq \|\nu\| \|\tilde{\nu}_*\| \qquad \forall \nu \in \mathfrak{N}(\mathcal{A}),$$

откуда следует требуемое.

Доказательство теоремы 5 основано на результатах работы [2], лемме 3 и следствии 3.

Зафиксируем сильно фундаментальную направленность $(\nu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{N}(\mathcal{A})$. Не ограничивая общности доказательства, будем считать ее сильно ограниченной. Тогда согласно следствию 3 выполняется

$$\sup_{s\in S} |\nu_s|(1) < \infty. \tag{36}$$

Следовательно, направленность $(\nu_s)_{s\in S}$ широко ограничена и поэтому [6, с. 76] широко относительно компактна. Применяя теорему 6.1 из [2], для каждой ее широкой предельной точки ν_0 получаем

$$\operatorname{supp} \nu_0^+ \subset A', \qquad \operatorname{supp} \nu_0^- \subset A''. \tag{37}$$

Ядро $\kappa_{\mathbf{X}}$ удовлетворяет условию (CW) (см. лемму 3), а его сужение на $A' \times A''$ ограничено. На основании леммы 9.7 из [2] отсюда заключаем, что $\kappa_{\mathbf{X}}$ $\mathcal{A}$-согласованно (см. определение 9.3 из [2]). Согласно свойству $\mathcal{A}$-согласованности, из сильной фундаментальности направленности $(\nu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{N}(\mathcal{A})$ и соотношения (36) следует, что для любой ее широкой предельной точки ν_0 выполняется $\nu_0 \in \mathcal{E}$ (и поэтому вследствие (37) $\nu_0 \in \mathfrak{N}(\mathcal{A})$) и $\nu_s \to \nu_0$ сильно.

В силу строгой положительной определенности ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$ ν_0 — единственный сильный предел направленности $(\nu_s)_{s\in S}$ и поэтому, как следует из приведенных выше рассуждений, ее единственная широкая предельная точка. Вследствие широкой относительной компактности множества $\{\nu_s, s \in S\}$ и отделимости широкой топологии отсюда заключаем (см. [13, с. 126]), что ν_0 — широкий предел $(\nu_s)_{s\in S}$.

Из широкой сходимости $(\nu_s)_{s\in S}$ к ν_0 и компактности пространства $\mathbf{X}$ находим

$$\nu_0(1) = \lim_{s\in S} \nu_s(1).$$

Применяя к $\nu_s - \nu_0$, $s \in S$, тождество (24), в силу последнего соотношения и сильной сходимости $(\nu_s)_{s\in S}$ к ν_0 получаем (28). Теорема 5 доказана.

Следствие 4 (ср. со следствием 2). *Метрическое пространство $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ сильно полно, причем сильная топология в нем сильнее индуцированной широкой топологии.*

6. О допустимых мерах. Через $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ обозначим класс всех *линейных комбинаций* вида [4]

$$\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu^i, \quad \text{где} \quad \mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i, 1) \quad \forall\, i \in I.$$

Два элемента $\mu_1 = \sum_{i \in I} a_i \mu_1^i$ и $\mu_2 = \sum_{i \in I} a_i \mu_2^i$ из класса $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ *отождествляются* ($\mu_1 \equiv \mu_2$), если

$$\mu_1^i = \mu_2^i \quad \forall\, i \in I.$$

Упомянутые элементы μ_1 и μ_2 называются *эквивалентными* в $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$, если они равны в смысле равенства мер: $\mu_1 = \mu_2$. Очевидно, верна импликация

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \qquad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a);$$

она обратима в том и только в том случае, если $A_i \cap A_j = \varnothing \;\; \forall\, i \neq j$.

Между совокупностью всех классов эквивалентности в $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и классом допустимых в $(\mathcal{A}, a, k)_*$-задаче мер $\mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)$ естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие. А именно, каждой мере $\mu_* \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)$ соотносится класс эквивалентности в $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$, состоящий из всех $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ таких, что $\mu = \mu_*$.

Задачу о минимуме энергии $\kappa(\mu, \mu)$ в классе $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ назовем $(\mathcal{A}, a, k)$-*задачей*. Она эквивалентна $(\mathcal{A}, a, k)_*$-задаче, но сформулирована в терминах, более удобных для исследования экстремальных задач на конденсаторах с пересекающимися множествами A_i.

Через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, k)$ обозначим класс всех минимизирующих в $(\mathcal{A}, a, k)$-задаче мер λ. Если конденсатор $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ замкнут, то класс $\mathcal{W}(\mathcal{F}, a, k)$ не пуст. Отметим также, что вследствие соотношений (24) и (25) очевидно выполняется $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa) = \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa_X)$.

Лемма 5. *Если класс $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ не пуст, то он совпадает с некоторым классом эквивалентности в $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$.*

Доказательство. В силу строгой положительной определенности ядра κ_X и выпуклости класса $\mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)$ минимизирующая в $(\mathcal{A}, a, \kappa_X)_*$-задаче мера λ_* единственна. Мера λ_* (и только она) является минимизирующей также и в $(\mathcal{A}, a, \kappa)_*$-задаче, а соответствующий ей класс эквивалентности в $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ образует класс $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

7. Пределы минимизирующих направленностей мер и их потенциалы. Введем следующие определения.

Определение 1 (ср. с [2]). *Направленность $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$ называется сходящейся к $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$ $\mathcal{A}$-широко, если $\mu_s^i \to \mu^i$ широко для всех $i \in I$.*

Класс $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$ $\mathcal{A}$-широко компактен. Отметим также, что из $\mathcal{A}$-широкой сходимости в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$ очевидно следует широкая сходимость к тому же пределу; для справедливости обратного утверждения необходимо и достаточно условие $\overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \varnothing \;\; \forall\, i \neq j$ [2].

Определение 2. *Направленность $(\mu_s)_{s \in S}$ называется минимизирующей в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче, если выполняются следующие условия:*

$$(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a), \qquad \lim_{s \in S} \kappa(\mu_s, \mu_s) = w_\kappa(\mathcal{A}, a).$$

Пусть $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ обозначает множество всех минимизирующих в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-

[4] Ср. с определением класса $\mathfrak{M}_*(\mathcal{A}, a)$ из п. 1.

задаче направленностей, а $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa)$ — множество всех их $\mathcal{A}$-широких предельных точек. В силу $\mathcal{A}$-широкой компактности класса $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$ $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa)$ не пусто и содержится в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$.

Для мер из $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa)$ справедливы приведенные ниже леммы 6 и 7, являющиеся ключевыми в доказательстве теорем 1 – 3.

Лемма 6. *Множество* $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *содержится в некотором классе эквивалентности в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$. *Для произвольных фиксированных* $\chi \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *и* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *справедливы следующие утверждения о сходимостях:*

$$\mu_s \to \chi \quad \text{широко и сильно,} \tag{38}$$

$$\lim_{s\in S} \kappa(\mu_s - \chi, \mu_s - \chi) = 0, \tag{39}$$

$$\lim_{s\in S} \kappa(\mu_s^i, \mu_s) = \kappa(\chi^i, \chi), \quad i \in I.^5 \tag{40}$$

Для каждого $\chi \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *выполняются соотношения*

$$\kappa(\chi, \chi) = w_\kappa(\mathcal{A}, a), \tag{41}$$

$$a_i \kappa(x, \chi) \ge a_i \kappa(\chi^i, \chi) \quad \text{пр. вс. в } A_i, \ i \in I. \tag{42}$$

Справедливо следующее утверждение единственности: если $\eta_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{i\in I} \eta_i = w_\kappa(\mathcal{A}, a), \tag{43}$$

$$a_i \kappa(x, \chi) \ge \eta_i \quad \text{пр. вс. в } A_i, \ i \in I, \tag{44}$$

то

$$\eta_i = a_i \kappa(\chi^i, \chi) \quad \forall \chi \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa), \quad i \in I. \tag{45}$$

Доказательство основано на результатах работы [2], лемме 3 и теореме 5.

Вследствие (24) и (25) из принятых определений получаем

$$\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa) = \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa_\chi), \quad \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa) = \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa_\chi). \tag{46}$$

На этом основании выражение в круглых скобках в обозначениях объектов, фигурирующих в (46), будем, как правило, опускать.

Применяя результаты из [2] (п. 10) к ядру κ_χ, получаем, что каждая направленность из $\mathbb{M}$ сильно фундаментальна и, более того, для любых $(\mu_s)_{s\in S}$ и $(\mu_t)_{t\in T}$ из $\mathbb{M}$ выполняется

$$\lim_{(s,t)\in S\times T} \|\mu_s - \mu_t\| = 0,$$

где $S \times T$ — направленное произведение направленных множеств S и T. Отсюда и из теоремы 5 (либо из утверждения, полученного из теоремы 5 взаимной заменой A' и A'') заключаем, что существует и единственна мера ζ_0 такая, что для всех $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ выполняются соотношения (38) и (39) с ζ_0 вместо χ. Вследствие определения класса $\mathcal{M}'$ из широкой сходимости $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ к ζ_0 получаем

$$\chi = \zeta_0 \quad \forall \chi \in \mathcal{M}'.$$

Это доказывает соотношения (38), (39) и эквивалентность в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, a)$ мер

---

[5] Следовательно, $\kappa(\chi_1^i, \chi_1) = \kappa(\chi_2^i, \chi_2) \quad \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa), \ i \in I.$

$\chi \in \mathcal{M}'$. Кроме того, из сильной сходимости $(\mu_s)_{s\in S}$ к χ и определения 2 находим

$$\kappa_{\mathbf{X}}(\chi, \chi) = \lim_{s\in S} \kappa_{\mathbf{X}}(\mu_s, \mu_s) = w_{\kappa_{\mathbf{X}}}(\mathcal{A}, a), \tag{47}$$

что вследствие соотношений $\chi(1) = \hat{a}$, (24) и (25) доказывает (41).

Ядро $\kappa_{\mathbf{X}}$ $\mathcal{A}$-согласованно и удовлетворяет условию (CW), а его сужение на $A' \times A''$ ограничено. Отсюда и из (38) следует, что к ядру $\kappa_{\mathbf{X}}$, мере $\chi \in \mathcal{M}'$ и направленности $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ применимы теоремы 11.1, 11.2 и 11.2′ из [2]. Комбинируя их, в обозначениях настоящей работы получаем

$$a_i \kappa_{\mathbf{X}}(x, \chi) \geq a_i \kappa_{\mathbf{X}}(\chi^i, \chi) \quad \text{пр. вс. в } A_i, \quad i \in I, \tag{48}$$
$$\kappa_{\mathbf{X}}(\chi^i, \chi) = \lim_{s\in S} \kappa_{\mathbf{X}}(\mu_s^i, \mu_s) \quad \forall\, i \in I,$$

что вследствие (22), (23) и равенств

$$\chi(1) = \mu_s(1) = \hat{a}, \quad \chi^i(1) = \mu_s^i(1) = 1 \quad \forall\, i \in I, \quad s \in S,$$

доказывает (40) и (42).

Докажем утверждение единственности. Заметим, что если для η_i, $i \in I$, выполняются соотношения (43) и (44), то числа η_i', $i \in I$, определенные равенствами

$$\eta_i' := \begin{cases} \eta_i, & \text{если} \quad r < 1; \\ \eta_i + a_i \hat{a} \log R, & \text{если} \quad r \geq 1, \end{cases}$$

удовлетворяют условиям

$$\sum_{i\in I} \eta_i' = w_{\kappa_{\mathbf{X}}}(\mathcal{A}, a),$$
$$a_i \kappa_{\mathbf{X}}(x, \chi) \geq \eta_i' \quad \text{пр. вс. в } A_i, \quad i \in I.$$

Применяя утверждение единственности из теоремы 11.1 работы [2] (о правомерности такого применения см. выше), отсюда и из (48) получаем

$$\eta_i' = a_i \kappa_{\mathbf{X}}(\chi^i, \chi) \quad \forall\, \chi \in \mathcal{M}', \quad i \in I,$$

что вследствие (23) и определения η_i', $i \in I$, равносильно требуемым соотношениям (45).

Лемма 6 доказана.

Следствие 5. *Если конденсатор $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ замкнут, то справедливо тождество*

$$\mathcal{M}'(\mathcal{F}, a, \kappa) = \mathcal{W}(\mathcal{F}, a, \kappa).$$

Доказательство. Вследствие замкнутости $\mathcal{F}$ класс $\mathcal{W}(\mathcal{F}, a, \kappa)$ не пуст и согласно лемме 5 образует класс эквивалентности в $\mathfrak{M}(\mathcal{F}, a)$. Учитывая очевидное включение $\mathcal{W}(\mathcal{F}, a, \kappa) \subset \mathcal{M}'(\mathcal{F}, a, \kappa)$, отсюда и из первого утверждения леммы 6 выводим следствие 5.

Через $\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0(\mathcal{A}, a, \kappa)$ обозначим множество всех направленностей $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ таких, что существуют замкнутые конденсаторы $\mathcal{F}_s \prec \mathcal{A}$, $s \in S$, со свойством

$$\mu_s \in \mathcal{W}(\mathcal{F}_s, a, \kappa), \qquad s \in S.$$

Множество $\mathbb{M}_0$ не пусто: вследствие леммы 4.1 из [1] ему принадлежит направленность $(\lambda_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}\in\{\mathcal{F}\}}$, где $\{\mathcal{F}\}$ обозначает направленное по отношению $\prec$

множество всех замкнутых конденсаторов $\mathcal{F} \prec \mathcal{A}$ и $\lambda_{\mathcal{F}} \in \mathcal{W}(\mathcal{F}, a, \kappa)$. Пусть $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}'_0(\mathcal{A}, a, \kappa)$ обозначает множество всех $\mathcal{A}$-широких предельных точек всех направленностей из $\mathbb{M}_0$.

Наряду с леммой 6 для мер из $\mathcal{M}'_0$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Если* $\chi \in \mathcal{M}'_0(\mathcal{A}, a, \kappa)$, *то*

$$a_i \kappa(x, \chi) \le a_i \kappa(\chi^i, \chi) \quad \forall x \in \operatorname{supp} \chi^i, \quad i \in I, \tag{49}$$

и поэтому

$$\kappa(x, \chi) = \kappa(\chi^i, \chi) \quad \textit{пр. вс. в } A_i \cap \operatorname{supp} \chi^i, \quad i \in I, \tag{50}$$

$$\kappa(x, \chi) = \kappa(\chi^i, \chi) \quad \chi^i\textit{-почти всюду в } \mathbf{X}, \quad i \in I. \tag{51}$$

Доказательство. Для каждого фиксированного $\chi \in \mathcal{M}'_0$ существует направленность $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}_0$, $\mathcal{A}$-широко сходящаяся к χ. Из определения класса $\mathbb{M}_0$ и непрерывности κ на (компактном) множестве $\overline{A}' \times \overline{A}''$ следует, что χ, $(\mu_s)_{s \in S}$ и κ удовлетворяют условиям теоремы 11.3 из [2]. Согласно ее заключению выполняется

$$a_i \kappa(x, \chi) \le \liminf_{s \in S} a_i \kappa(\mu_s^i, \mu_s) \quad \forall x \in \operatorname{supp} \chi^i, \quad i \in I.$$

Подставляя в правую часть этого неравенства соотношение (40), получаем (49). Комбинируя (42) и (49), имеем (50).

Вследствие (49) $a_i \kappa(x, \chi) \le a_i \kappa(\chi^i, \chi)$ χ^i-почти всюду в $\mathbf{X}$, $i \in I$. Интегрируя обе части этого неравенства относительно (единичной) меры χ^i, заключаем, что в нем на самом деле выполняется равенство. Лемма 7 доказана.

8. Доказательство теорем 1 и 2. Доказательство основано на леммах 6 и 7.

Наряду с $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачей рассмотрим $(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa)$-задачу и соответствующие классы предельных мер $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa)$ и $\mathcal{M}'_0(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa)$. Справедливо тождество (ср. с (4))

$$w_\kappa(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a) = c_{\mathcal{A}}. \tag{52}$$

Согласно лемме 6 $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa)$ содержится в некотором классе эквивалентности в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, c_{\mathcal{A}} a)$. Ему соответствует единственная мера в $\mathfrak{M}_*(\overline{\mathcal{A}}, c_{\mathcal{A}} a)$; обозначим ее через θ:

$$\theta = \chi \quad \forall \chi \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa). \tag{53}$$

Зафиксировав произвольным образом $\chi_0 \in \mathcal{M}'_0(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa)$, обозначим

$$\theta^i := \chi_0^i \quad \forall i \in I. \tag{54}$$

Из (52), определений (53), (54) и соотношений (41), (42), (49) и (51), примененных к $\chi_0 \in \mathcal{M}'_0(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa)$, следует, что θ представима в виде (9) и удовлетворяет условиям (5), (6) и (10) – (12), а поэтому и условию (7) с числами τ_i, $i \in I$, определенными равенствами (13). Посредством элементарных преобразований из (5), (9) и (13) выводим (8). Учитывая подстрочное замечание к лемме 6, из определений (13), (53) и (54) получаем

$$\tau_i = a_i \kappa(\chi^i, \chi) \quad \forall \chi \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}} a, \kappa), \quad i \in I. \tag{55}$$

В силу соотношений (6) – (8) определенная выше мера θ принадлежит Г.

Покажем, что она является решением задачи о минимуме энергии $\kappa(\nu,\nu)$ в классе Γ.

Пусть $\nu\in\Gamma$ фиксировано. Пользуясь тождествами (22), (25) и (52), из условий (14)–(16) в результате элементарных преобразований получаем, что мера ν и числа $\tau_i'(\nu)$, $i\in I$, определенные равенствами

$$\tau_i'(\nu) := \begin{cases} c_{\mathcal{A}}\tau_i(\nu), & \text{если} \quad r<1; \\ c_{\mathcal{A}}\tau_i(\nu)+a_i\hat{a}c_{\mathcal{A}}^2\log R, & \text{если} \quad r\ge 1, \end{cases}$$

удовлетворяют соотношениям

$$a_i c_{\mathcal{A}}\kappa_{\mathbf{X}}(x,\nu) \ \ge\ \tau_i'(\nu) \quad \text{пр. вс. в } A_i, \quad i\in I, \tag{56}$$

$$\sum_{i\in I}\tau_i'(\nu) \ =\ w_{\kappa_{\mathbf{X}}}(\mathcal{A},c_{\mathcal{A}}a). \tag{57}$$

Зафиксируем $(\mu_s)_{s\in S}\in\mathbb{M}(\mathcal{A},c_{\mathcal{A}}a,\kappa_{\mathbf{X}})$. Для каждого $i\in I$ и всех $s\ge s_0$ неравенство в (56) выполняется μ_s^i-почти всюду в $\mathbf{X}$. Интегрируя его относительно (единичной) меры μ_s^i, а затем суммируя полученные неравенства по $i\in I$, вследствие (57) находим

$$\kappa_{\mathbf{X}}(\mu_s,\nu) \ \ge\ w_{\kappa_{\mathbf{X}}}(\mathcal{A},c_{\mathcal{A}}a).$$

Применяя к левой части неравенство Коши–Буняковского в $\mathcal{E}$, а затем переходя к пределу по $s\in S$, вследствие определения минимизирующей направленности получаем

$$\kappa_{\mathbf{X}}(\nu,\nu) \ \ge\ w_{\kappa_{\mathbf{X}}}(\mathcal{A},c_{\mathcal{A}}a),$$

что в силу (5), (14), (24), (25) и (52) равносильно соотношению

$$\kappa(\nu,\nu) \ \ge\ \kappa(\theta,\theta) \qquad \forall\,\nu\in\Gamma.$$

Это доказывает минимальность меры θ и тождество (17).

Осталось доказать утверждения единственности из теорем 1 и 2.

Заметим, что если некоторая мера является решением задачи о минимуме энергии $\kappa(\nu,\nu)$ в классе Γ, то вследствие условия (14) эта же мера минимизирует в Γ энергию $\kappa_{\mathbf{X}}(\nu,\nu)$. Используя выпуклость класса Γ и строгую положительную определенность ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$, отсюда стандартным образом выводим единственность решения. Это доказывает утверждение единственности из теоремы 2, а также, в силу приведенных выше рассуждений, следующее утверждение: если некоторые мера θ' и числа τ_i', $i\in I$, удовлетворяют условиям (5)–(8), то $\theta'=\theta$. Учитывая соотношения (52) и (53), отсюда выводим, что мера $\chi\in\mathcal{M}'(\mathcal{A},c_{\mathcal{A}}a,\kappa)$ и числа $c_{\mathcal{A}}\tau_i'$, $i\in I$, удовлетворяют условиям утверждения единственности из леммы 6. Применяя его, получаем $\tau_i' = a_i\kappa(\chi^i,\chi)$, что вследствие (55) доказывает требуемые равенства $\tau_i'=\tau_i \ \ \forall\, i\in I$.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Следствие 6. *В обозначениях теоремы* 1 *справедливо соотношение*

$$\kappa(x,\theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}}a_i \ \ge\ \kappa(\theta^i,\theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}}a_i \qquad \forall\, x\in \operatorname{Int}A_i, \quad i\in I.$$

Доказательство. Поскольку функция $\kappa(x,\theta)\operatorname{sign} c_{\mathcal{A}}a_i$ супергармонична в достаточно малой окрестности множества A_i [4], для каждого $x\in A_i$ выполняется

$$\kappa(x,\theta) \ =\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\kappa(y,\theta)\,dm^{\varepsilon}(y),$$

где m^ε — мера, получаемая равномерным распределением единичной массы по окружности $\{y: |y-x| = \varepsilon\}$. Энергия $\kappa(m^\varepsilon, m^\varepsilon)$ конечна, поэтому для $x \in \operatorname{Int} A_i$ и достаточно малых ε неравенство в (10) выполняется m^ε-почти всюду. Интегрируя его относительно m^ε, а затем переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое соотношение.

9. Доказательство теоремы 3. Доказательство основано на теоремах 1, 5, лемме 6 настоящей работы и леммах 4.1, 4.2 из [1].

Соотношение (18) следует из леммы 4.2 из [1]. Из (18) и условия $c_{\mathcal{A}} \neq 0$ находим, что емкость $c_{\mathcal{A}_n}$ для каждого $n \geq n_0$ определена и отлична от нуля и поэтому существуют $\chi \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}}\, a, \kappa)$ и $\chi_n \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}_n, c_{\mathcal{A}_n} a, \kappa)$, $n \geq n_0$. Вследствие (53) и (55) требуемые соотношения (19) – (21) равносильны следующим:

$$\chi_n \to \chi \quad \text{широко,} \tag{19'}$$

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(\chi_n - \chi, \chi_n - \chi) = 0, \tag{20'}$$

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(\chi_n^i, \chi_n) = \kappa(\chi^i, \chi) \quad \forall\, i \in I. \tag{21'}$$

Справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{\mathbf{X}}(\chi_n, \chi_n) = w_{\kappa_{\mathbf{X}}}(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}}\, a). \tag{58}$$

Действительно, применяя (41) и (52) к мерам χ и χ_n, $n \geq n_0$, вследствие (18) находим

$$\kappa(\chi, \chi) = \lim_{n\to\infty} \kappa(\chi_n, \chi_n), \qquad \chi(1) = \lim_{n\to\infty} \chi_n(1),$$

что в силу тождества (24) доказывает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{\mathbf{X}}(\chi_n, \chi_n) = \kappa_{\mathbf{X}}(\chi, \chi).$$

Комбинируя его с соотношением (47), примененным к $\chi \in \mathcal{M}'(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}}\, a, \kappa)$, получаем (58).

В силу леммы 4.1 из [1] направленность $(\lambda_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ пробегает направленное множество всех замкнутых конденсаторов $\mathcal{F} \prec \mathcal{A}_n$ и $\lambda_{\mathcal{F}} \in \mathcal{W}(\mathcal{F}, c_{\mathcal{A}_n} a, \kappa)$, принадлежит $\mathbb{M}(\mathcal{A}_n, c_{\mathcal{A}_n} a, \kappa)$. Поэтому в силу соотношений (38) и (40) для каждого $n \geq n_0$ существует замкнутый конденсатор $\mathcal{F}_n \prec \mathcal{A}_n$ такой, что

$$\left\| \lambda_{\mathcal{F}_n} - \chi_n \right\| < \frac{1}{n}, \tag{59}$$

$$\left| \kappa(\lambda_{\mathcal{F}_n}^i, \lambda_{\mathcal{F}_n}) - \kappa(\chi_n^i, \chi_n) \right| < \frac{1}{n} \quad \forall\, i \in I. \tag{60}$$

Обозначим

$$\lambda_n := \frac{c_{\mathcal{A}}\, \lambda_{\mathcal{F}_n}}{c_{\mathcal{A}_n}}, \quad n \geq n_0. \tag{61}$$

Из соотношений (18), (58), (59) и (61) следует, что последовательность $(\lambda_n)_{n \geq n_0}$ принадлежит $\mathbb{M}(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}}\, a, \kappa_{\mathbf{X}})$, а поэтому и $\mathbb{M}(\mathcal{A}, c_{\mathcal{A}}\, a, \kappa)$ (см. (46)). Применяя лемму 6, получаем

$$\lambda_n \to \chi \quad \text{сильно},$$

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(\lambda_n^i, \lambda_n) = \kappa(\chi^i, \chi) \quad \forall\, i \in I.$$

В силу (18) и (59) – (61) отсюда следует требуемое равенство (21′), а также соотношение

$$\chi_n \to \chi \quad \text{сильно}. \tag{62}$$

Применяя теорему 5 к (сильно фундаментальной вследствие (62)) последовательности $(\chi_n)_{n\geq n_0}$, в силу (62) получаем требуемые соотношения (19′), (20′).

Теорема 3 доказана.

10. Доказательство теоремы 4. В указанных условиях конденсатор $\mathcal{F}$ замкнут и в силу теоремы 7.2 из [2]

$$\operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{F}, a) = \lim_{s\in S} \operatorname{cap}_\kappa(\mathcal{F}_s, a). \tag{63}$$

Отсюда и из условия $c_\mathcal{F} \neq 0$ получаем, что для всех $s \geq s_0$ емкость $c_{\mathcal{F}_s}$ определена и отлична от нуля. Следовательно, существует $\lambda_s \in \mathcal{W}(\mathcal{F}_s, a, \kappa)$, $s \geq s_0$; эта же мера λ_s, очевидно, является минимизирующей и в $(\mathcal{F}_s, a, \kappa_\mathbf{X})$-задаче. Пользуясь упорядоченностью конденсаторов $\mathcal{F}_s$, $s \in S$, выпуклостью класса $\mathfrak{M}(\mathcal{F}_s, a)$ и предгильбертовой структурой в $\mathcal{E}$, отсюда вследствие леммы 4.1.1 из [7] получаем

$$\|\lambda_s - \lambda_{s'}\|^2 \leq \|\lambda_{s'}\|^2 - \|\lambda_s\|^2 \quad \forall\, s' \geq s \geq s_0. \tag{64}$$

Поскольку аналогичное к (63) равенство справедливо и для емкостей, вычисленных относительно ядра $\kappa_\mathbf{X}$ (см. теорему 7.2 из [2]), то направленность $\left(\|\lambda_s\|^2\right)_{s\geq s_0}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$. Отсюда и из (64) следует сильная фундаментальность $(\lambda_s)_{s\geq s_0}$.

Через λ^i, $i \in I$, обозначим широкую предельную точку (широко ограниченной и поэтому широко относительно компактной) направленности $(\lambda_s^i)_{s\geq s_0}$. Обозначим

$$\lambda := \sum_{i\in I} a_i \lambda^i.$$

Используя упорядоченность конденсаторов $\mathcal{F}_s$, $s \in S$, непрерывность κ на (компактном) множестве $F'_{s_0} \times F''_{s_0}$ и широкую полунепрерывность снизу функционала $\kappa(\nu, \nu)$ на конусе $\mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$, получаем (см. доказательство теоремы 7.2 из [2])

$$\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{F}, a, \kappa). \tag{65}$$

Согласно определениям λ является широкой предельной точкой для $(\lambda_s)_{s\geq s_0}$. Отсюда и из сильной фундаментальности $(\lambda_s)_{s\geq s_0}$ вследствие теоремы 5 получаем

$$\lambda_s \to \lambda \quad \text{широко и сильно}, \tag{66}$$

$$\lim_{s\in S} \kappa(\lambda_s - \lambda,\ \lambda_s - \lambda) = 0. \tag{67}$$

Докажем соотношение

$$\lim_{s\in S} \kappa(\lambda_s^i, \lambda_s) = \kappa(\lambda^i, \lambda) \quad \forall\, i \in I. \tag{68}$$

Используя свойство (CW) ядра $\kappa_{\mathbf{X}}$, из сильной ограниченности направленности $(\lambda_s^i)_{s \ge s_0}$ (см. лемму 9.6 из [2]) и ее широкой сходимости к λ^i заключаем, что $\lambda_s^i \to \lambda^i$ $\mathscr{E}$-слабо. Следовательно,

$$\lim_{s \in S} \kappa_{\mathbf{X}}(\lambda_s^i, \lambda) = \kappa_{\mathbf{X}}(\lambda^i, \lambda) \quad \forall\, i \in I.$$

Отсюда вследствие сильной сходимости $(\lambda_s)_{s \ge s_0}$ к λ и неравенств

$$\left|\kappa_{\mathbf{X}}(\lambda_s^i, \lambda_s) - \kappa_{\mathbf{X}}(\lambda^i, \lambda)\right| \le \left|\kappa_{\mathbf{X}}(\lambda_s^i - \lambda^i, \lambda)\right| + \left|\kappa_{\mathbf{X}}(\lambda_s^i, \lambda_s - \lambda)\right| \le$$
$$\le \left|\kappa_{\mathbf{X}}(\lambda_s^i - \lambda^i, \lambda)\right| + \left\|\lambda_s^i\right\| \left\|\lambda_s - \lambda\right\|$$

получаем

$$\lim_{s \in S} \kappa_{\mathbf{X}}(\lambda_s^i, \lambda_s) = \kappa_{\mathbf{X}}(\lambda^i, \lambda) \quad \forall\, i \in I,$$

что вследствие тождества (23) равносильно соотношению (68).

Из следствия 5 и соотношений (53), (55), (63), (65) – (68) вытекает справедливость теоремы 4.

1. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168 – 189.
2. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. II // Там же. – № 4. – С. 466 – 488.
3. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. III // Там же. – № 6. – С. 758 – 782.
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
5. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 4 (244). – С. 155 – 156.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
7. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3 – 4. – P. 139 – 215.
8. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135 – 352.
9. *Келли Дж. Л.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 431 с.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
11. *Bagby T.* The modulus of a plane condenser // J. Math. and Mech. – 1967. – **17**, № 4. – P. 315 – 329.
12. *Тамразов П. М.* О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала. – Киев, 1980. – С. 3 – 13. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.25).
13. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.

Получено 26.12.2001