УДК 517.574

Я. В. Васильків (Львів. нац. ун-т)

ПРО ЗРОСТАННЯ СУБГАРМОНІЙНИХ В $\mathbb{C}$ ФУНКЦІЙ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ *

For infinite order functions u subharmonic in $\mathbb{C}$ and subjected to given restrictions on the Riesz masses of a disk of radius $r \in (0, +\infty)$, we find growth majorants of functions $B(r,u) = \max\{|u(z)|: |z| \le r\}$, $\tilde{B}(r,u) = \sup\{|\tilde{u}(z)|: |z| \le r\}$, where $\tilde{u}$ is a function conjugate to u.

Для субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій u нескінченного порядку із заданими обмеженнями на маси Ріса круга радіуса $r \in (0, +\infty)$ знайдено мажоранти функцій $B(r,u) = \max\{|u(z)|: |z| \le r\}$, $\tilde{B}(r,u) = \sup\{|\tilde{u}(z)|: |z| \le r\}$, де $\tilde{u}$ — функція, спряжена до u.

Функцією зростання назвемо довільну додатну, неперервну, зростаючу, необмежену на $(0, +\infty)$ функцію. Нехай ν — функція зростання. Через $\mathfrak{M}_\nu$ позначимо множину невід'ємних борелівських мір μ в $\mathbb{C}$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, таких, що $n(r,\mu) \le \nu(r)$, $r > 0$, де $n(r,\mu) = \mu(\{z: |z| \le r\})$. Далі вважатимемо, що $\operatorname{supp}\mu \cap \{z: |z| < 1\} = \varnothing$.

Для субгармонійної в $\mathbb{C}$ функції u позначимо $B(r,u) = \max\{u(z): |z| \le r\}$, а через $\mu[u]$ — її міру Ріса. Нехай λ — функція зростання. Субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція u, $u(0) = 0$, називається функцією скінченного λ-типу, якщо для деяких $a > 0$, $b > 0$ виконується $B(r,u) \le a\lambda(br)$ для всіх $r > 0$. Клас субгармонійних функцій u, $u(0) = 0$, таких, що $\mu[u] \in \mathfrak{M}_\nu$, позначимо через S_ν.

Означення 1. *Функція зростання λ називається мажорантою зростання для S_ν, якщо для довільної міри $\mu \in \mathfrak{M}_\nu$ існує субгармонійна функція u скінченного λ-типу така, що $\mu[u] = \mu$.*

У роботі [1] встановлено, що довільна невід'ємна борелівська міра μ в $\mathbb{C}$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, є мірою Ріса деякої субгармонійної в $\mathbb{C}$ функції скінченного λ-типу при

$$\lambda(r) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)} dn(t,\mu),$$

де $q(t)$ — неспадна, невід'ємна функція така, що інтеграл збігається для довільного $r > 0$. Такі функції $q(t)$ існують для довільної борелівської міри μ, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$. Наприклад, $q(t) = n(t,\mu)$ або $\log[n(t,\mu) + 1]$.

У цій роботі ми знайдемо мажоранти зростання λ для S_ν. Справедлива така теорема.

Теорема. *Нехай ν — функція зростання і ϕ — додатна, неспадна, неперервно диференційовна функція такі, що:*

* Виконана при підтримці INTAS (проект № 99-00089).

i) *функція* $\omega(r) = \log\nu(r) + \log\phi(r)$ *строго опукла відносно* $\log r$, $\omega(r)/\log r \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$;

ii)
$$\log \int_1^{\psi(k)} \frac{dt}{\phi(t)t} = o(k), \quad k \to +\infty, \tag{1}$$

де функція $\psi(r)$ *обернена до функції* $r\omega'(r)$.

Тоді функція зростання

$$\lambda(r) = \phi(r)\nu(r)\int_1^r \frac{dt}{\phi(t)t}$$

є мажорантою зростання для S_ν.

Для доведення цієї теореми використаємо поняття та деякі властивості функції $\tilde{u}$, спряженої до субгармонійної функції u. Такі функції вперше розглянуто в роботі [2]. Коротко нагадаємо потрібні нам в подальшому означення та факти.

Для $z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ покладемо

$$l(z,a) = \begin{cases} \int_0^z (\xi - a)^{-1} d\xi, & z \neq ta, \ t \geq 1; \\ \log|1 - z/a|, & z = ta, \ t \geq 1. \end{cases}$$

Нехай $R_0 \in (0, +\infty]$, $\mathbb{D}_{R_0} = \{z : |z| < R_0\}$, u — субгармонійна в $\mathbb{D}_{R_0}$ функція. За теоремою Ріса [3, с. 123] для довільної компактної підмножини $K \subset \mathbb{D}_{R_0}$ із непорожньою внутрішністю $\mathring{K}$ і довільної точки $z \in \mathring{K}$ маємо

$$u(z) = h_K(z) + \int_K \log\left|1 - \frac{z}{a}\right| d\mu_a[u],$$

де функція h_K гармонійна в $\mathring{K}$.

Означення 2 [2]. *Нехай* u *— субгармонійна в* $\mathbb{D}_{R_0}$ *функція,* $u(0) = 0$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu[u]$. *Спряжена функція* $\tilde{u}$ *до* u *в* $\mathbb{D}_{R_0}$ *визначається із співвідношення*

$$u(z) + i\tilde{u}(z) = h_K(z) + i\tilde{h}_K(z) + \int_K l(z,a)\, d\mu_a[u],$$

де K *— компактна підмножина з* $\mathbb{D}_{R_0}$ *із зірковою відносно точки* $z = 0$ *внутрішністю* $\mathring{K}$, $z \in \mathring{K}$, $\tilde{h}_K$ *— гармонійно спряжена до* h_K *в* $\mathring{K}$, $\tilde{h}_K(0) = 0$.

Зауважимо [2] (лема 1), що функція $\tilde{u}$ не залежить від вибору K.

Доведення теореми. Нехай $\mu \in \mathfrak{M}_\nu$. Оскільки, за домовленістю, $\mathbb{D}_1 \not\subset \operatorname{supp}\mu$, то $n(r,\mu) = 0$ при $r \in (0,1)$.

Нехай функції ν, ϕ задовольняють умови i) та ii). Не зменшуючи загальності, вважаємо також, що $\phi(t) \geq 1$ при $t \geq 1$. Тоді зі строгої опуклості функції $\omega(t)$ відносно $\log t$, її гладкості та необмеженості відношення $\omega(t)/\log t$ випливає, що $t\omega'(t)$ строго зростає до $+\infty$ на $[1, +\infty)$. Отже, при $k \in \mathbb{N}$ маємо: або $t\omega'(t) > k$ при $t \geq 1$, або існує єдине $r_k \geq 1$ таке, що $r_k\omega'(r_k) = k$. Покладемо в першому випадку $r_k = 1$ і $\gamma_k = 0$, а в другому —

$$\gamma_k = -\frac{1}{k} \int_{|a| \leq r_k} a^{-k}\, d\mu_a. \tag{2}$$

Нехай $R \in (0, +\infty)$. Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(R) z^k \ := \ g_R(z), \quad z \in \mathbb{D}_R,$$

де

$$c_k(R) \ := \ \gamma_k + \frac{1}{k} \int_{|a| \le R} a^{-k} \, d\mu_a, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Покажемо, що сума $g_R(z)$ цього ряду є голоморфною в $\mathbb{D}_R$ функцією.

Спочатку зауважимо, що оскільки $\mathbb{D}_1 \not\subset \operatorname{supp} \mu$, то при $R \in (0,1)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$: $c_k(R) = \gamma_k$. Тоді при таких R і k, враховуючи (2), (1) і той факт, що r_k є єдиною точкою мінімуму функції $\omega(t) - k \log t$, маємо

$$|c_k(R)| \ \le \ \frac{1}{k} \int_1^{r_k} \frac{dn(t,\mu)}{t^k} \ \le \ \frac{n(r_k,\mu)}{k r_k^k} + \int_1^{r_k} \frac{n(t,\mu)}{t^k} \frac{dt}{t} \ \le \ \frac{\nu(r_k)\phi(r_k)}{k r_k^k} +$$

$$+ \int_1^{r_k} \frac{\nu(t)\phi(t)}{t^k} \frac{dt}{\phi(t) t} \ = \ k^{-1} e^{\omega(r_k) - k \log r_k} + \int_1^{r_k} e^{\omega(t) - k \log t} \frac{dt}{\phi(t) t} \ \le$$

$$\le \ \nu(1)\phi(1) \left(k^{-1} + \int_1^{r_k} \frac{dt}{\phi(t) t} \right) \ = \ \nu(1)\phi(1) \left(k^{-1} + 2^{k\varepsilon_k} \right), \tag{4}$$

де $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

При $R \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, з огляду на (2) та (3) знаходимо

$$c_k(R) \ = \ \begin{cases} -k^{-1} \displaystyle\int_{R < |a| \le r_k} a^{-k} d\mu_a, & R < r_k; \\ k^{-1} \displaystyle\int_{r_k < |a| \le R} a^{-k} d\mu_a, & R > r_k; \\ 0, & R = r_k. \end{cases}$$

Отже, при $1 \le R < r_k$, $k \in \mathbb{N}$, із урахуванням (1) отримуємо

$$|c_k(R)| \ \le \ \frac{1}{k} \int_R^{r_k} \frac{dn(t,\mu)}{t^k} \ \le \ \frac{n(r_k,\mu)}{k r_k^k} + \int_R^{r_k} \frac{n(t,\mu)}{t^k} \frac{dt}{t} \ \le \ \frac{\phi(r_k)\nu(r_k)}{k r_k^k} +$$

$$+ \int_R^{r_k} e^{\omega(t) - k \log t} \frac{dt}{\phi(t) t} \ \le \ \frac{\phi(R)\nu(R)}{R^k} \left(\frac{1}{k} + \int_1^{r_k} \frac{dt}{\phi(t) t} \right) \ =$$

$$= \ \left(k^{-1} + 2^{k\varepsilon_k} \right) \phi(R) \nu(R) R^{-k} \ \le \ \left(k^{-1} + 2^{k\varepsilon_k} \right) \lambda(R) R^{-k}, \tag{5}$$

де $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

Аналогічно при $R > r_k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$|c_k(R)| \ \le \ \frac{1}{k} \int_{r_k}^{R} \frac{dn(t,\mu)}{t^k} \ \le \ \frac{n(R,\mu)}{k R^k} + \int_{r_k}^{R} \frac{n(t,\mu)}{t^k} \frac{dt}{t} \ \le \ \frac{\nu(R)}{k R^k} +$$

$$+ \int_{r_k}^{R} e^{\omega(t) - k \log t} \frac{dt}{\phi(t) t} \ \le \ \frac{\nu(R)}{k R^k} + \frac{\phi(R)\nu(R)}{R^k} \int_1^R \frac{dt}{\phi(t) t} \ \le \ \left(k^{-1} + 2^{k\varepsilon_k} \right) \lambda(R) R^{-k}. \tag{6}$$

Тоді при $R \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, з огляду на (5) та (6) маємо

$$|c_k(R)| \le \left(k^{-1} + 2^{k\varepsilon_k}\right)\lambda(R)R^{-k}, \tag{7}$$

де $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Із співвідношень (4) та (7), в свою чергу, безпосередньо випливає, що функція $g_R(z)$ є голоморфною в $\mathbb{D}_R$ для довільного $R \in (0, +\infty)$.

Далі, для довільного фіксованого $R \in (0, +\infty)$ покладемо

$$F_R(z) = g_R(z) + \int\limits_{|a|\le R} l(z,a)\,d\mu_a, \quad z \in \mathbb{D}_R. \tag{8}$$

Нехай $0 < R_1 < R_2 < +\infty$. Зафіксуємо довільне $z \in \mathbb{D}_{R_1}$ і покажемо, що $F_{R_1}(z) = F_{R_2}(z)$. Справді, з огляду на (3) та (8) маємо

$$F_{R_2}(z) - F_{R_1}(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(k^{-1} \int\limits_{R_1<|a|\le R_2} a^{-k}\,d\mu_a\right) z^k + \int\limits_{R_1<|a|\le R_2} l(z,a)\,d\mu_a.$$

Але при $z \in \mathbb{D}_{R_1}$

$$\int\limits_{R_1<|a|\le R_2} l(z,a)\,d\mu_a = \int\limits_{R_1<|a|\le R_2} d\mu_a \int\limits_0^z (\xi - a)^{-1}\,d\xi = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(k^{-1} \int\limits_{R_1<|a|\le R_2} a^{-k}\,d\mu_a\right) z^k,$$

і тому $F_{R_2}(z) - F_{R_1}(z) = 0$ для таких z.

Будуємо тепер функцію $F(z)$ в $\mathbb{C}$, покладаючи

$$F(z) = F_R(z) \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{D}_R. \tag{9}$$

Покладемо також у співвідношенні (8) $R = 2r$, $0 < r < +\infty$. Тоді при $|z| \le r$ з огляду на (7) знаходимо

$$|g_{2r}(z)| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k(2r)| r^k \le A\lambda(2r), \tag{10}$$

де $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(1-\varepsilon_k)} + \log 2$. Окрім того,

$$\int\limits_{|a|\le 2r} \operatorname{Re} l(z,a)\,d\mu_a \le \int\limits_{|a|\le 2r} \log\left(1 + \frac{r}{|a|}\right) d\mu_a = \int\limits_1^{2r} \log\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn(t,\mu) \le \log\frac{3}{2}\, n(2r,\mu) +$$

$$+ \int\limits_1^{2r} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{r+t}\right) n(t,\mu)\,dt \le \log\frac{3}{2}\,\nu(2r) + \int\limits_1^{2r} \nu(t)\phi(t)\frac{dt}{\phi(t)t} \le \log\frac{3e}{2}\,\lambda(2r),$$

звідки з урахуванням (8) та (10) отримуємо

$$B(r,u) \le \left(A + \log\frac{3e}{2}\right)\lambda(2r),$$

де $u = \operatorname{Re} F$. Оскільки за побудовою u субгармонійна в $\mathbb{C}$ і $\mu[u] = \mu$, то теорему доведено.

Зауважимо [2] (теорема 1), що у випадку $u = \log|f|$, f — ціла, $f(0) = 1$, функція $\breve{u}$ є віткою $\operatorname{Arg} f$. Точніше, для довільних $R \in (0, +\infty)$, $z \in \mathbb{D}_R \setminus \bigcup_{|z_j|\le R} [z_j, Rz_j/|z_j|)$

$$f(z) = \exp\{u(z) + i\breve{u}(z)\} = \exp\{g_R(z)\} \prod_{|z_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right), \tag{11}$$

де $\{z_j\}$ — множина нулів функції f, $g_R(z)$ — деяка голоморфна в $\mathbb{D}_R$ функція. При цьому функцію f можна продовжити правою частиною співвідношення (11) до голоморфної в $\mathbb{D}_R$ функції. Тому наступний наслідок становить самостійний інтерес.

Позначимо

$$\breve{B}(r,u) = \sup\{|\breve{u}(z)|: |z| \le r\},$$

де $\breve{u}(z) = \operatorname{Im} F(z)$, F — функція, задана співвідношенням (9).

Наслідок 1. *Нехай виконано умови теореми. Тоді для довільного* $r \in (0, +\infty)$

$$\breve{B}(r,u) \le (A+\pi)\lambda(2r). \tag{12}$$

Доведення. Для $z \in \mathbb{C}$, $a \ne 0$ маємо

$$|\operatorname{Im} l(z,a)| = \left|\int_0^{|z|} \operatorname{Im}\left(t - a\bar{z}/|z|\right)^{-1} dt\right| \le \pi.$$

Тоді при $|z| \le r$

$$\int_{|a|\le 2r} |\operatorname{Im} l(z,a)| d\mu_a \le \pi n(2r,\mu) \le \pi\nu(2r) \le \pi\lambda(2r),$$

звідки з урахуванням (8) та (10) отримуємо (12).

Перш ніж сформулювати наступний наслідок, наведемо таке означення.

Означення 3. *Функція зростання* λ *називається мінімальною мажорантою зростання для* S_ν, *якщо*:

1) λ *є мажорантою зростання для* S_ν;

2) *існує міра* $\mu \in \mathfrak{M}_\nu$ *така, що для довільної субгармонійної в* $\mathbb{C}$ *функції* u, *міра Ріса* $\mu[u]$ *якої збігається з* μ, *виконується* $\lambda(r) \le aB(br,u)$ *при деяких* $a > 0$, $b > 0$ *для всіх* $r > 0$.

Наслідок 2. *Якщо функція зростання* λ *така, що* $\log\nu(r)$ *строго опукла відносно* $\log r$ *і при деякому* $b > 1$ *виконується* $\int_1^{+\infty} \nu(t)(\nu(bt)t)^{-1} dt < +\infty$, *то* ν — *мінімальна мажоранта зростання для* S_ν.

Доведення. Покладемо $\phi(t) = \nu(bt)/\nu(t)$. Тоді при будь-якому $\psi(k)$ виконується (1). Отже, за теоремою для довільної міри $\mu \in \mathfrak{M}_\nu$ існує субгармонійна функція скінченного λ-типу u, $\mu[u] = \mu$, при

$$\lambda(r) = \nu(br)\int_1^r \nu(t)(\nu(bt)t)^{-1} dt = O(\nu(br)), \quad r \to +\infty.$$

Перевіримо тепер умову 2 означення 3. Позначимо $N(r,u) = \int_1^r n(t,\mu[u])t^{-1} dt$. Розглянемо невід'ємну борелівську в $\mathbb{C}$ міру μ, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, таку, що $\nu(r)/2 \le n(r,\mu) \le \nu(r)$. Для довільної функції $u \in S_\nu$, $u(0) = 0$, $\mu[u] = \mu$, враховуючи нерівність $N(r,u) \le B(r,u)$ [3, с. 146], маємо

$$\nu(r) \le 2n(r,\mu) \le 2\int_r^{er} n(t,\mu)t^{-1} dt \le 2N(er,u) \le 2B(er,u).$$

Наслідок 2 доведено.

Наступний наслідок дає результат, отриманий Г. Скодою [4] у випадку $u = \log|f|$ (f — ціла функція нескінченного порядку).

Наслідок 3. *Нехай функція зростання* ν *така, що* $\log\nu(r)$ *опукла відносно* $\log r$, $\log\nu(r)/\log r \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$. *Тоді існує субгармонійна функція* $u \in S_\nu$ *скінченного* λ*-типу при* $\lambda(r) = r^{\varepsilon}\nu(r)$, *де* $\varepsilon > 0$.

Доведення. Покладемо $\phi(r) = r^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Тоді функція $\omega(r) = \log\nu(r) + \log\phi(r)$ опукла відносно $\log r$, $\omega(r)/\log r \to +\infty$ при $r \to +\infty$ і

$$\log \int_1^{\psi(k)} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} = O(1) = o(k), \quad k \to +\infty.$$

За теоремою існує субгармонійна функція $u \in S_\nu$ скінченного λ-типу при

$$\lambda(r) = r^{\varepsilon}\nu(r)\int_1^r \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} = O\big(r^{\varepsilon}\nu(r)\big), \quad r \to +\infty.$$

Наслідок 3 доведено.

1. *Васильків Я. В.* Некоторые свойства δ-субгармонических функций конечного λ-типа // Мат. 9-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. механики и математики АН УССР (Львов, 10 – 14 мая 1982 г.). – 1982. – Ч. 2. – С. 16 – 22. (Деп. в ВИНИТИ, № 324-84).
2. *Kondratyuk A. A., Vasyl'kiv Ya. V.* Conjugate of subharmonic function // Мат. студ. – 2000. – **13**, № 2. – С. 173 – 180.
3. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
4. *Skoda H.* Sous-ensembles analytique ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$ // Bull. Soc. math. France. – 1972. – **100**, № 4. – P. 353 – 408.

Одержано 13.04.2001