УДК 517.95

Л. В. Фардигола (Харків. нац. ун-т, Фіз.-техн. ін-т низьких температур НАН України),
Ю. В. Шевелева (Харків. нац. ун-т)

ПРО МОЖЛИВІСТЬ СТАБІЛІЗАЦІЇ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НА $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ ЗА ДОПОМОГОЮ ОДНОВИМІРНИХ ПОЗИЦІЙНИХ КЕРУВАНЬ

We obtain conditions of stabilizability of evolution systems of partial differential equations on $\mathbb{R}^n \times \times [0, +\infty)$ by one-dimensional feedback controls. To prove these conditions, we use the Fourier transform method. We obtain estimates of semialgebraic functions on semialgebraic sets by using the Tarski – Seidenberg theorem and its corollaries. We also give examples of stabilizable and nonstabilizable systems.

Одержано умови можливості стабілізації еволюційних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними на $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ за допомогою одновимірних позиційних керувань. Для доведення цих умов використано метод перетворення Фур'є. При цьому одержано оцінки напівалгебраїчних функцій на напівалгебраїчних множинах за допомогою теореми Тарського – Зайденберга та її наслідків. Наведено також приклади систем, які можливо та які неможливо стабілізувати.

Одним з найпоширеніших способів вивчення керованих систем із розподіленими параметрами є їх інтерпретація у вигляді

$$\frac{dw}{dt} = Aw + Bu, \qquad t \geq 0,$$

де $w: (0, +\infty) \to \mathcal{H}$ — шукана функція; $u: (0, +\infty) \to H$ — керування; A — інфінітезимальний оператор в $\mathcal{H}$; $B: H \to \mathcal{H}$ — лінійний обмежений оператор. Основною перевагою такого підходу є можливість застосування теорії неперервних напівгруп [1 – 6]. Слід відмітити, що в теорії керованих систем із розподіленими параметрами найбільшу увагу приділено вивченню випадку, коли генератор напівгрупи A має дискретний спектр, що дає можливість зобразити цю напівгрупу в термінах власних елементів оператора A. Але цей випадок відповідає лише диференціальним операторам A, що визначені на просторах функцій на обмежених областях, тобто диференціальним рівнянням на обмежених за просторовими змінними областях. З іншого боку, відомо, що диференціальні оператори, які діють із просторів функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$ (та інших необмежених областях), мають неперервний спектр. Ми будемо вивчати саме такі диференціальні оператори A.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = A(D_x)w(x,t) + B(D_x)u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

де $D_x = (-i\,\partial/\partial x_1, \ldots, -i\,\partial/\partial x_n)$; $A(\sigma) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — довільна матриця, елементами якої є поліноми від $\sigma \in \mathbb{R}^n$; $B(\sigma) = \{b_j(\sigma)\}_{j=1}^m$ — довільний вектор, елементами якого є поліноми від $\sigma \in \mathbb{R}^n$; $w: \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}^m$ — шукана функція, $u: \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}^m$ — керування (вхід системи). Будемо вважати, що $w(\cdot, t) \in C_\gamma^q$, $t \geq 0$, де

$$C_\gamma^q = \{ g \in C^q(\mathbb{R}^n) \mid \|g\|_\gamma^q < +\infty \},$$

$$\|g\|_\gamma^q = \sup \{ |D_x^\alpha g(x)| (1 + |x|)^{-\gamma} \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge |\alpha| \le q \},$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Відмітимо, що функції $w(\cdot, t)$ та $u(\cdot, t)$ розглядаються на $\mathbb{R}^n$ $(t \ge 0)$.

Означення 1. *Систему* (1) *можливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання* $\gamma \ge 0$, *якщо існує матриця* $P(D_x) = (p_1(D_x), \ldots$ $\ldots, p_m(D_x))$, *де* p_j, $j = \overline{1, m}$, — *деякі поліноми від* $\sigma \in \mathbb{R}^n$, *така, що для кожного* $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *можна знайти таке* $q \in \mathbb{N}_0$, *що для будь-якого розв'язку* w *цієї системи з керуванням*

$$u(x, t) \equiv \sum_{j=1}^{m} p_j(D_x) w_j(x, t), \tag{2}$$

яке задовольняє початкову умову

$$w(\cdot, 0) \in C_\gamma^q, \tag{3}$$

виконуються дві умови:

$$\forall t \ge 0 \quad w(\cdot, t) \in C_\gamma^r, \tag{4}$$

$$\|w(\cdot, t)\|_\gamma^r \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty. \tag{5}$$

Для дослідження системи (1) використаємо метод перетворення Фур'є, запропонований І. Г. Петровським для вивчення задачі Коші для еволюційних систем на шарі $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ [7]. Пізніше цей метод було узагальнено І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим [8]. Застосовуючи (формально) перетворення Фур'є відносно x до системи (1) з керуванням вигляду (2), одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = (A(\sigma) + B(\sigma)P(\sigma)) v(\sigma, t), \qquad t \ge 0, \tag{6}$$

де $\sigma \in \mathbb{R}^n$ — параметр, $v(\cdot, t) = \mathcal{F}(w(\cdot, t))$, $t \ge 0$ (тут і далі $\mathcal{F}$ — оператор перетворення Фур'є). У п. 1 ми доводимо критерій можливості стабілізації системи (1).

Теорема 1. *Систему* (1) *можливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання* $\gamma \ge 0$ *в тому і тільки в тому випадку, коли існує поліноміальна матриця* $P(1 \times m)$ *така, що*

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad [\det(A(\sigma) + B(\sigma)P(\sigma) - \lambda I) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0], \tag{7}$$

де I — *одинична матриця.*

Із цієї теореми випливає, що систему (1) можливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання $\gamma \ge 0$ в тому і тільки в тому випадку, коли існує поліноміальна матриця $P(1 \times m)$ така, що всі розв'язки системи (6) прямують до 0 при $t \to \infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Проте з цієї теореми незрозуміло, для яких $A(\sigma)$ та $B(\sigma)$ існує поліноміальна матриця $P(\sigma)$, що задовольняє умову (7), та як її шукати. Відомо, що для сталих матриць $A(m \times m)$ та $B(m \times 1)$ систему звичайних диференціальних рівнянь можливо стабілізувати за допомогою позиційного керування $u = Pw$, де P — стала матриця $(1 \times m)$, у тому і тільки в тому випадку, коли лінійний підпростір $L \subset \mathbb{R}^m$, що є лінійною оболонкою стовпців матриці Калмана

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{m-1}B),$$

містить у собі кореневі підпростори тих власних значень матриці A, дійсні частини яких невід'ємні.

Висновок 1. *Нехай для* $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\det\left(B(\sigma_0), A(\sigma_0)B(\sigma_0), \dots, A^{m-1}(\sigma_0)B(\sigma_0)\right) = 0$$

та $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ *для всіх* $\lambda \in \mathbb{C}$, *які задовольняють умову* $\det(A(\sigma_0) - \lambda I) = 0$. *Тоді систему* (1) *неможливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання* $\gamma \ge 0$.

Проте спосіб побудови матриці P залежить від того, які саме стовпці матриці Калмана K утворюють базис підпростору L. Тому у випадку, коли $A(\sigma)$ та $B(\sigma)$ є поліноміальними матрицями, спроба побудови матриці P окремо для кожного $\sigma \in \mathbb{R}^n$ приводить до того, що функція $P(\sigma)$ не буде не тільки поліноміальною, а взагалі, й неперервною. Отже, незрозуміло, яку трактовку у цьому випадку може мати $P(D_x)$. У п. 1 одержано достатню умову існування поліноміальної матриці, що задовольняє умову (7), та наведено метод її побудови. Зокрема, доведено таку теорему.

Теорема 2. *Якщо для системи* (1) *виконано умову*

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad \left[\det\left(B(\sigma), A(\sigma)B(\sigma), \dots, A^{m-1}(\sigma)B(\sigma)\right) = 0 \Rightarrow \Lambda_0(\sigma) < 0\right], \qquad (8)$$

то цю систему можливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання $\gamma \ge 0$.

Тут і далі

$$\Lambda_p(\sigma) = \sup\left\{ \operatorname{Re}\lambda \,|\, \det(A(\sigma) + B(\sigma)P(\sigma) - \lambda I) = 0 \right\}.$$

Для доведення теорем 1 та 2 використано теорему Тарського – Зайденберга [9] та її наслідки [10] (Додаток А), [11]. У п. 1 наведено приклади систем, які можливо та які неможливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання $\gamma \ge 0$. Нещодавно проблему можливості стабілізації було досліджено для еволюційного рівняння m-го порядку на $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty]$ за допомогою одновимірного позиційного керування [12] та для системи вигляду (1) на $\mathbb{R}^n \times$ $\times [0, +\infty]$ за допомогою m-вимірного позиційного керування [13].

1. Умови можливості стабілізації системи (1).

Твердження 1. *Нехай поліноміальна матриця* P ($1 \times m$) *задовольняє умову* (7). *Тоді для кожного* $r \in \mathbb{N}_0$ *можна знайти таке* $q \in \mathbb{N}_0$ *та таку неперервну на* $[0, +\infty)$ *функцію* $\nu(t)$, $\nu(t) \to \infty$, $t \to +\infty$, *що для будь-якого розв'язку* w *системи* (1) *з керуванням* (2) *та початковою умовою* (3) *виконуються дві умови*:

$$\forall t \ge 0 \quad w(\cdot, t) \in C_\gamma^r, \qquad (9)$$

$$\forall t \ge 0 \quad \| w(\cdot, t) \|_\gamma^r \le \nu(t) \| w(\cdot, 0) \|_\gamma^q. \qquad (10)$$

Доведення. З (7) одержуємо

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad \Lambda_p(\sigma) < 0. \qquad (11)$$

Позначимо $\mu(r) \equiv \sup\left\{ \Lambda_p(\sigma) \,|\, \sigma \in \mathbb{R}^n \wedge |\sigma| = r \right\}$. З (11) випливає, що $\mu < 0$ $(r \ge 0)$. Зрозуміло, що для кожного $r_0 > 0$ існує $C(r_0) > 0$ таке, що

$$\forall r \in [0, r_0] \quad \nu(r) \geq C(r_0). \tag{12}$$

Застосовуючи теорему Тарського – Зайденберга та її наслідки [9], [10] (Додаток А), одержуємо

$$\mu(r) = -\infty \quad \text{при} \quad r \to +\infty, \tag{13}$$

або

$$\mu(r) = -Mr^l(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad r \to +\infty, \tag{14}$$

де $M > 0$, $l \in \mathbb{Q}$. З (12)–(14) випливає, що для будь-якого $r \geq 0$ $\mu(r) \leq \leq L(1 + r^2)^{l/2}$, де $L > 0$ (якщо виконується умова (13), то l — будь-яке раціональне число). Звідси одержуємо оцінку

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad \Lambda_p(\sigma) < -L\left(1 + |\sigma|^2\right)^{l/2}. \tag{15}$$

Поряд із системою (1) з керуванням (2) будемо розглядати „двоїсту" за Фур'є до неї систему (6). Для доведення виконання умов (9), (10) будемо використовувати метод перетворення Фур'є [7], [8] (гл. 3). Замінюючи у доведенні твердження 2 з [12] (або твердження 3.2 з [13]) матриці $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ та $P(\sigma)$, які там розглядаються, матрицями $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ та $P(\sigma)$ з цієї роботи, одержуємо, що для кожного $r \in \mathbb{N}_0$ можна знайти таке $q \in \mathbb{N}_0$ та таку неперервну на $[0, +\infty)$ функцію $\nu(t)$, $\nu(t) \to 0$, $t \to +\infty$, що будь-який розв'язок w системи (1) з керуванням (2) та початковою умовою (3) задовольняє умови (9), (10). Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай для поліноміальної матриці* $P(1 \times m)$ *умову* (7) *не виконано. Тоді керування* (2), *яке їй відповідає, не стабілізує систему* (1).

Доведення. Припустимо, що систему (1) можливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання $\gamma \geq 0$, але умову (7) для неї не виконано. Візьмемо довільну матрицю $P(\sigma)$, яка стабілізує систему (1). Нехай $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ задовольняє умову $\det(A(\sigma_0) + B(\sigma_0)P(\sigma_0) - \lambda_0 I) = 0$, $\operatorname{Re}\lambda_0 \geq 0$, та υ_0 — одиничний власний вектор $A(\sigma_0) + B(\sigma_0)P(\sigma_0)$, який відповідає власному значенню λ_0. Розглянемо систему (1) з керуванням (2). Знайдемо розв'язок задачі Коші для цієї системи з початковою умовою

$$w(x, 0) = \upsilon_0 \exp\{i\langle x, \sigma_0\rangle\}$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ означає скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$). Зрозуміло, що розв'язком цієї задачі є функція

$$w(x, t) \equiv \exp\{t(A(\sigma_0) + B(\sigma_0)P(\sigma_0))\}\upsilon_0 \exp\{i\langle x, \sigma_0\rangle\} \equiv$$

$$\equiv \exp\{t\lambda_0 + i\langle x, \sigma_0\rangle\}\upsilon_0.$$

Оскільки $|w(x, t)| \equiv \exp\{t \operatorname{Re}\lambda_0\}$, то $\overline{\lim_{t \to +\infty}} |w(x, t)| > 0$, тобто умову (5) не виконано, що суперечить вибору матриці $P(\sigma)$. Твердження доведено.

З тверджень 1 та 2 безпосередньо одержуємо теорему 1.

Твердження 3. *Нехай для системи* (1) *виконано умову* (8). *Тоді існує поліноміальна матриця* $P(1 \times m)$, *що задовольняє умову* (7).

Доведення. Поряд із системою (1) будемо розглядати систему (6), яка є „двоїстою" за Фур'є до системи (1) з керуванням (2) (матрицю $P(\sigma)$ буде вибрано нижче). Розглянемо матрицю Калмана цієї системи

$$K(\sigma) = (B(\sigma), A(\sigma)B(\sigma), A^2(\sigma)B(\sigma), \ldots, A^{m-1}(\sigma)B(\sigma)).$$

Спочатку припустимо, що $\sigma \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, \det K(\xi) = 0\}$. Позначимо через $f_1(\sigma)$ таку матрицю $(1 \times m)$, що

$$f_1(\sigma)K(\sigma) = -e \det K(\sigma), \tag{16}$$

де $e = (0, \ldots, 0, 1)$ — матриця $(1 \times m)$. Тоді $f_1(\sigma) = -eK^{-1}(\sigma)\det K(\sigma)$. Позначимо через $F(\sigma) = \begin{pmatrix} f_1(\sigma) \\ \vdots \\ f_m(\sigma) \end{pmatrix}$ матрицю $(m \times m)$ таку, що

$$f_j(\sigma) = f_1(\sigma)A^{j-1}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{17}$$

Покажемо, що $\det F(\sigma) \neq 0$. З (16), (17) випливає

$$f_j(\sigma)B(\sigma) = f_1(\sigma)A^{j-1}(\sigma)B(\sigma) = -\delta_{jm} \det K(\sigma), \quad j = \overline{1, m}, \tag{18}$$

де δ_{jm} — символ Кронекера. Нехай $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$, — довільні сталі. Тоді, враховуючи (18), одержуємо, що якщо

$$0 = (c_1, \ldots, c_m)F(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(\sigma), \tag{19}$$

то $0 = (c_1, \ldots, c_m)F(\sigma)B(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(\sigma)B(\sigma) = c_m f_m(\sigma)B(\sigma) = -c_m \det K(\sigma)$, тобто $c_m = 0$. Далі, помноживши співвідношення (19) почергово на $A(\sigma)B(\sigma)$, $A^2(\sigma)B(\sigma), \ldots, A^{m-1}(\sigma)B(\sigma)$, можемо зробити висновок, що $c_{m-1} = c_{m-2} = \ldots = c_1 = 0$. А це означає, що рядки матриці $F(\sigma)$ лінійно незалежні, отже вона невироджена. Виконаємо в системі (6) заміну змінних $V(\sigma) = F(\sigma)\upsilon(\sigma)$. Після заміни ця система набере вигляду

$$\frac{\partial V(\sigma, t)}{\partial t} = \left(\tilde{A}(\sigma) + \tilde{B}(\sigma)\tilde{P}(\sigma)\right)V(\sigma, t), \tag{20}$$

де $\tilde{A}(\sigma) = F(\sigma)A(\sigma)F^{-1}(\sigma)$, $\tilde{B}(\sigma) = F(\sigma)B(\sigma)$, $\tilde{P}(\sigma) = P(\sigma)F^{-1}(\sigma)$. Використовуючи (18) та позначаючи через $f_j^1(\sigma)$, $j = \overline{1, m}$, стовпці матриці $F^{-1}(\sigma)$, одержуємо

$$\tilde{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(\sigma) & -a_1(\sigma) & \cdots & -a_{m-1}(\sigma) \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\det K(\sigma) \end{pmatrix},$$

де $a_{j-1}(\sigma) = f_m(\sigma)A(\sigma) f_j^1(\sigma)$, $j = \overline{1, m}$. З іншого боку, оскільки $\det(A(\sigma) - \lambda I) = \det(\tilde{A}(\sigma) - \lambda I)$, то a_j, $j = \overline{0, m-1}$, — коефіцієнти характеристичного полінома матриці $A(\sigma)$: $\det(A(\sigma) - \lambda I) = \lambda^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(\sigma)\lambda^j$. Отже, позначаючи $\tilde{P}(\sigma) = (\tilde{p}_1(\sigma), \ldots, \tilde{p}_m(\sigma))$, робимо висновок, що система (20) еквівалентна диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^n \tilde{\upsilon}(\sigma, t)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(\sigma) \frac{\partial^j \tilde{\upsilon}(\sigma, t)}{\partial t^j} + \det K(\sigma) \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_j(\sigma) \frac{\partial^j \tilde{\upsilon}(\sigma, t)}{\partial t^j} = 0, \tag{21}$$

де $a_j(\sigma)$, $j = \overline{0, m-1}$, визначені для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^n$. У роботі [12] доведено (див. лему 3 з цієї роботи), що існує невід'ємний поліном $r(\sigma)$, що задовольняє умову

$$\forall\sigma\in\mathbb{R}^n \quad \Lambda_0(\sigma)-|\det K(\sigma)|^2 r(\sigma) < 0. \tag{22}$$

Тоді якщо ми позначимо через $\tilde{p}_j(\sigma)$ коефіцієнт при λ^{j-1}, $j=\overline{1,m}$, полінома

$$\overline{\det K(\sigma)}\, r(\sigma)\sum_{j=0}^{m-1}\left(|\det K(\sigma)|^2 r(\sigma)\right)^l \sum_{j=0}^{m-1} C_{j+l+1}^{l+1} a_{j+l+1}(\sigma)\lambda^j, \tag{23}$$

де $a_m(\sigma)\equiv 1$, $C_p^k = p!/(k!(p-k)!)$, то (див. лему 2 з роботи [12])

$$\forall\sigma\in\mathbb{R}^n \quad h(\sigma,\lambda)\equiv\lambda^m+\sum_{j=0}^{m-1}(a_j(\sigma)+\tilde{p}_j(\sigma))\lambda^j = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda < 0. \tag{24}$$

Позначимо $P(\sigma)=\tilde{P}(\sigma)F(\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$. Для $\sigma\in\Omega$ маємо

$$\det\left[(A(\sigma)+B(\sigma)P(\sigma))-\lambda I\right] = \det\left[(\tilde{A}(\sigma)+\tilde{B}(\sigma)\tilde{P}(\sigma))-\lambda I\right] = h(\sigma,\lambda).$$

Оскільки $h(\sigma,\lambda)$ — поліном від σ і λ, то $\det[(A(\sigma)+B(\sigma)P(\sigma))-\lambda I] = h(\sigma,\lambda)$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Тому (див. (24)) $\Lambda_p(\sigma)<0$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$. Твердження доведено.

З твердження 3 безпосередньо одержуємо теорему 2.

***Приклад* 1.** Розглянемо систему, яка відповідає телеграфному рівнянню:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial t} &= w_2+b_1(D_x)u,\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x\in\mathbb{R}^3,\quad t\ge 0,\\ \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \Delta w_1-2kw_2+b_2(D_x)u,\end{aligned} \tag{25}$$

де b_1, b_2 — довільні поліноми від $\sigma\in\mathbb{R}^3$ (при $k=0$ ця система відповідає хвильовому рівнянню). Маємо

$$A(\sigma)\equiv\begin{pmatrix}0 & 1\\ -|\sigma|^2 & -2k\end{pmatrix},\quad B(\sigma)\equiv\begin{pmatrix}b_1(\sigma)\\ b_2(\sigma)\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$K(\sigma)\equiv\begin{pmatrix}b_1(\sigma) & b_2(\sigma)\\ b_2(\sigma) & -|\sigma|^2 b_1(\sigma)-2k\,b_2(\sigma)\end{pmatrix},$$

$$\det K \equiv -\left(|\sigma|^2 b_1^2(\sigma)+2k\,b_1(\sigma)b_2(\sigma)+b_2^2(\sigma)\right).$$

Оскільки

$$\lambda_\pm(\sigma)\equiv -k\pm\left[\begin{array}{ll}\sqrt{k^2-|\sigma|^2}, & \text{якщо}\quad |\sigma|\le k;\\ i\sqrt{|\sigma|^2-k^2}, & \text{якщо}\quad |\sigma|\ge k,\end{array}\right.$$

є власними значеннями матриці $A(\sigma)$, то

$$\forall\sigma\in\mathbb{R}^3\quad[\det(A(\sigma)-\lambda I)=0\Rightarrow 0\le\operatorname{Re}\lambda\le -2k],\qquad\text{якщо}\quad k\le 0, \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\{\forall\sigma\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\,[\det(A(\sigma)-\lambda I)=0\Rightarrow\operatorname{Re}\lambda<0]\}\vee\\ \vee\{\det A(\sigma)=0\},\quad\text{якщо}\quad k>0.\end{gathered} \tag{27}$$

Скориставшись (6) та теоремою 2, одержуємо, що справедливі два твердження:

Якщо $k \le 0$, *то систему* (25) *можливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання* $\gamma \ge 0$ *в тому і тільки в тому випадку, коли*

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^3 \qquad \det K(\sigma) \neq 0. \tag{28}$$

Якщо $k > 0$, *то систему* (25) *можливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання* $\gamma \ge 0$ *в тому і тільки в тому випадку, коли*

$$\det K(0) \neq 0. \tag{29}$$

Припустимо, що у випадку $k \le 0$ система (25) задовольняє умову (28), а у випадку $k > 0$ — умову (29). Тоді (див. доведення твердження 3) керування, яке стабілізує систему (25), має вигляд (див. (23)) $u(x, t) \equiv P(D_x)$, де

$$P(\sigma) \equiv \overline{\det K(\sigma)}\, r(\sigma)\Big(|\det K(\sigma)|^2 r(\sigma) + 2k,\ 2\Big), \tag{30}$$

$r(\sigma)$ — невід'ємний поліном, що задовольняє умову (22),

$$F(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} -b_2(\sigma) & b_1(\sigma) \\ -b_1(\sigma)|\sigma|^2 & -b_2(\sigma) - 2k\, b_1(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Для деяких конкретних b_1 та b_2 дослідимо детально випадки: 1) $k < 0$, 2) $k = 0$, 3) $k > 0$.

1. Нехай $k < 0$, $b_1(\sigma) \equiv -2k$, $b_2(\sigma) \equiv |\sigma|^2 - k^2$. Тоді

$$\det K(\sigma) \equiv -(|\sigma|^2 - k^2)^2 - 4k^2 < -4k^2 < 0.$$

Тому умову (28) виконано. Враховуючи (26), одержуємо, що $r(\sigma) \equiv -1/k > 0$ задовольняє умову (22). З (30) випливає, що керування $u(x, t) \equiv P(D_x)\, w(x, t)$ з

$$P(\sigma) \equiv \frac{1}{k}\Big[\big(|\sigma|^2 - k^2\big)^2 - 4k^2\Big]\Big(\frac{1}{k}\Big[\big(|\sigma|^2 - k^2\big) - 4k^2\Big]^2 - 2k,\ 2\Big) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} -|\sigma|^2 + k^2 & -2k \\ 2k|\sigma|^2 & -|\sigma|^2 + 5k^2 \end{pmatrix}$$

стабілізує систему (25).

2. Нехай $k = 0$, $b_1(\sigma) \equiv 1$, $b_2(\sigma) \equiv i\sigma_2 + 1$. Тоді

$$\det K(\sigma) \equiv -|\sigma|^2 - (i\sigma_2 + 1)^2 \equiv -(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + 1) - 2i\sigma_2.$$

Зрозуміло, що

$$|\det K(\sigma)|^2 \equiv (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1)^2 + 4\sigma_2^2 \ge 1.$$

Тому умову (28) виконано. Враховуючи (26), одержуємо, що $r(\sigma) \equiv 1$ задовольняє умову (22). З (30) випливає, що керування $u(x, t) \equiv P(D_x)\, w(x, t)$ з

$$P(\sigma) \equiv \Big[-(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + 1) + 2i\sigma_2\Big]\Big((\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + 1)^2 + 4\sigma_2^2,\ 2\Big)\begin{pmatrix} -i\sigma_2 - 1 & 1 \\ -|\sigma|^2 & -i\sigma_2 - 1 \end{pmatrix}$$

стабілізує систему (25).

3. Нехай $k > 0$, $b_1(\sigma) \equiv \sigma_2$, $b_2(\sigma) \equiv \sigma_1 + 1$. Тоді

$$\det K(\sigma) \equiv -\Big(|\sigma|^2 \sigma^2 + 2k\sigma_2(\sigma_1 + 1) + (\sigma_1 + 1)^2\Big).$$

Зрозуміло, що $\det K(0) = 1 \neq 0$, тому умову (29) виконано. Враховуючи (27), одержуємо, що $r(\sigma) \equiv 1$ задовольняє умову (22). З (30) випливає, що керування $u(x, t) \equiv P(D_x)\, w(x, t)$ з

$$P(\sigma) \equiv -\left[|\sigma|^2 \sigma_2^2 + 2k\sigma_2(\sigma_1+1) + (\sigma_1+1)^2\right] \times$$
$$\times \left(\left[|\sigma|^2 \sigma_2^2 + 2k\sigma_2(\sigma_1+1) + (\sigma_1+1)^2\right]^2 + 2k,\ 2\right) \begin{pmatrix} -\sigma_1 - 1 & \sigma_2 \\ -|\sigma|^2 \sigma_2 & -\sigma_1 - 1 - 2k\sigma_2 \end{pmatrix}$$

стабілізує систему (25).

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} &= -\Delta w_2 + b_1(D_x)u, \\ & \qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \Delta w_1 + b_2(D_x)u, \end{aligned} \tag{31}$$

де b_1, b_2 — довільні поліноми від $\sigma \in \mathbb{R}^3$. Маємо

$$A(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} 0 & |\sigma|^2 \\ -|\sigma|^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} b_1(\sigma) \\ b_2(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$K(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} b_1(\sigma) & |\sigma|^2 b_2(\sigma) \\ b_2(\sigma) & -|\sigma|^2 b_1(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A(0) = 0$ та $\det K(0) = 0$, то, застосовуючи висновок 1, одержуємо, що для будь-яких поліномів b_1, b_2 систему (31) неможливо стабілізувати у класі функцій поліноміального зростання $\gamma \geq 0$.

1. *Triggiani R.* On the stabilizability problem in Banach space // J. Math. Anal. and Appl. – 1975. – **52**. – P. 383–403.
2. *Curtain R. F.* Equivalence of input-output stability and exponential stability for infinite dimensional systems // Math. Syst. Theory. – 1988. – **21**. – P. 19–48.
3. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* К вопросу о сильной стабилизируемости сжимающих систем в гильбертовых пространствах // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 11. – С. 1862–1869.
4. *Boyadrhiev K. N., Levan N.* Strong stability of Hilbert space contraction semigroups // Stud. sci. math. hung. – 1995. – **30**, № 304. – P. 165–182.
5. *Ammar Khodja F., Benabdallakh A.* Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôleur dynamique // C. r. Acad. sci. Sér. I. Math. – 1995. – **321**, № 2. – P. 195–198.
6. *Rebarber R., Townley S.* Robustness with respect to delays for exponential stability of distributed parameter systems // SIAM J. Contr. Optim. – 1998. – **37**, № 1. – P. 230–244.
7. *Петровский И. Г.* О проблеме Cauchy для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
9. *Seidenberg A.* A new decision method for elementary algebra // Ann. Math. – 1954. – **60**, № 2. – P. 365–374.
10. *Hörmander L.* The analysis of linear differential operators // Differential operators with constant coefficients. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983. – Vol. 2.
11. *Hörmander L.* On the division of distributions by polynomials // Ark. mat. – 1958. – **3**, H. 6. – S. 555–568.
12. *Фардигола Л. В.* Критерий стабилизируемости во всем пространстве дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 12. – С. 1699–1706.
13. *Fardigola L. V.* On stabilizability of evolution systems of partial differential equations on $\mathbb{R}^n \times$ $\times [0, \infty)$ by feedback control // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2000. – № 475. – С. 183–194.

Одержано 20.03.2001