УДК 517.9 + 531.19

В. І. Герасименко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Т. В. Рябуха (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка; Ін-т математики НАН України, Київ)

КУМУЛЯНТНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛАНЦЮЖКІВ РІВНЯНЬ БОГОЛЮБОВА*

We construct the cumulant representation of solutions of the Cauchy problem for the Bogolyubov chain of equations (BBGKY hierarchy) and for the dual chain of equations. We define a concept of a dual nonequilibrium claster expansion. We investigate the convergence of the constructed claster expansions in the corresponding functional spaces.

Побудовано кумулянтне зображення розв'язків задачі Коші ланцюжка рівнянь Боголюбова (ієрархії ББГКІ) та двоїстого (дуального) ланцюжка рівнянь. Визначено поняття дуального нерівноважного розкладу. Досліджено збіжність побудованих кластерних розкладів у відповідних функціональних просторах.

Вступ. Як відомо [1, 2], еволюція станів нескінченночастинкових систем описується ланцюжком рівнянь Боголюбова (ієрархією рівнянь ББГКІ). Розв'язок задачі Коші для цих рівнянь подається як певний розклад по групах (кластерах) зростаючого числа частинок у вигляді ряду ітерацій або функціонального ряду — нерівноважного кластерного розкладу [1 – 5]. У просторі послідовностей інтегровних функцій функціональне зображення розв'язку визначається також як однопараметрична група еволюційних операторів [3]. За останні двадцять років розвитку математичної теорії ланцюжків рівнянь Боголюбова став зрозумілим той факт, що для побудови їх розв'язків у відповідних функціональних просторах необхідно враховувати детальну інформацію про еволюцію окремих скінченних груп частинок нескінченночастинкової системи.

У даній роботі для розв'язку початкової задачі ланцюжка рівнянь Боголюбова побудовано нове зображення, що дозволяє детально описати кластерний характер еволюції багаточастинкових систем, а саме, розв'язок подається як розклад по групах частинок, еволюція яких визначається кумулянтом (семіінваріантом) еволюційного оператора даної групи частинок.

Ще одна можливість описати еволюцію нескінченночастинкових систем грунтується на дуальному (двоїстому) ланцюжку рівнянь Боголюбова, яким визначається еволюція спостережуваних величин системи [6, 7]. Незважаючи на суттєво інший у порівнянні зі звичайним ланцюжком рівнянь Боголюбова тип еволюційних рівнянь, виявилось, що структура еволюційного оператора, яким у розкладі для розв'язку визначається еволюція окремих груп частинок, та ж, що й описана вище.

Коротко охарактеризуємо зміст роботи. У першому пункті сформульовано метод рекурентних співвідношень побудови розв'язку початкової задачі для ланцюжка рівнянь Боголюбова. У наступному пункті визначено кумулянти еволюційного оператора скінченних груп частинок, у термінах яких описується кластерний характер еволюції багаточастинкових систем. У третьому пункті побудовано кумулянтне зображення розв'язків ланцюжка рівнянь Боголюбова і доведено його еквівалентність раніше відомому зображенню. Розглянуто питання збіжності отриманого розкладу для розв'язку у просторах послідовностей інтегровних та обмежених функцій. У четвертому пункті сформульовано метод рекурентних співвідношень побудови розв'язків дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова. В останньому пункті побудовано кумулянтне зображення для розв'язку дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова на основі дуальних кластерних розкладів еволюційного оператора скінченних груп частинок. Доводиться еквівалентність цього зображення раніше відомому зображенню для розв'язку. Досліджено існування функціоналів для середніх значень спостере-

* Виконана при частковій підтримці INTAS (грант № 001-15).

жуваних величин, які визначаються побудованими розкладами по кумулянтах у відповідних функціональних просторах.

1. Метод рекурентних співвідношень побудови розв'язків ланцюжка рівнянь Боголюбова. Розглянемо задачу Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова класичної нескінченної системи тотожних частинок [1]. Якщо $F(0) = (1, F_1(0, x_1), \ldots, F_s(0, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ — послідовність s-частинкових початкових функцій розподілу $F_s(0, x_1, \ldots, x_s)$, симетричних відносно $x_i \equiv (q_i, p_i) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$, $\nu \geq 1$, то розв'язок $F(t) = (1, F_1(t, x_1), \ldots, F_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ задачі Коші зображується таким (кластерним) розкладом [1]:

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)^n} dx_{s+1} \ldots dx_{s+n} U_{(n)}(t, x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) F_{s+n}(0, x_1, \ldots, x_{s+n}), \\ s \geq 1. \tag{1}$$

Еволюційний оператор $U_{(n)}(t)$ в (1) визначається виразом

$$U_{(n)}(t, x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) = \\ = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} S_{s+n-k}(-t, x_1, \ldots, x_{s+n-k}), \quad n \geq 0, \tag{2}$$

де еволюційний оператор $S_n(-t, x_1, \ldots, x_n)$ рівняння Ліувілля описує динаміку системи скінченного числа n частинок

$$S_n(-t, x_1, \ldots, x_n) f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_n(X_1(-t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n(-t, x_1, \ldots, x_n)). \tag{3}$$

Тут $X_i(-t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, — розв'язок початкової задачі для рівнянь Гамільтона системи n частинок з початковими даними $X_i(0, x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, ($S_n(0) = I$ — одиничний оператор). Оператор (3) визначено, наприклад, у просторі інтегровних функцій $f_n \in L^1(\mathbb{R}^{\nu n} \times \mathbb{R}^{\nu n}) \equiv L^1_n$ і його властивості описано в монографії [1], зокрема $\| S_n(-t) \|_{L^1_n} = 1$, тобто $\| U_{(n)}(t) \|_{L^1_{s+n}} \leq 2^n$, і ряд (1) є збіжним в $L^1 = \oplus_{n=0}^{\infty} L^1_n$.

Еволюційний оператор (2) є розв'язком рекурентних співвідношень

$$S_{s+n}(-t, x_1, \ldots, x_{s+n}) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} U_{(k)}(t, x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}), \quad n \geq 0. \tag{4}$$

Дійсно, підставляючи вираз (2) у праву частину рівності (4), після зміни порядку підсумовування маємо

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{k!}{l!(k-l)!} S_{s+k-l}(-t, x_1, \ldots, x_{s+k-l}) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \frac{k!}{(k-m)!m!} S_{s+m}(-t, x_1, \ldots, x_{s+m}) = \\ = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} S_{s+m}(-t, x_1, \ldots, x_{s+m}) \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} S_{s+m}(-t, x_1, \ldots, x_{s+m}) \delta_{n-m,0} = S_{s+n}(-t, x_1, \ldots, x_{s+n}),$$

де $\delta_{n-m,0}$ — символ Кронекера.

Рекурентні співвідношення (4) можна покласти в основу побудови розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова у формі розкладу (1). А саме, якщо задати розклад еволюційного оператора $S_{s+n}(-t)$ по операторах $U_{(k)}(t)$ у вигляді співвідношень (4), то розв'язок початкової задачі для ланцюжка рівнянь Боголюбова зображується розкладом (1). Дійсно, s-частинкові функції розподілу $F_s(t)$, що задовольняють ланцюжок рівнянь Боголюбова, визначаються виразом [1, 5]

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \Xi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)^n} dx_{s+1} \ldots dx_{s+n} (S_{s+n}(-t) D_{s+n}(0))(x_1, \ldots, x_{s+n}), \tag{5}$$

де $S_{s+n}(-t) D_{s+n}(0)$ — розв'язок (3) задачі Коші для рівняння Ліувілля системи $s+n$ частинок з початковими даними $D_{s+n}(0) \equiv D_{s+n}(0, x_1, \ldots, x_{s+n})$. Ξ — нормуючий множник (велика статистична сума):

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n D_n(0, x_1, \ldots, x_n).$$

Якщо $D_n(0) \in L^1(\mathbb{R}^{\nu n} \times \mathbb{R}^{\nu n})$, то послідовність (5) існує і належить простору послідовностей інтегровних функцій $L^1 = \oplus_{n=0}^{\infty} L^1(\mathbb{R}^{\nu n} \times \mathbb{R}^{\nu n})$.

Враховуючи розклад (4) для еволюційного оператора $S_{s+n}(-t)$, вираз (5) записуємо у вигляді

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \Xi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_{s+1} \ldots dx_{s+n} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} U_{(k)}(t, x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}) D_{s+n}(0, x_1, \ldots, x_{s+n}) =$$

$$= \Xi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_{s+1} \ldots dx_{s+n} U_{(n)}(t, x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int dx_{s+n+1} \ldots dx_{s+n+k} D_{s+n+k}(0, x_1, \ldots, x_{s+n+k}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_{s+1} \ldots dx_{s+n} U_{(n)}(t, x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) F_{s+n}(0, x_1, \ldots, x_{s+n}),$$

де остання рівність є наслідком означення (5) у початковий момент, тобто для функцій $F_{s+n}(0)$.

Таким чином, рекурентні співвідношення (4) цілком характеризують еволюційні оператори $U_{(n)}(t)$ з формули (1) і описують їх як члени певного розкладу (4) заданого еволюційного оператора $S_{s+n}(-t)$, що визначає еволюцію системи $s+n$ частинок.

Зауважимо, що розв'язок (1), (2) можна побудувати різними методами: на основі ряду теорії збурень (ітерацій) ланцюжка рівнянь Боголюбова [3] або операторним методом [4, 5]. Внаслідок теореми Ліувілля [1] зображення (2) для еволюційного оператора $U_{(n)}(t)$ з розкладу (1) не є єдиним (див. (11)). Хоча всі такі зображення для оператора $U_{(n)}(t)$ еквівалентні, природно серед них визначити в певному сенсі виділене зображення, що дозволяло б явно описувати необхідні для розв'язку (1) властивості. Для цього рекурентні співвідношення (4) в подальшому будуть використані в зображенні, що характеризує оператори $U_{(n)}(t)$ як кумулянти еволюційного оператора $S_{s+n}(-t)$ (3).

2. Кластерні розклади еволюційних операторів. Введемо кумулянти еволюційного оператора (3) системи $s+n$ частинок. Нехай $(x_1, \ldots, x_s) \equiv Y$, $(Y, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) \equiv X$, тобто $(x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) = X \setminus Y$, символ $|X| = |Y| + |X \setminus Y| = s + n$ означає число елементів множини X.

Кумулянти $\mathfrak{A}_{(n)}(t)$, $n \geq 0$, еволюційного оператора $S_{s+n}(-t)$ (3) визначаються як розв'язки рекурентних співвідношень — кластерних розкладів еволюційного оператора (3)

$$S_{|X|}(-t, Y, X \setminus Y) = \sum_{P:\{Y, X\setminus Y\} = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset P} \mathfrak{A}_{(|X_i|-1)}(t, X_i), \tag{6}$$

$$n = |X \setminus Y| \geq 0,$$

де $\sum_P$ — сума по всіх можливих розбиттях множини $\{Y, X \setminus Y\}$ на $|P|$ непорожніх підмножин $X_i \subset \{Y, X \setminus Y\}$, що взаємно не перетинаються, $X_i \cap X_j = \emptyset$, а множина Y цілком належить одній із підмножин X_i. Відмітимо ту обставину, що множина Y у розкладі (6) трактується як одна змінна, подібна до змінних $(x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) = X \setminus Y$, і тому використовується позначення $(|Y|) = 1$. Наприклад, якщо $|X \setminus Y| = 0, 1, 2$, рекурентні співвідношення (6) мають відповідно вигляд

$$S_{|Y|}(-t, Y) = \mathfrak{A}_{(0)}(t, Y), \tag{6a}$$

$$S_{|Y|+1}(-t, Y, x_{s+1}) = \mathfrak{A}_{(1)}(t, Y, x_{s+1}) + \mathfrak{A}_{(0)}(t, Y)\mathfrak{A}_{(0)}(t, x_{s+1}), \tag{6b}$$

$$\begin{aligned} S_{|Y|+2}(-t, Y, x_{s+1}, x_{s+2}) &= \mathfrak{A}_{(2)}(t, Y, x_{s+1}, x_{s+2}) + \\ &+ \mathfrak{A}_{(1)}(t, Y, x_{s+1})\mathfrak{A}_{(0)}(t, x_{s+2}) + \mathfrak{A}_{(1)}(t, Y, x_{s+2})\mathfrak{A}_{(0)}(t, x_{s+1}) + \\ &+ \mathfrak{A}_{(0)}(t, Y)\mathfrak{A}_{(1)}(t, x_{s+1}, x_{s+2}) + \mathfrak{A}_{(0)}(t, Y)\mathfrak{A}_{(0)}(t, x_{s+1})\mathfrak{A}_{(0)}(t, x_{s+2}). \end{aligned} \tag{6c}$$

Розв'язуючи співвідношення (6a) – (6c), отримуємо приклади відповідних $(|X \setminus Y| = 0, 1, 2)$ кумулянтів еволюційного оператора $S_{|X|}(-t, X)$:

$$\mathfrak{A}_{(0)}(t, Y) = S_s(-t, Y), \tag{7a}$$

$$\mathfrak{A}_{(1)}(t, Y, x_{s+1}) = S_{s+1}(-t, Y, x_{s+1}) - S_s(-t, Y)S_1(-t, x_{s+1}), \tag{7b}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{(2)}(t, Y, x_{s+1}, x_{s+2}) &= S_{s+2}(-t, Y, x_{s+1}, x_{s+2}) - \\ &- S_{s+1}(-t, Y, x_{s+1})S_1(-t, x_{s+2}) - S_{s+1}(-t, Y, x_{s+2})S_1(-t, x_{s+1}) - \\ &- S_s(-t, Y)S_2(-t, x_{s+1}, x_{s+2}) + 2!\,S_s(-t, Y)S_1(-t, x_{s+1})S_1(-t, x_{s+2}). \end{aligned} \tag{7c}$$

У загальному випадку справедлива така лема.

Лема 1. *Розв'язок рекурентних співвідношень* (6) *визначається виразом*

$$\mathfrak{A}_{(|X\setminus Y|)}(-t, Y, X \setminus Y) = \sum_{P:\{Y, X\setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i), \tag{7}$$

$$n = |X \setminus Y| \geq 0.$$

де $\sum_P$ *— сума по всіх можливих розбиттях множини* $\{Y, X\setminus Y\}$ *на* $|P|$ *непорожніх підмножин* $X_i \subset \{Y, X\setminus Y\}$, *що взаємно не перетинаються,* $X_i \cap \cap X_j = \varnothing$, *а множина* Y *цілком належить одній із підмножин* X_i.

Доведення. Розглянемо множину послідовностей $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1(x_1), \ldots \ldots, \Psi_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ операторів Ψ_n типу (3) (Ψ_0 — оператор, що домножує функцію на довільне число), в якій введемо тензорний $*$-добуток

$$(\Psi_1 * \Psi_2)_{|X|}(X) = \sum_{Y\subset X} (\Psi_1)_{|Y|}(Y)(\Psi_2)_{|X\setminus Y|}(X\setminus Y),$$

де $\sum_{Y\subset X}$ — сума по всіх підмножинах Y множини $X \equiv (x_1, \ldots, x_n)$. Подібний добуток використовується при дослідженні рівноважних кореляційних функцій алгебраїчним методом [8]. Введемо також позначення $(\mathfrak{A}(t))_{1+n}(Y, x_{s+1}, \ldots \ldots, x_{s+n}) \equiv (\mathfrak{A}(t))_{1+n}(Y, X\setminus Y) = \mathfrak{A}_{(n)}(t, Y, X\setminus Y) \equiv \mathfrak{A}_{|Y|+n}(t, Y, X\setminus Y)$.

Згідно з означенням $*$-добутку для послідовності $\mathfrak{A}(t) = (0, (\mathfrak{A}(t))_1(Y), (\mathfrak{A}(t))_2, (Y, x_{s+1}), \ldots)$ справедлива рівність

$$\sum_{P:\{Y, X\setminus Y\} = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset P} \mathfrak{A}_{(|X_i|-1)}(t, X_i) = (\mathrm{Exp}_* \mathfrak{A}(t))_{1+n}(Y, X\setminus Y),$$

$$n = |X\setminus Y| \geq 0,$$

де відображення Exp_* визначається як $*$-експонента, тобто

$$\mathrm{Exp}_* \Psi = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\Psi * \ldots * \Psi}_{n},$$

$\Psi \equiv (0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n, \ldots)$ та $\mathbf{1} \equiv (1, 0, 0, \ldots)$ — одинична послідовність.

В результаті рекурентні співвідношення (6) можна записати у вигляді

$$\mathbf{1} + S(-t) = \mathrm{Exp}_* \mathfrak{A}(t),$$

де елементами послідовності $S(-t) \equiv (0, (S(-t))_1(Y), (S(-t))_2(Y, x_{s+1}), \ldots)$ є еволюційні оператори $((S(-t))_{1+n}(Y, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) \equiv S_{|Y|+n}(-t, Y, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n})$.

Аналогічно, визначаючи на послідовностях $\Psi \equiv (0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n, \ldots)$ відображення Ln_* як обернене до відображення Exp_*, тобто

$$\mathrm{Ln}_*(\mathbf{1} + \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underbrace{\Psi * \ldots * \Psi}_{n},$$

одержуємо рівність

$$\sum_{P:\{Y, X\setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i) =$$

$$= (\mathrm{Ln}_*(\mathbf{1} + S(-t))_{1+n}(Y, X\setminus Y), \quad n = |X\setminus Y| \geq 0.$$

В результаті співвідношення (7) записується у вигляді

$$\mathfrak{A}(t) = \mathrm{Ln}_*(\mathbf{1} + S(-t)), \tag{8}$$

і, отже, вираз (7) є розв'язком співвідношень (6).

Зауваження 1. У монографії [2] зображення (7) для еволюційного оператора $\mathfrak{A}_{(n)}(t)$ розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова було побудовано на основі інших міркувань. А саме, вираз (7) отримано як розв'язок (лінійних) рекурентних співвідношень

$$S_{|Y|+n}(-t, Y, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) = \mathfrak{A}_{(0)}(t, Y) S_n(-t, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_k = s+1}^{s+n} \mathfrak{A}_{(k)}(t, Y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) S_{n-k}\Big(-t, x_{s+1}, \ldots, \overset{i_1}{\vee}, \ldots, \overset{i_k}{\vee}, \ldots, x_{s+n}\Big),$$
$$|Y| = s, \quad n \geq 0, \tag{9}$$

де $\Big(x_1, \ldots, \overset{i}{\vee}, \ldots, x_n\Big) \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Співвідношення (9) визначались на основі того, щоб після їх підстановки в означення (5) s-частинкових функцій розподілу вираз (5) перетворювався на розклад (1). Очевидно, що рекурентні співвідношення (9) є наслідком співвідношень (6). Дійсно, оскільки у виразі (6) кожний добуток $\prod_{X_i \subset P} \mathfrak{A}_{(|X_i|-1)}(t, X_i)$ містить тільки один еволюційний оператор, що діє на групу змінних Y, то після підстановки в (6) явних виразів (7) для еволюційних операторів, що не діють на змінні Y, приходимо до лінійної версії (9) рекурентних співвідношень (6).

Зауважимо, що кілька перших членів розкладу (1), (7) для одно- та двочастинкової функцій розподілу було знайдено в роботі [9] за допомогою кластерного розкладу типу (9) як нерівноважного аналога рівноважних кластерних розкладів (див. також [10]).

3. Кумулянтне зображення розв'язків. Згідно з кластерним розкладом (7) розв'язок задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова в кумулянтному зображенні визначається формулою

$$F_{|Y|}(t, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(X \setminus Y) \sum_{P:\, \{Y, X\setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \times$$
$$\times \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i) F_X(0, Y, X \setminus Y), \tag{10}$$

де використано ті ж позначення, що й для виразів (6), (7). Підінтегральний вираз кожного члена розкладу (10) має природну інтерпретацію. Він описує, з яких невзаємодіючих груп частинок у процесі еволюції може складатися система із відповідного числа частинок за умови, що група $|Y|$ частинок еволюціонує як один кластер.

Доведемо, що зображення (10) та (1), (2) розв'язку ланцюжка рівнянь Боголюбова є еквівалентними. Дійсно, внаслідок теореми Ліувілля [2]

$$\int d(X \setminus Y) S_{|Z|}(-t, Z) F_{|X|}(0, Y, X \setminus Y) = \int d(X \setminus Y) F_{|X|}(0, Y, X \setminus Y), \tag{11}$$

де $Z \subset X \setminus Y$ — довільна підмножина множини $X \setminus Y$, для n-го члена ряду (10) має місце рівність

$$\int d(X \setminus Y) \sum_{P:\, \{Y, X\setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i) F_{|X|}(0, Y, X \setminus Y) =$$
$$= \int d(X \setminus Y) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-k} = s+1}^{s+n} S_{|Y|+n-k}\Big(-t, Y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}\Big) F_{|X|}(0, Y, X \setminus Y). \tag{12}$$

Враховуючи симетричність початкових функцій $F_{|X|}(0, Y, X \setminus Y)$, з (12) остаточно маємо

$$\int d(X \setminus Y) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-k} = s+1}^{s+n} S_{|Y|+n-k}\big(-t, Y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}\big) F_{|X|}(0, Y, X \setminus Y) =$$

$$= \int dx_{s+1} \ldots dx_{s+n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \times$$

$$\times S_{|Y|+n-k}(-t, Y, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n-k}) F_{s+n}(0, Y, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}).$$

Розглянемо питання збіжності розкладу (10) спочатку в просторі послідовностей інтегровних функцій, де не виникає проблеми з розбіжностями інтегралів для кожного члена ряду.

Нехай $L^1_\alpha = \oplus_{n=0}^{\infty} \alpha^n L^1_n$ — банахів простір послідовностей $f = (f_0, f_1(x_1), \ldots$ $\ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ симетричних інтегровних функцій $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, визначених на фазовому просторі $\mathbb{R}^{\nu n} \times \mathbb{R}^{\nu n}$ з нормою

$$\| f \| = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \| f_n \|_{L^1_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \int_{(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)^n} dx_1 \ldots dx_n \, | f_n(x_1, \ldots, x_n) |,$$

де $\alpha > 1$ — число; $L^1_{\alpha, 0} \subset L^1_\alpha$ — підпростір фінітних послідовностей неперервно диференційовних функцій з компактними носіями.

Оскільки на послідовностях інтегровних функцій $f \in L^1_\alpha$ визначено оператор знищення [1]

$$(\mathfrak{a} f)_n(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} dx_{n+1} \, f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), \tag{13}$$

формула (10) з урахуванням (8) та (13) у просторі L^1_α набирає вигляду

$$F(t) = e^{\mathfrak{a}} \mathfrak{A}(t) F(0),$$

тобто

$$F(t) = e^{\mathfrak{a}} \mathrm{Ln}_*(\mathbf{1} + S(-t)) F(0). \tag{14}$$

Для кумулянтів $\mathfrak{A}_{(n)}(t)$ (7) у просторі L^1_{s+n} справедлива така лема.

Лема 2. *Якщо* $F(0) \in L^1_{s+n}$, *то має місце оцінка*

$$\| \mathfrak{A}_{(n)}(t) F_{s+n}(0) \|_{L^1_{s+n}} \le n! e^{n+2} \| F_{s+n}(0) \|_{L^1_{s+n}}. \tag{15}$$

Доведення. Згідно з теоремою Ліувілля, тобто внаслідок рівності (11), маємо

$$\| \mathfrak{A}_{(n)}(t) F_{s+n}(0) \|_{L^1_{s+n}} \le \int dx_1 \ldots dx_{s+n} \Bigg| \sum_{P:\, \{Y, X \setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \times$$

$$\times \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i) F_{s+n}(0, Y, X \setminus Y) \Bigg| \le$$

$$\le \sum_{P:\, \{Y, X \setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (|P|-1)! \, \| F_{s+n}(0) \|_{L^1_{s+n}} = \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k)(k-1)! \, \| F_{s+n}(0) \|_{L^1_{s+n}},$$

де $s(n+1,k)$ — числа Стірлінга 2-го роду [11]. Оскільки для чисел $s(n+1,k)$ справедливе зображення

$$s(n+1,k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \geq 1 \\ r_1+\ldots+r_k = n+1}} \frac{(n+1)!}{r_1!\ldots r_k!},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n+1} s(n+1,k)(k-1)! = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \geq 1 \\ r_1+\ldots+r_k = n+1}} \frac{(n+1)!}{r_1!\ldots r_k!} \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^n \leq n!\sum_{k=1}^{n+1} e^k \leq n!e^{n+2},$$

і остаточно отримуємо (15).

Внаслідок леми 2 для функцій, які визначаються формулою (10), за умови, що $\alpha > e$, маємо оцінку

$$\| F(t) \|_{L^1_\alpha} \leq c_\alpha \| F(0) \|_{L^1_\alpha}, \tag{16}$$

де $c_\alpha = e^2(1-e/\alpha)^{-1}$ — константа.

Зауважимо, що параметр α можна інтерпретувати як величину, обернену до щільності (густини) системи $1/v$ — середнього числа частинок в одиниці об'єму. Дійсно, перенормовуючи функції $F_s(0) = \tilde{F}_s(0)/v^s$, отримуємо розклад (10) відносно параметра $1/v$, і тоді для інтегровних функцій $\tilde{F}_s(0) \in L^1_s$ за умови, що

$$\frac{1}{v} < e^{-1},$$

виконується нерівність

$$\| \tilde{F}(t) \|_{L^1} \leq c\left(\frac{1}{v}\right) \| \tilde{F}(0) \|_{L^1},$$

де $c(1/v) = e^2(1-e/v)^{-1}$ — константа.

Таким чином, згідно з (16) справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо* $F(0) \in L^1_\alpha$ *— послідовність невід'ємних функцій, то за умови, що* $\alpha > e$, *для* $t \in \mathbb{R}^1$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова — послідовність* $F(t) \in L^1_\alpha$ *невід'ємних функцій* $F_s(t)$, *які визначаються розкладом* (10) ((14)). *Для* $F(0) \in L^1_{\alpha,0}$ *— це сильний розв'язок, а для довільних початкових даних — слабкий.*

Твердження теореми 1 доводиться стандартним чином [1, 2]. Наведемо лише доведення властивості невід'ємності розв'язку (10). Дійсно, якщо $F_{|X|}(0, Y, X\setminus Y) \geq 0$, то $\mathfrak{A}_{(|X\setminus Y|)}(t, Y, X\setminus Y) F_{|X|}(0, Y, X\setminus Y) \geq 0$ для $t \in \mathbb{R}^1$ внаслідок того, що еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{(|X\setminus Y|)}(t, Y, X\setminus Y)$ є розв'язком рекурентних співвідношень (6), а заданий оператор $S_{|X|}(-t, Y, X\setminus Y)$ із лівої частини рівності (6), згідно з означенням (3), для довільних $t \in \mathbb{R}^1$ відображає множину невід'ємних функцій в себе: $S_{|X|}(-t, Y, X\setminus Y) F_{|X|}(0, Y, X\setminus Y) \geq 0$.

Розглянемо початкові дані $F(0)$ із простору $L^\infty_{\xi,\beta}$ послідовностей f неперервних симетричних функцій f_n з нормою

$$\| f \| = \sup_{n\geq 0} \xi^{-n} \sup_{x_1,\ldots,x_n} | f_n(x_1,\ldots,x_n) | \exp\left\{ \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} \right\}.$$

де $\xi, \beta > 0$ — числа. Простору $L^{\infty}_{\xi,\beta}$ належать послідовності n-частинкових функцій розподілу, що описують стани систем нескінченного числа частинок [1, 2]. У цьому випадку при побудові розв'язку, як відомо [1, 5, 9, 12], виникає проблема, пов'язана з розбіжностями інтегралів по конфігураційних змінних у кожному члені ряду (10). Зазначимо, що кумулянтна структура розкладу (10) дозволяє довести можливість скорочення подібних розбіжностей. Цю проблему детально буде розглянуто в окремій публікації.

4. Розв'язки дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова. Інший тип нерівноважних кластерних розкладів виникає з можливості описати еволюцію нескінченночастинкових систем на основі дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова [6, 7]. Як відомо, для багаточастинкових систем, стани яких описуються розв'язками (1), (2) задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова $F(t) = (1, F_1(t, x_1), \ldots, F_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$, величина середнього значення (математичне сподівання) для довільної послідовності s-частинкових спостережуваних $G(0) = (G_0, G_1(0, x_1), \ldots, G_s(0, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$, де G_0 — число, визначається таким чином:

$$\langle G\rangle(t) = \langle G(0) | F(t)\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\int dx_1\ldots dx_s G_s(0, x_1,\ldots, x_s) F_s(t, x_1,\ldots, x_s). \quad (17a)$$

Дуальний (двоїстий) спосіб опису еволюції багаточастинкових систем полягає в тому, що середні значення можуть бути визначені ще в такий спосіб:

$$\langle G\rangle(t) = \langle G(t) | F(0)\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\int dx_1\ldots dx_s G_s(t, x_1,\ldots, x_s) F_s(0, x_1,\ldots, x_s), \quad (17b)$$

де $G(t) = (G_0, G_1(t, x_1), \ldots, G_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ — послідовність, що є розв'язком задачі Коші для дуального (двоїстого) ланцюжка рівнянь Боголюбова [7].

Розв'язок задачі Коші для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова $G(t)$, очевидно, може бути побудований як спряжений в сенсі білінійної форми (17a), (17b) до розв'язку (1), (2). Такий розв'язок має вигляд

$$G_s(t, x_1, \ldots, x_s) =$$
$$= \sum_{n=0}^{s} \frac{s!}{(s-n)!n!} U^{+}_{(n)}(t, x_1,\ldots, x_{s-n}, x_{s-n+1},\ldots, x_s) G_{s-n}(0, x_1,\ldots, x_{s-n}), \quad s \geq 1. \quad (18)$$

Дуальний еволюційний оператор $U^{+}_{(n)}(t)$ у розкладі (18) визначається виразом

$$U^{+}_{(n)}(t, x_1,\ldots, x_{s-n}, x_{s-n+1},\ldots, x_s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} S_{s-k}(t, x_1,\ldots, x_{s-k}), \quad (19)$$
$$n \geq 0,$$

де еволюційний оператор $S_n(t)$ рівняння Ліувілля для спостережуваних величин системи n частинок ($S_0(t) = I$ — одиничний оператор) є спряженим у сенсі білінійної форми (17a), (17b) до еволюційного оператора $S_n(-t)$, який визначається формулою (3).

Використовуючи властивість симетричності функцій $G_s(t, x_1, \ldots, x_s)$, в сенсі білінійної форми (17a), (17b) вираз (18) можна записати так:

$$G_s(t, x_1, \ldots, x_s) =$$
$$= \sum_{n=0}^{s} \sum_{1 = j_1 < \ldots < j_{s-n}}^{s} U^{+}_{(n)}\Big(t, x_{j_1},\ldots, x_{j_{s-n}}, x_1,\ldots, \overset{j_1}{\vee}\ldots\overset{j_{s-n}}{\vee},\ldots, x_s\Big) G_{s-n}(0, x_{j_1},\ldots, x_{j_{s-n}}).$$
$$(20)$$

де $\left(x_1,\ldots,\overset{j_k}{\vee},\ldots,x_s\right)\equiv\left(x_1,\ldots,x_{j_k-1},x_{j_k+1},\ldots,x_s\right)$.

Зауважимо, що, як і у випадку оператора $U_{(n)}(t)$ (2), описаному в п.1, можна встановити, що дуальний еволюційний оператор (19) є розв'язком рекурентних співвідношень

$$S_{s-n}(t,x_1,\ldots,x_{s-n}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{s}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!k!}U^{+}_{(k)}(x_1,\ldots,x_{s-k},x_{s-k+1},\ldots,x_s), \quad 0\le n\le s. \tag{21}$$

Розв'язок у вигляді розкладу (18), (19) (або (19), (20)) може бути побудований також на основі рекурентних співвідношень (21). Нехай задано розклад еволюційного оператора $S_{s-n}(t)$ по операторах $U^{+}_{(k)}(t)$ у вигляді співвідношень (21). Тоді розв'язок початкової задачі для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова зображується розкладом (18). Дійсно, s-частинкова спостережувана $G_s(t)$, що є розв'язком дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова, визначається формулою (виразом, спряженим до (5)) [7]

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s) =$$
$$= \sum_{n=0}^{s}(-1)^n\frac{s!}{(s-n)!n!}(S_{s-n}(t)A_{s-n}(0))(x_1,\ldots,x_{s-n}), \tag{22}$$

де $S_{s-n}(t)A_{s-n}(0)$ — розв'язок задачі Коші для (дуального) рівняння Ліувілля системи $s-n$ частинок з початковими даними $A_{s-n}(0)\equiv A_{s-n}(0,x_1,\ldots,x_{s-n})$, що інтерпретуються як спостережувані величини системи $s-n$ частинок. Враховуючи розклад (21) для еволюційного оператора $S_{s-n}(t)$, вираз (22) для розв'язку після зміни порядку підсумовування перетворюємо до вигляду

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s) = \sum_{n=0}^{s}(-1)^n\frac{s!}{(s-n)!n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!k!}\times$$
$$\times U^{+}_{(k)}(t,x_1,\ldots,x_{s-k},x_{s-k+1},\ldots,x_s)A_{s-n}(0,x_1,\ldots,x_{s-n}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{s}\frac{s!}{(s-k)!k!}U^{+}_{(k)}(t,x_1,\ldots,x_{s-k},x_{s-k+1},\ldots,x_s)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{s-k}(-1)^n\frac{(s-k)!}{(s-k-n)!n!}A_{s-k-n}(0,x_1,\ldots,x_{s-k-n}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{s}\frac{s!}{(s-k)!k!}U^{+}_{(k)}(t,x_1,\ldots,x_{s-k},x_{s-k+1},\ldots,x_s)G_{s-k}(0,x_1,\ldots,x_{s-k}),$$

де остання рівність є наслідком означення (22) для початкових функцій $G_{s-k}(0)$.

Таким чином, рекурентні співвідношення (21) цілком характеризують еволюційні оператори $U^{+}_{(k)}(t)$ з формули (18) для розв'язку та описують їх як члени певного розкладу (21) заданого еволюційного оператора $S_{s-n}(t)$, що визначає еволюцію кластера $s-n$ частинок.

Зауваження 2. У випадку спостережуваних k-кратного типу для системи скінченного числа $s-n$ частинок, тобто $A_{s-n}(0, x_1, \ldots, x_{s-n}) = \sum_{i_1<\ldots<i_k=1}^{s-n} a_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, вираз (18) для розв'язку дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова спрощується. Дійсно, в цьому випадку послідовність $G^{(k)}(0) = \left(G_0, G_1^{(k)}(0, x_1), \ldots, G_s^{(k)}(0, x_1, \ldots, x_s), \ldots\right)$ початкових s-частинкових спостережуваних — однокомпонентна:

$$G_s^{(k)}(0, x_1, \ldots, x_s) = a_k(x_1, \ldots, x_k)\delta_{s,k},$$

де $\delta_{s,k}$ — символ Кронекера, $s \geq 0$, і формула (18) набирає вигляду

$$G_s^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_s) = 0, \quad 0 \leq s < k,$$

$$G_s^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_s) = \frac{s!}{k!(s-k)!}\mathfrak{A}^+_{(s-k)}(t, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_s)a_k(x_1, \ldots, x_k), \quad s \geq k.$$

Наведемо важливий приклад спостережуваної адитивного типу ($k = 1$) — спостережуваної числа частинок: $A_{s-n}(0, x_1, \ldots, x_{s-n}) = s - n = \sum_{i=1}^{s-n} 1$, тобто $a_1 = 1$. Отже, $G^{(1)}(0) = (0, 1, 0, \ldots)$ і згідно з формулами (18), (19) маємо $G_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s) = s\delta_{s-1,0}$, якщо $s \geq 1$, та $G_0^{(1)}(t) = 0$. Таким чином, якщо $F_1(0)$ — інтегровна функція, то середнє число частинок зберігається в процесі еволюції:

$$\langle N\rangle(t) = \langle G^{(1)}(t) | F(0)\rangle = \int dx_1 F_0(0, x_1) = \langle N\rangle(0).$$

Зауважимо також, що в монографії [7] формули (18), (19) було наведено в іншому вигляді, а саме:

$$G_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n=0}^{s}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!k!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k\neq i_{k+1}\neq\ldots\neq i_n=1}^{s} S_{s-k}\Big(t, x_1, \ldots, \overset{i_1}{\vee} \ldots$$

$$\ldots \overset{i_k}{\vee}, \ldots, x_s\Big) G_{s-n}\Big(0, x_1, \ldots, \overset{i_1}{\vee} \ldots \overset{i_n}{\vee}, \ldots, x_s\Big),$$

де $\left(x_1, \ldots, \overset{i}{\vee}, \ldots, x_s\right) \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s)$. Очевидно, що для симетричних функцій така форма запису еквівалентна (18), (19) в сенсі виразу (17b) для середніх значень s-частинкових спостережуваних.

5. Дуальні кластерні розклади еволюційних операторів. Для побудови розв'язку дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова в кумулянтному зображенні, подібному до зображення (10) розв'язку канонічного ланцюжка рівнянь Боголюбова, визначимо поняття дуального кумулянта еволюційного оператора $S_s(t)$.

Нехай $(x_1, \ldots, x_s) \equiv Y$, $(x_{s-n+1}, \ldots, x_s) \equiv X$ і, отже, $Y\backslash X = (x_1, \ldots, x_{s-n})$.

Кумулянти $\mathfrak{A}^+_{(n)}(t)$, $0 \leq n \leq s$, еволюційного оператора $S_s(t)$ (3) визначаються як розв'язки рекурентних співвідношень — дуальних кластерних розкладів еволюційного оператора $S_s(t)$

$$S_{|Y|}(-t, Y\backslash X, X) = \sum_{P:\{Y\backslash X, X\} = \bigcup_i X_i}\prod_{X_i \subset P}\mathfrak{A}^+_{(|X_i|-1)}(t, X_i), \tag{23}$$

$$0 \leq |X| = n \leq s,$$

де $\sum_P$ — сума по всіх можливих розбиттях множини $\{Y \setminus X, X\}$ на $|P|$ непорожніх підмножин $X_i \subset \{Y \setminus X, X\}$, що взаємно не перетинаються, $X_i \cap X_j = \varnothing$, а множина $Y \setminus X$ цілком належить одній із підмножин X_i, тобто множина $Y \setminus X$ у розкладі (23) трактується як одна змінна, подібна до змінних $(x_{s-n+1}, \ldots, x_s) = X$, і, щоб підкреслити цю обставину, використовується позначення $(|Y \setminus X|) = 1$.

Наведемо приклади співвідношень (23) у випадках $|X| = 0, 1, 2$ відповідно:

$$S_{|Y|}(t, Y) = \mathfrak{A}^+_{(0)}(t, Y), \tag{23a}$$

$$S_{|Y|}(t, Y \setminus x_s, x_s) = \mathfrak{A}^+_{(1)}(t, Y \setminus x_s, x_s) + \mathfrak{A}^+_{(0)}(t, Y \setminus x_s)\mathfrak{A}^+_{(0)}(t, x_s), \tag{23b}$$

$$\begin{aligned} S_{|Y|}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s), x_{s-1}, x_s) &= \mathfrak{A}^+_{(2)}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s), x_{s-1}, x_s) + \\ &+ \mathfrak{A}^+_{(1)}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s), x_{s-1})\mathfrak{A}^+_{(0)}(t, x_s) + \mathfrak{A}^+_{(1)}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s), x_s)\mathfrak{A}^+_{(0)}(t, x_{s-1}) + \\ &+ \mathfrak{A}^+_{(0)}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s))\mathfrak{A}^+_{(1)}(t, x_{s-1}, x_s) + \\ &+ \mathfrak{A}^+_{(0)}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s))\mathfrak{A}^+_{(0)}(t, x_{s-1})\mathfrak{A}^+_{(0)}(t, x_s). \end{aligned} \tag{23c}$$

Розв'язуючи рекурентні співвідношення (23a) – (23c), отримуємо приклади відповідних $|X| = 0, 1, 2$ кумулянтів еволюційного оператора $S_s(t)$:

$$\mathfrak{A}^+_{(0)}(t, Y) = S_{|Y|}(t, Y), \tag{24a}$$

$$\mathfrak{A}^+_{(1)}(t, Y \setminus x_s, x_s) = S_{|Y|}(t, Y) - S_{|Y|-1}(t, Y \setminus x_s)S_1(t, x_s), \tag{24b}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^+_{(2)}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s), x_{s-1}, x_s) &= S_{|Y|}(t, Y) - \\ &- S_{|Y|-1}(t, Y \setminus x_s)S_1(t, x_s) - S_{|Y|-1}(t, Y \setminus x_{s-1})S_1(t, x_{s-1}) - \\ &- S_{|Y|-2}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s))S_2(t, x_{s-1}, x_s) + \\ &+ 2!S_{|Y|-2}(t, Y \setminus (x_{s-1}, x_s))S_1(t, x_{s-1})S_1(t, x_s). \end{aligned} \tag{24c}$$

Порівнюючи вирази (24a) – (24c) та (7a) – (7c), бачимо, що в обох випадках структура виразів для кумулянтів $\mathfrak{A}^+_{(n)}(t)$ та $\mathfrak{A}_{(n)}(t)$ однакова, незважаючи на різний характер кластерного та дуального кластерного розкладів і, отже, вирази (24a) – (24c) мають ту ж саму фізичну інтерпретацію, що і (7a) – (7c) (див. (10)).

У загальному випадку справедлива така лема.

Лема 3. *Розв'язок дуальних рекурентних співвідношень* (23) *визначається виразом*

$$\mathfrak{A}^+_{(|X|)}(t, Y \setminus X, X) = \sum_{P:\, \{Y \setminus X, X\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(t, X_i), \tag{24}$$

$$0 \le |X| = n \le s,$$

де $\sum_P$ *— сума по всіх можливих розбиттях множини* $\{Y \setminus X, X\}$ *на* $|P|$ *непорожніх підмножин* $X_i \subset \{Y \setminus X, X\}$, *що взаємно не перетинаються, а множина* $Y \setminus X$ *цілком належить одній із підмножин* X_i.

Доведення. Покажемо, що вираз (24) дійсно є розв'язком дуальних рекурентних співвідношень (23). Для цього запишемо співвідношення (23) та (24) через тензорний $*$-добуток, визначений у п. 2.

Введемо позначення

$$\left(\mathfrak{A}^+(t)\right)_{1+n}(Y \setminus X, x_{s-n+1}, \ldots, x_s) \equiv \left(\mathfrak{A}^+(t)\right)_{1+n}(Y \setminus X, X) =$$

$$= \mathfrak{A}^+_{(n)}(t, Y \setminus X, X) \equiv \mathfrak{A}^+_{|Y \setminus X|+n}(t, Y \setminus X, X).$$

Для послідовності кумулянтів

$$\mathfrak{A}^+(t) = \left(0, \left(\mathfrak{A}^+(t)\right)_1(Y), \left(\mathfrak{A}^+(t)\right)_2(Y \setminus x_s, x_s), \ldots, \left(\mathfrak{A}^+(t)\right)_{1+s}(x_1, \ldots, x_s)\right)$$

справедлива рівність

$$\sum_{P:\, \{Y \setminus X, X\} = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset P} \mathfrak{A}^+_{(|X_i|-1)}(t, X_i) = \left(\mathrm{Exp}_* \mathfrak{A}^+(t)\right)_{1+n}(Y \setminus X, X).$$

$$0 \le n = |X| \le s,$$

де відображення Exp_* визначено у п. 2 як $*$-експонента.

В результаті рекурентні співвідношення (23) записуються у вигляді

$$\mathbf{1} + S(t) = \mathrm{Exp}_* \mathfrak{A}^+(t),$$

де елементами послідовності

$$S(t) \equiv (0, (S(t))_1(Y), (S(t))_2(Y \setminus x_s, x_s), \ldots, (S(t))_{1+s}(x_1, \ldots, x_s))$$

є еволюційні оператори $(S(t))_{1+n}(Y \setminus X, x_{s-n+1}, \ldots, x_s) \equiv S_{|Y|}(t, Y \setminus X, X) = S_{|Y|}(t, Y)$.

Використовуючи обернене до Exp_* відображення Ln_*, аналогічно отримуємо рівність

$$\sum_{P:\, \{Y \setminus X, X\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(t, X_i) =$$

$$= (\mathrm{Ln}_*(\mathbf{1} + S(t)))_{1+n}(Y \setminus X, X), \quad 0 \le n = |X| \le s,$$

і, отже, вираз (24) записується у вигляді

$$\mathfrak{A}^+(t) = \mathrm{Ln}_*(\mathbf{1} + S(t)), \tag{25}$$

що і доводить лему.

Таким чином, згідно з виразами (20) та (24) розв'язок задачі Коші для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова в кумулянтному зображенні визначається формулою

$$G_{|Y|}(t, Y) = \sum_{n=0}^{s} \sum_{1=j_1<\ldots<j_{s-n}}^{s} \sum_{P:\, \{Y \setminus X, X\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \times$$

$$\times \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(t, X_i) G_{|Y \setminus X|}(0, Y \setminus X), \tag{26}$$

де $Y = (x_1, \ldots, x_s)$, $Y \setminus X = \left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s-n}}\right)$ і, отже, $X = \left(x_1, \ldots, \overset{j_1}{\vee} \ldots \overset{j_{s-n}}{\vee}, \ldots, x_s\right)$. У цій формулі $\sum_P$ — сума по всіх можливих розбиттях множини $\{Y \setminus X, X\}$ на $|P|$ непорожніх підмножин $X_i \subset \{Y \setminus X, X\}$, що взаємно не перетинаються, $X_i \cap X_j = \varnothing$, а множина $Y \setminus X$ цілком належить одній із підмножин X_i.

Оскільки у просторі C_γ послідовностей $g = (g_0, g_1(x_1), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ неперервних симетричних функцій $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ з нормою

$$\|g\|_{C_\gamma} = \sup_{n \geq 0} \frac{\gamma^n}{n!} \sup_{x_1, \ldots, x_n} |g_n(x_1, \ldots, x_n)|,$$

де $0 < \gamma < 1$ — число, визначено спряжений (в сенсі функціонала (17a), (17b)) до оператора $\mathfrak{a}$ (13) оператор (народження)

$$(\mathfrak{a}^+ g)_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{1 = j_1 < \ldots < j_{n-1}}^{n} g_{n-1}\big(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}\big),$$

то в цьому просторі формула (26) з урахуванням зображення (25) записується у вигляді

$$G(t) = e^{\mathfrak{a}^+} \mathfrak{A}^+(t) G(0),$$

тобто

$$G(t) = e^{\mathfrak{a}^+} \operatorname{Ln}_*(\mathbf{1} + S(t)) G(0). \tag{27}$$

Для функцій, які визначаються розкладом (26), (27) у просторі C_γ, справедлива оцінка

$$\left|G_{|Y|}(t, Y)\right| \leq \sum_{n=0}^{s} \sum_{1 = j_1 < \ldots < j_{s-n}}^{s} \sum_{P:\, \{Y \setminus X,\, X\} = \bigcup_i X_i} (|P| - 1)! \times$$

$$\times\, (s-n)! (\gamma^{-1})^{s-n} \|G(0)\|_{C_\gamma} = \|G(0)\|_{C_\gamma} \sum_{n=0}^{s} \frac{s!}{n!} (\gamma^{-1})^{s-n} \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k)(k-1)!.$$

Оскільки для чисел Стірлінга 2-го роду виконується нерівність (див. лему 2)

$$\sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k)(k-1)! \leq n! e^{n+2},$$

то за умови, що $\gamma < e^{-1}$, маємо оцінку

$$\|G(t)\|_{C_\gamma} \leq e^2 (1 - \gamma e)^{-1} \|G(0)\|_{C_\gamma}. \tag{28}$$

Таким чином, згідно з (28) у просторі C_γ справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо $\gamma < e^{-1}$, то для початкових даних $G(0)$ з підпростору $C_{\gamma,0} \subset C_\gamma$ фінітних послідовностей неперервно диференційовних функцій з компактними носіями для $t \in \mathbb{R}^1$ розкладом (26) ((27)) визначається єдиний сильний розв'язок задачі Коші для дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова, а для довільних початкових даних $G(0) \in C_\gamma$ — слабкий розв'язок.*

Твердження теореми доводиться стандартними методами функціонального аналізу [1, 2].

Наслідком теореми є існування функціонала (17a), (17b). Якщо $F(0) \in L^1_\alpha$

та $G(0) \in C_\gamma$, внаслідок оцінки (28) функціонал (17a), (17b) існує і за умови, що $\alpha = \gamma^{-1} > e$ (або умови $1/v < e^{-1}$ на щільність), справедлива оцінка

$$|\langle G(t) | F(0) \rangle| \leq e^2 (1 - \gamma e)^{-1} \| G(0) \|_{C_\gamma} \| F(0) \|_{L^1_{\gamma^{-1}}}.$$

Якщо $F(0) \in L^\infty_{\xi, \beta}$, то при доведенні існування функціонала (17a), (17b) виникають ті ж проблеми, пов'язані з розбіжностями інтегралів за конфігураційними змінними в кожному члені ряду (17b), що й описані в п. 3.

За допомогою функціонала (17b) можна встановити, що зображення (26) та (18), (19) розв'язку дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова є еквівалентними в тому сенсі, що їх середні значення збігаються.

Дійсно, для $Z \subset X$ — довільної підмножини з $X \equiv \left(x_1, \ldots, \overset{j_1}{\vee} \ldots \overset{j_{s-n}}{\vee}, \ldots, x_s\right)$ — внаслідок справедливості рівності

$$S(t, Z) G_{|Y \setminus X|}(0, Y \setminus X) = G_{|Y \setminus X|}(0, Y \setminus X)$$

має місце рівність

$$\sum_{P: \{Y \setminus X, X\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(t, X_i) G_{|Y \setminus X|}(0, Y \setminus X) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{n-k} = 1 \\ (i_1, \ldots, i_{n-k}) \neq (j_1, \ldots, j_{s-n})}}^{s} S_{|Y \setminus X| + n - k}\left(t, Y \setminus X, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}\right) \times$$

$$\times G_{s-n}(0, Y \setminus X). \tag{29}$$

Враховуючи властивість симетричності функцій $G_{s-n}(0, Y \setminus X)$ та рівність (29), остаточно отримуємо

$$\langle G \rangle(t) = \langle G(t) | F(0) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int dY \sum_{n=0}^{s} \sum_{1 = j_1 < \ldots < j_{s-n}}^{s} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times$$

$$\times \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{n-k} = 1 \\ (i_1, \ldots, i_{n-k}) \neq (j_1, \ldots, j_{s-n})}}^{s} S_{|Y \setminus X| + n - k}\left(t, Y \setminus X, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}\right) G_{s-n}(0, Y \setminus X) F(0, Y) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int dY \sum_{n=0}^{s} \frac{s!}{(s-n)!\,n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \times$$

$$\times S_{s-k}(t, x_1, \ldots, x_{s-k}) G_{s-n}(0, x_1, \ldots, x_{s-n}) F_s(0, x_1, \ldots, x_s).$$

Зауваження 3. Зображення (26) розв'язку дуального ланцюжка рівнянь Боголюбова можна побудувати також на основі інших міркувань, подібних до тих, які сформульовані в монографії [2] для ланцюжка рівнянь Боголюбова. Виражаючи в дуальному кластерному розкладі (23) в кожному з добутків $\prod_{X_i \subset P} \mathfrak{A}^+_{(|X_i|-1)}(t, X_i)$ еволюційні оператори, які не діють на змінну $Y \setminus X$, згідно з (24) приходимо до лінійної версії рекурентних співвідношень (23)

$$S_s(t, Y \setminus X, X) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_k = s-n+1}^{s} \mathfrak{A}^+_{(k)}\left(t, Y \setminus X, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) S_{n-k}\left(t, X \setminus (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})\right), \quad 0 \leq n \leq s.$$

Ці рекурентні співвідношення на функціях $g(Y \setminus X)$ еквівалентні таким:

$$S_{s-n}(t, Y \setminus X) g(Y \setminus X) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{i_1 < \ldots < i_k = s-n+1}^{s} \mathfrak{A}^{+}_{(k)}\big(Y \setminus (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\big) g(Y \setminus X), \qquad (30)$$

$$0 \leq n \leq s.$$

Після підстановки співвідношення (30) в означення (22) s-частинкових спостережуваних величин, отримуємо розклад, еквівалентний в сенсі білінійної форми (17a), (17b) до розкладу (18).

1. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems. – Second ed. – London; New York: Taylor and Francis, 2002. – 352 p.
2. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.
3. *Петрина Д. Я., Видыбида А. К.* Задача Коши для цепочки уравнений Боголюбова // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **136**. – С. 370 – 378.
4. *Петрина Д. Я.* Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики. Локально возмущенные одномерные системы // Теорет. и мат. физика. – 1979. – **38**, № 2. – С. 230 – 250.
5. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, вып. 3. – С. 3 – 58.
6. *Маслов В. П., Тариверднев С. Э.* Асимптотика уравнений Колмогорова – Феллера для системы большого числа частиц // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. – М.: ВИНИТИ, 1982. – **19**. – С. 85 – 126.
7. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
8. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971. – 368 с.
9. *Cohen E. G. D.* The kinetic theory of dense gases // Fundamental Problems in Stat. Mech. / Ed. E. G. D. Cohen. – Amsterdam: North-Holland, 1968. – Vol. 2. – P. 228 – 275.
10. *Green M. S.* Boltzmann equation from the statistical mechanical point of view // J. Chem. Phys. – 1956. – **25**, № 5. – P. 836 – 855.
11. *Меньшиков М. В., Копылова А. Н., Ревякин А. М. и др.* Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1982. – 368 с.
12. *Dorfmann J. R., Cohen E. G. D.* Difficulties in the kinetic theory of the dense gases // J. Math. Phys. – 1967. – **8**, № 2. – P. 282 – 297.

Одержано 20.02.2002