УДК 517.9

В. П. Яковець, А. М. Акименко (Ніжин. пед. ун-т)

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИРОДЖЕНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З КРАТНИМ ЕЛЕМЕНТАРНИМ ДІЛЬНИКОМ

We find sufficient conditions for the existence and uniqueness of a periodic solution of a system of linear differential equations with a small parameter and degenerate matrix of the derivatives in the case of multiple spectrum of a boundary matrix pencil. We construct the asymptotic of this solution.

Знайдено достатні умови існування і єдиності періодичного розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром та виродженою матрицею при похідних у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць і побудовано його асимптотику.

Розглянемо систему рівнянь

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку, $f(t,\varepsilon)$, $x(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий параметр, h — натуральне число, $t \in R$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ і вектор-функція $f(t,\varepsilon)$ ω-періодичні по змінній t і зображуються у вигляді рівномірних асимптотичних розвинень за степенями ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t), \qquad f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(t), \tag{2}$$

коефіцієнти яких $A_k(t)$, $f_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, нескінченно диференційовні на $\boldsymbol{R}$;

2) $\det B(t) \equiv 0$ на $\boldsymbol{R}$;

3) в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна [1] при всіх $t \in \boldsymbol{R}$ і має скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^{n-1}$ кратності $n-1$ та простий нескінченний.

При виконанні цих умов будемо досліджувати питання про існування ω-періодичного розв'язку системи (1) та побудову його асимптотики при $\varepsilon \to 0$. Аналогічна задача для даного класу систем досліджувалась раніше в роботах [2, 3] у припущенні, що всі скінченні і нескінченні елементарні дільники в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ прості.

Згідно з умовою 3 в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ має власне значення $\lambda_0(t)$ кратності $n-1$, а матриця $B(t)$ — просте нульове власне значення. Власному значенню $\lambda_0(t)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів довжини $n-1$, який складається з власного вектора $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ і $(n-2)$-х приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{2, n-1}$, що задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned}(A_0 - \lambda_0 B)\varphi_1 &= 0,\\ (A_0 - \lambda_0 B)\varphi_i &= B\varphi_{i-1}, \quad i = \overline{2, n-1}.\end{aligned} \tag{3}$$

Нульовому власному значенню матриці $B(t)$ відповідає власний вектор $\tilde{\varphi}(t)$, а приєднаних векторів немає.

Позначимо через $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ власні вектори матриць відповідно $(A_0 - \lambda_0 B)^*$ і B^*, спряжених з матрицями $(A_0 - \lambda_0 B)$ та B. Завдяки ω-періодичності і нескінченній диференційовності матриць $A_0(t)$ та $B(t)$ власне значення $\lambda_0(t)$ в'язки матриць $(A_0 - \lambda_0 B)$ буде ω-періодичною і нескінченно диференційовною функцією і згідно з [4] вектори $\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$, $\psi(t)$ та $\tilde{\psi}(t)$ можна визначити так, щоб і вони були ω-періодичними і нескінченно диференційовними, що ми й припускатимемо у подальших викладках.

Вектори φ_i, $i = \overline{2, n-1}$, з рівнянь (3) визначаються неоднозначно. Цю неоднозначність усунемо, визначивши їх за формулою

$$\varphi_i = HB\varphi_{i-1}, \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{4}$$

де $H(t)$ — напівобернена матриця [5] до матриці $(A_0 - \lambda_0 B)$, яку визначимо так, щоб вона була ω-періодичною і нескінченно диференційовною [6, 7]. Тоді таку ж властивість будуть мати й вектори φ_i, $i = \overline{2, n-1}$. Враховуючи рекурентний характер формули (4), отримуємо

$$\varphi_i = (HB)^{i-1}\varphi, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Оскільки рівняння (3) розв'язні відносно векторів φ_i, а рівняння $(A_0 - \lambda_0 B)y = B\varphi_{n-1}$ нерозв'язне, то

$$(B(HB)^{i-1}\varphi, \psi) = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \qquad (B(HB)^{n-2}\varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall t \in \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

де символом (x, y) позначається скалярний добуток в унітарному n-вимірному просторі, в якому розглядається дана задача. На підставі того, що вектор $\psi(t)$ визначається з точністю до довільного скалярного множника, з останньої нерівності випливає, що його можна визначити так, щоб виконувалось співвідношення $(B(HB)^{n-2}\varphi, \psi) = 1$, що й будемо передбачати далі. Тоді із (5) матимемо

$$(B(HB)^{i-1}\varphi, \psi) = \delta_{i,n-1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}, \tag{6}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Оскільки нульовому власному значенню матриці $B(t)$ відповідає жорданів ланцюжок довжини 1 відносно матриці $A_0(t)$, то $(A_0\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0 \quad \forall t \in \boldsymbol{R}$. Визначимо вектор $\tilde{\psi}$ так, щоб виконувалось співвідношення

$$(A_0\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 1 \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}. \tag{7}$$

Розглянемо однорідну систему

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)\, x(t, \varepsilon). \tag{8}$$

Як показано в [5], ця система має $n-1$ лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(t, \varepsilon)\,dt\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{9}$$

де $u_i(t, \varepsilon)$ — n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t, \varepsilon)$ — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями за степенями $\mu = \sqrt[n-1]{\varepsilon}$:

$$u_i(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k u_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{10}$$

$$\lambda_i(t, \varepsilon) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{11}$$

Коефіцієнти розвинень (10), (11) визначаються із систем алгебраїчних рівнянь, які утворюються після підстановки виразу (9) у систему (8) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях параметра μ. Як показано в [5], прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ, матимемо

$$(A_0(t) - \lambda_0 B(t))\, u_k^{(s)}(t) = b_k^{(s)}(t), \qquad s = \overline{1, n-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

де

$$b_k^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{k} P_i^k(\lambda^{(s)})\, B(HB)^{i-1}\varphi + \sum_{j=0}^{k-n} \sum_{i=1}^{k-n+1-j} P_i^{k-n+1-j}(\lambda^{(s)})(BH)^i g_{n-1+j}^{(s)} +$$

$$+ g_k^{(s)}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad s = \overline{1, n-1}, \tag{13}$$

$$g_k^{(s)}(t) = -\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{n-1}\right]} A_i u_{k-i(n-1)}^{(s)} + B\big(u_{k-h(n-1)}^{(s)}\big)', \qquad k \ge n-1, \qquad s = \overline{1, n-1},$$

а символом $P_i^k(\lambda^{(s)})$ позначено суму всіх можливих добутків і множників вигляду $\lambda_{j_1}^{(s)}, \lambda_{j_2}^{(s)}, \ldots, \lambda_{j_i}^{(s)}$, сума індексів яких $j_1 + j_2 + \ldots + j_i = k$.

Тоді, використовуючи умову сумісності системи (12) – ортогональність її правої частини до вектора $\psi(t)$ — та беручи до уваги (6), знаходимо

$$(\lambda_1^{(s)})^{n-1} = (K\varphi, \psi), \tag{14}$$

де $K = A_1 - \delta_{h,1} B \dfrac{d}{dt}$, звідки

$$\lambda_1^{(s)} = \sqrt[n-1]{|(K\varphi, \psi)|}\left(\cos\frac{\arg(K\varphi, \psi) + 2\pi(s-1)}{n-1} + i \sin\frac{\arg(K\varphi, \psi) + 2\pi(s-1)}{n-1}\right),$$

$$s = \overline{1, n-1}, \tag{15}$$

якщо

$$(K\varphi, \psi) \ne 0 \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}. \tag{16}$$

Використовуючи (12), (13), отримуємо рекурентну формулу для визначення значень $\lambda_k^{(s)}(t)$:

$$\lambda_{k+1}^{(s)} = -\frac{c_k^{(s)}(t) + \tilde{P}_{n-1}^{n-1+k}(\lambda^{(s)})}{(n-1)(\lambda_1^{(s)})^{n-2}}, \tag{17}$$

де

$$c_k^{(s)}(t) = \sum_{i=n}^{n-1+k} P_i^{n-1+k}(\lambda^{(s)})(B\,(HB)^{i-1}\varphi, \psi) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} P_i^{k-j}(\lambda^{(s)})((BH)^i g_{n-1+j}^{(s)}, \psi) + (g_{n-1+k}^{(s)}, \psi), \tag{18}$$

а $\tilde{P}_{n-1}^{n-1+k}(\lambda^{(s)})$ — та частина виразу $P_{n-1}^{n-1+k}(\lambda^{(s)})$, яка не містить $\lambda_{k+1}^{(s)}$.

Вектори $u_k^{(s)}(t)$ визначаються за формулою

$$u_k^{(s)}(t) = H(t) b_k^{(s)}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

У роботі [5] встановлено, що формальні розв'язки (9) за виконання певних умов є асимптотичними розвиненнями точних лінійно незалежних розв'язків системи (8). Тому розглянемо вирази, які утворюються з (9) при обриванні розвинень (10), (11) на m-му члені:

$$x_m^{(i)}(t,\varepsilon) = u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{20}$$

де

$$\begin{aligned} u_m^{(i)}(t,\varepsilon) &= \varphi(t) + \sum_{k=1}^{m}\mu^k u_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) &= \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{m}\mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Знайдемо асимптотичні розв'язки системи

$$\varepsilon^h \frac{d}{dt} B^* y = -A^*(t,\varepsilon)\, y(t,\varepsilon), \tag{22}$$

спряженої з (8). Вони мають вигляд

$$y_i(t,\varepsilon) = \upsilon_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \eta_i(t,\varepsilon)dt\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{23}$$

де

$$\upsilon_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \upsilon_k^{(i)}(t), \quad \eta_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \eta_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \mu = \sqrt[n-1]{\varepsilon}. \tag{24}$$

Підставивши розвинення (23), (24) у (22) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ, отримуємо систему рівнянь

$$(A_0^* + \eta_0^{(s)} B^*)\upsilon_0^{(s)} = 0, \quad s = \overline{1, n-1}, \tag{25}$$

$$(A_0^* + \eta_0^{(s)} B^*)\upsilon_k^{(s)} = \tilde{b}_k^{(s)}, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

де

$$\tilde{b}_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{k}\eta_i^{(s)} B^* \upsilon_{k-i}^{(s)} + \tilde{g}_k^{(s)}(t), \tag{27}$$

$$\tilde{g}_k^{(s)}(t) = -(B^*\upsilon_{k-(n-1)h}^{(s)})' - \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{n-1}\right]} A_i^* \upsilon_{k-(n-1)i}^{(s)}. \tag{28}$$

З рівняння (25) маємо

$$\upsilon_0^{(s)} = \psi(t), \quad \eta_0^{(s)} = -\bar{\lambda}_0, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{29}$$

Для розв'язності рівнянь (26) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$(\tilde{b}_k^{(s)}, \varphi) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

При виконанні цієї умови вектори $\upsilon_k^{(s)}$ з рівнянь (26) визначатимемо за формулою

$$\upsilon_k^{(s)} = H^* \tilde{b}_k^{(s)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{31}$$

Виконуючи взаємну підстановку формул (27), (31), для вектора $\tilde{b}_k$ отримуємо вираз

$$\tilde{b}_k^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i P_i^k(\eta^{(s)})B^*(H^*B^*)^{i-1}\psi +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-n}\sum_{i=1}^{k-n+1-j}(-1)^i P_i^{k-n+1-j}(\eta^{(s)})(B^*H^*)^i\tilde{g}_{n-1+j}^{(s)} + \tilde{g}_k(t), \tag{32}$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad s = \overline{1, n-1},$$

де символом $P_i^k(\eta^{(s)})$ позначено суму всіх можливих добутків і множників $\eta_{j1}^{(s)}, \eta_{j2}^{(s)}, \ldots, \eta_{ji}^{(s)}$, сума індексів яких дорівнює k.

Використовуючи умову (30) та формули (32), (28) і беручи до уваги (6), дістаємо

$$(-1)^{n-1}(\eta_1^{(s)})^{n-1} - (K^*\psi, \varphi) = 0, \tag{33}$$

де

$$K^* = A_1^* + \delta_{h,1}\frac{d}{dt}B^*, \tag{34}$$

звідки

$$\eta_1^{(s)} = \sqrt[n-1]{|(K^*\psi, \varphi)|}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\arg(-1)^{n-1}(K^*\psi,\varphi)+2\pi(s-1)}{n-1} + i\sin\frac{\arg(-1)^{n-1}(K^*\psi,\varphi)+2\pi(s-1)}{n-1}\right),$$

$$s = \overline{1, n-1}.$$

Для знаходження інших коефіцієнтів розвинення (24) для функцій $\eta_s(t,\varepsilon)$ маємо рекурентну формулу

$$\eta_{k+1}^{(s)} = \frac{\tilde{c}_k^{(s)}(t) + \tilde{P}_{n-1}^{n-1+k}(\eta^{(s)})}{(-1)^n(n-1)(\eta_1^{(s)})^{n-2}},$$

в якій

$$\tilde{c}_k^{(s)}(t) = \sum_{i=n}^{n-1+k}(-1)^i P_i^{n-1+k}(\eta^{(s)})(B^*(H^*B^*)^{i-1}\psi, \varphi) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}P_i^{k-j}(\eta^{(s)})((B^*H^*)^i\tilde{g}_{n-1+j}^{(s)}, \varphi) + (\tilde{g}_{n-1+k}(t), \varphi),$$

а $\tilde{P}_{n-1}^{n-1+k}(\eta^{(s)})$ — та частина виразу $P_{n-1}^{n-1+k}(\eta^{(s)})$, яка не містить $\eta_{k+1}^{(s)}$.

Зазначимо, що згідно з (33), (34)

$$(\eta_1^{(s)})^{n-1} = (-1)^{n-1}(K^*\psi, \varphi) = (-1)^{n-1}((A_1^*\psi, \varphi) + \delta_{h,1}((B^*\psi)', \varphi)) =$$

$$= (-1)^{n-1}((\psi, A_1\varphi) + \delta_{h,1}((\psi, B'\varphi) + (\psi', B\varphi))) =$$

$$= (-1)^{n-1}[\overline{(A_1\varphi, \psi)} + \delta_{h,1}(\overline{(B'\varphi, \psi)} + \overline{(B\varphi, \psi')})],$$

звідки

$$(\overline{\eta}_1^{(s)})^{n-1} = (-1)^{n-1}[(A_1\varphi, \psi) + \delta_{h,1}((B'\varphi, \psi) + (B\varphi, \psi'))].$$

У свою чергу згідно з (14)

$$(\lambda_1^{(s)})^{n-1} = (K\varphi, \psi) = (A_1\varphi, \psi) - \delta_{h,1}(B\varphi', \psi).$$

Тоді у випадку, коли n — парне, маємо

$$(\lambda_1^{(s)})^{n-1} + (\overline{\eta}_1^{(s)})^{n-1} =$$

$$= (A_1\varphi, \psi) - \delta_{h,1}(B\varphi', \psi) - (A_1\varphi, \psi) - \delta_{h,1}((B'\varphi, \psi) + (B\varphi, \psi')) =$$

$$= -\delta_{h,1}(B\varphi, \psi)' = 0,$$

тобто

$$(\lambda_1^{(s)})^{n-1} + (\overline{\eta}_1^{(s)})^{n-1} = 0.$$

Якщо ж n — непарне, то

$$(\lambda_1^{(s)})^{n-1} - (\overline{\eta}_1^{(s)})^{n-1} = 0.$$

Ці рівності будуть виконуватись, якщо покласти

$$\eta_1^{(s)} = -\overline{\lambda}_1^{(s)}, \qquad s = \overline{1, n-1}. \tag{35}$$

Далі розглянемо вирази

$$y_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \upsilon_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \eta_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right), \qquad i = \overline{1, n-1}, \tag{36}$$

утворені з (23), (24) обриванням розвинень (24) на m-му члені:

$$\upsilon_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\mu^k \upsilon_k^{(i)}(t), \qquad \eta_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\mu^k \eta_k^{(i)}(t), \qquad i = \overline{1, n-1}. \tag{37}$$

Складемо $(n\times n)$-вимірні матриці

$$Q(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon), \tilde{\varphi}(t)], \qquad P(t,\varepsilon) = [V_m(t,\varepsilon), \tilde{\psi}(t)]^*, \tag{38}$$

де $U_m(t,\varepsilon)$, $V_m(t,\varepsilon)$ — прямокутні матриці розмірності $n\times(n-1)$, складені з вектор-стовпців (21), (37):

$$U_m(t,\varepsilon) = [u_m^{(1)}(t,\varepsilon), u_m^{(2)}(t,\varepsilon), \ldots, u_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)],$$

$$V_m(t,\varepsilon) = [\upsilon_m^{(1)}(t,\varepsilon), \upsilon_m^{(2)}(t,\varepsilon), \ldots, \upsilon_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)].$$

Неважко переконатися, що матриці (38) неособливі при $m \geq n-2$ та досить малих ε, відмінних від нуля [5].

Використавши в системі (8) заміну

$$x(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\, z(t,\varepsilon) \tag{39}$$

та помноживши її зліва на матрицю $P(t,\varepsilon)$, дістанемо

$$\varepsilon^h PBQ\frac{dz}{dt} = PLQz, \tag{40}$$

де

$$L(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B(t)\frac{d}{dt}.$$

Згідно з (38)

$$PBQ = [V_m(t,\varepsilon), \tilde{\psi}(t)]^* B(t)[U_m(t,\varepsilon), \tilde{\varphi}(t)] = \begin{pmatrix} V_m^* B\, U_m & V_m^* B\,\tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi}^* B\, U_m & \tilde{\psi}^* B\,\tilde{\varphi}\end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що $B\tilde{\varphi}=0$, $B^*\tilde{\psi}=0$,

$$\tilde{\psi}^* BU_m = [(Bu_m^{(1)},\tilde{\psi}),\ldots,(Bu_m^{(n-1)},\tilde{\psi})] = [(u_m^{(1)},B^*\tilde{\psi}),\ldots,(u_m^{(n-1)},B^*\tilde{\psi})] = [0,\ldots,0],$$

маємо

$$PBQ = \begin{pmatrix} V_m^* B\, U_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, розбивши на блоки матрицю PLQ, систему (40) запишемо у вигляді

$$\varepsilon^h \begin{pmatrix} V_m^* B\, U_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} V_m^* L U_m & V_m^* L\tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi}^* L U_m & (L\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \end{pmatrix} z. \tag{41}$$

Розглянемо матрицю $V_m^*(t,\varepsilon)B(t)U_m(t,\varepsilon)$. Її елементи можна подати у вигляді

$$(V_m^* BU_m)_{ij} = (Bu_m^{(j)}(t,\varepsilon), \upsilon_m^{(i)}(t,\varepsilon)), \qquad i,\ j = \overline{1, n-1}. \tag{42}$$

Підставивши в (42) вирази (21), (37) для векторів $u_m^{(j)}(t,\varepsilon)$, $\upsilon_m^{(i)}(t,\varepsilon)$ та вирази (13), (19), (31), (32) для векторів $u_k^{(j)}(t)$, $\upsilon_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{0,m}$, дістанемо

$$(V_m^* BU_m)_{ij} = \mu^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s (\lambda_1^{(j)})^s (\overline{\eta}_1^{(i)})^{n-2-s} + O(\mu^{n-1}), \quad i,\ j = \overline{1, n-1}. \tag{43}$$

Звідси, взявши до уваги (35), будемо мати

$$(V_m^* BU_m)_{ij} = \mu^{n-2}(-1)^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2}(\lambda_1^{(j)})^s (\lambda_1^{(i)})^{n-2-s} + O(\mu^{n-1}).$$

Якщо $i\neq j$, то

$$\sum_{s=0}^{n-2}(\lambda_1^{(j)})^s (\lambda_1^{(i)})^{n-2-s} = \frac{(\lambda_1^{(i)})^{n-1} - (\lambda_1^{(j)})^{n-1}}{\lambda_1^{(i)} - \lambda_1^{(j)}} = 0,$$

оскільки згідно з (14) $(\lambda_1^{(i)})^{n-1} = (\lambda_1^{(j)})^{n-1} = (K\varphi,\psi)$.

Якщо ж $i=j$, то

$$\sum_{s=0}^{n-2}(\lambda_1^{(j)})^s (\lambda_1^{(i)})^{n-2-s} = (n-1)(\lambda_1^{(i)})^{n-2}.$$

Отже, $(V_m^* BU_m)_{ij} = O(\mu^{n-1})$ при $i\neq j$, а

$$(V_m^* B\, U_m)_{ii} = \mu^{n-2}(-1)^{n-2}(n-1)(\lambda_1^{(i)})^{n-2} + O(\mu^{n-1}), \qquad i=\overline{1, n-1},$$

звідки випливає

$$\det\,(V_m^* BU_m) = \mu^{(n-1)(n-2)}(n-1)^{(n-1)}(-1)^{(n-1)(n-2)}(\lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}\ldots\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} +$$
$$+ O(\mu^{(n-1)(n-2)+1}) = \mu^{(n-1)(n-2)}(n-1)^{(n-1)}(K\varphi,\psi)^{n-2} + O(\mu^{(n-1)(n-2)+1}).$$

Тому завдяки (15) $\det\,(V_m^* B\, U_m)\neq 0$ при всіх $t\in \boldsymbol{R}$ і досить малих μ, відмінних від нуля. Таким чином, існує обернена матриця до матриці $V_m^* B\, U_m$, яка згідно з (43) має полюс $(n-2)$-го порядку в точці $\mu=0$.

Зазначимо, що оскільки на підставі (7)

$$(L(t,0)\tilde{\varphi}(t),\ \tilde{\psi}(t)) = (A_0(t)\tilde{\varphi}(t),\ \tilde{\psi}(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in \boldsymbol{R},$$

то $(L(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}(t),\ \tilde{\psi}(t)) \neq 0$ при досить малих ε і $t \in \boldsymbol{R}$.

Помноживши систему (41) на матрицю

$$\operatorname{diag}\left\{(V_m^* B\, U_m)^{-1},\ (L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\right\}$$

та врахувавши, що $\varepsilon^h = \mu^{h(n-1)}$, дістанемо

$$\mu^{h(n-1)}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} (V_m^* B\, U_m)^{-1} V_m^* L U_m & (V_m^* B\, U_m)^{-1} V_m^* L\tilde{\varphi} \\ (L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^* L U_m & 1 \end{pmatrix} z. \qquad (44)$$

Позначимо $z = \operatorname{col}(z_1; z_2)$, де $z_1(t,\varepsilon)$ — $(n-1)$-вимірний вектор, координатами якого є перші $n-1$ координат вектора $z(t,\varepsilon)$, а $z_2(t,\varepsilon)$ — остання n-а координата цього вектора. Тоді система рівнянь (44) запишеться так:

$$\mu^{h(n-1)}\frac{dz_1}{dt} = \left((V_m^* B\, U_m)^{-1} V_m^* L U_m\right) z_1 + \left((V_m^* B\, U_m)^{-1} V_m^* L\tilde{\varphi}\right) z_2,$$

$$0 = \left((L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^* L U_m\right) z_1 + z_2. \qquad (45)$$

З рівностей $L(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t,\varepsilon)B(t)u_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, завдяки нескінченній диференційовності коефіцієнтів розвинень (2) та розкладів (21) маємо

$$L(t,\varepsilon)\, U_m(t,\varepsilon) = B(t)\, U_m(t,\varepsilon)\, \Lambda_m(t,\varepsilon) + \mu^{m+1} C_1(t,\varepsilon), \qquad (46)$$

де

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon), \lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right\},$$

а $C_1(t,\varepsilon)$ — деяка $n \times (n-1)$-вимірна матриця, рівномірно обмежена на $[0;\omega]$. Тоді

$$(V_m^* B\, U_m)^{-1} V_m^* L U_m = \Lambda_m(t,\varepsilon) + \mu^{m+1}(V_m^* B\, U_m)^{-1} V_m^* C_1(t,\varepsilon) =$$

$$= \Lambda_m(t,\varepsilon) + \mu^{m+3-n} C_2(t,\varepsilon),$$

$$(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^* L U_m = (L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\left[\tilde{\psi}^* B U_m \Lambda_m + \mu^{m+1}\tilde{\psi}^* C_1(t,\varepsilon)\right] =$$

$$= (L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\left[\lambda_m^{(1)}(B u_m^{(1)}, \tilde{\psi}), \ldots, \lambda_m^{(n-1)}(B u_m^{(n-1)}, \tilde{\psi})\right] + \mu^{m+1}(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^* C_1(t,\varepsilon) =$$

$$= \mu^{m+1}(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^* C_1(t,\varepsilon) = -\mu^{m+1} c(t,\varepsilon),$$

де $C_2(t,\varepsilon)$ — $(n-1)\times(n-1)$-вимірна матриця, рівномірно обмежена на $[0;\omega]$, $c(t,\varepsilon)$ — вектор-рядок, складений з $n-1$ координат, кожна з яких є рівномірно обмеженою функцією на відрізку $[0;\omega]$.

Підставивши ці вирази в (45), отримаємо

$$\mu^{h(n-1)}\frac{dz_1}{dt} = \left[\Lambda_m + \mu^{m+3-n} C_2(t,\varepsilon)\right] z_1 + (V_m^* B\, U_m)^{-1} V_m^* L\tilde{\varphi} z_2,$$

$$z_2 = \mu^{m+1} c(t,\varepsilon) z_1.$$

Нарешті, підставивши друге рівняння цієї системи у перше, дістанемо

$$\mu^{h(n-1)}\frac{dz_1}{dt} = \left[\Lambda_m + \mu^{m+3-n} D(t,\varepsilon)\right] z_1, \qquad (47)$$

$$z_2 = \mu^{m+1} c(t,\varepsilon) z_1, \qquad (48)$$

де $D(t,\varepsilon)$ — рівномірно обмежена на $[0;\omega]$ квадратна матриця $(n-1)$-го порядку.

Припустимо тепер, що функції $\operatorname{Re}\left[\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)\right]$, $i, \quad j=\overline{1,n-1}$, не змінюють знак на $[0;\omega]$.

Розглянемо систему рівнянь (47). Виконаємо в ній заміну

$$z_1 = \exp\left(\mu^{-h(n-1)}\int_0^t \lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)dt\right)w_j, \qquad j=\overline{1,n-1}, \tag{49}$$

і індекс j зафіксуємо. Дістанемо

$$\mu^{h(n-1)}\frac{dw_j}{dt} = \left(\Lambda_m(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)E\right)w_j + \mu^{m+3-n}D(t,\varepsilon)w_j, \tag{50}$$

де E — одинична матриця $(n-1)$-го порядку.

Позначивши

$$K_j(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\mu^{-h(n-1)}\int_\tau^t\left(\Lambda_m(s,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(s,\varepsilon)E\right)ds\right),$$

від системи (50) перейдемо до системи інтегральних рівнянь

$$w_j(t,\varepsilon) = e_j + \mu^{m+3-n-h(n-1)}\int_a^t K_j(t,\tau,\varepsilon)D(\tau,\varepsilon)w_j(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{51}$$

у якій e_j — $(n-1)$-вимірний вектор, j-та координата якого дорівнює одиниці, а решта — нулі, $a=\operatorname{col}(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$,

$$a_i = 0, \quad \text{якщо} \quad \operatorname{Re}\left[\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)\right] \le 0, \qquad i\in I,$$

$$a_i = \omega, \quad \text{якщо} \quad \operatorname{Re}\left[\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)\right] > 0, \qquad i\in II.$$

Покажемо, що розв'язок системи інтегральних рівнянь (51) задовольняє систему диференціальних рівнянь (50). Нехай $w_j(t,\varepsilon)$ — розв'язок системи (51). Диференціюючи тотожність (51), маємо

$$\frac{dw_j(t,\varepsilon)}{dt} = \mu^{m+3-n-h(n-1)}K_j(t,\tau,\varepsilon)D(t,\varepsilon)w_j(t,\varepsilon) +$$

$$+\mu^{m+3-n-h(n-1)}\int_a^t\frac{dK_j(t,\tau,\varepsilon)}{dt}D(\tau,\varepsilon)w_j(\tau,\varepsilon)d\tau = \mu^{m+3-n-h(n-1)}D(t,\varepsilon)w_j(t,\varepsilon) +$$

$$+\mu^{m+3-n-2h(n-1)}\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)E\right)\int_a^t K_j(t,\tau,\varepsilon)D(\tau,\varepsilon)w_j(\tau,\varepsilon)d\tau =$$

$$= \mu^{m+3-n-h(n-1)}D(t,\varepsilon)w_j(t,\varepsilon) + \mu^{-h(n-1)}\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)E\right)\left(w_j(t,\varepsilon)-e_j\right).$$

Тоді

$$\mu^{h(n-1)}\frac{dw_j(t,\varepsilon)}{dt} = \mu^{m+3-n}D(t,\varepsilon)w_j(t,\varepsilon) +$$

$$+\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)E\right)w_j(t,\varepsilon) - \left(\Lambda_m(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)E\right)e_j.$$

Оскільки

$$\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)E\right)e_j = 0,$$

звідси приходимо до системи (50), що й потрібно було довести.

Покажемо, що система інтегральних рівнянь (51) має розв'язок. Розглянемо матрицю

$$K_j(t,\tau,\varepsilon) =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{\exp\left(\mu^{-h(n-1)}\int_\tau^t\left(\lambda_m^{(1)}(s,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(s,\varepsilon)\right)ds\right),\ldots,\exp\left(\mu^{-h(n-1)}\int_\tau^t\left(\lambda_m^{(n-1)}(s,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(s,\varepsilon)\right)ds\right.$$

Якщо $i \in I$, то $\operatorname{Re}\left(\lambda_m^{(i)}(s,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(s,\varepsilon)\right) \le 0$, $a_i = 0$, $0 \le \tau \le t$ і, отже, відповідні елементи матриці $K_j(t,\tau,\varepsilon)$ рівномірно обмежені на відрізку $[0;t]$:

$$\left|K_{ij}(t,\tau,\varepsilon)\right| = \exp\left(\mu^{-h(n-1)}\int_\tau^t \operatorname{Re}\left(\lambda_m^{(i)}(s,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(s,\varepsilon)\right)ds\right) \le 1.$$

Якщо ж $i \in II$, то $\operatorname{Re}\left(\lambda_m^{(i)}(s,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(s,\varepsilon)\right) > 0$, $a_i = \omega$, $t \le \tau \le \omega$ і, отже, відповідні елементи матриці $K_j(t,\tau,\varepsilon)$ також обмежені:

$$\left|K_{ij}(t,\tau,\varepsilon)\right| = \exp\left(-\mu^{-h(n-1)}\int_t^\tau \operatorname{Re}\left(\lambda_m^{(i)}(s,\varepsilon)-\lambda_m^{(j)}(s,\varepsilon)\right)ds\right) \le 1.$$

Таким чином, матриця $K_j(t,\tau,\varepsilon)$ рівномірно обмежена за нормою при $t \in [0;\omega]$ і відповідних значеннях τ:

$$\left\|K_j(t,\tau,\varepsilon)\right\| \le c_1, \tag{52}$$

де c_1 — деяка стала, що не залежить від ε. Оскільки елементи матриці $D(t,\varepsilon)$ рівномірно обмежені на $[0;\omega]$, то

$$\|D(t,\varepsilon)\| \le c_2, \tag{53}$$

де стала c_2, як і c_1, не залежить від ε.

Розглянемо оператор $\mathcal{A}$, який діє на множині вектор-функцій $x(t,\varepsilon)$, неперервних на відрізку $[0;\omega]$, за правилом

$$\mathcal{A}x = e_j + \mu^{m+3-n-h(n-1)}\int_a^t K_j(t,\tau,\varepsilon)D(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)d\tau.$$

Очевидно, оператор $\mathcal{A}$ кожну вектор-функцію з даної множини відображає у вектор-функцію цієї ж множини. Покажемо, що цей оператор стискаючий. Маємо

$$\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = \mu^{m+3-n-h(n-1)}\int_a^t K_j(t,\tau,\varepsilon)D(\tau,\varepsilon)\left(x(\tau,\varepsilon)-y(\tau,\varepsilon)\right)d\tau,$$

звідки, враховуючи нерівності (52), (53), дістаємо

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \le \mu^{m+3-n-h(n-1)}c_1c_2\omega\|x-y\|.$$

Отже, якщо $m \ge h(n-1)-3+n$, то $\mu^{m+3-n-h(n-1)}c_1c_2\omega < 1$ при досить малих m. Тому при достатньо малих m оператор $\mathcal{A}$ буде стискаючим.

Таким чином, система рівнянь (51) має єдиний розв'язок. Його можна знайти методом послідовних наближень, поклавши

$$w_j^{(0)}(t,\varepsilon) = 0,$$

$$w_j^{(k)}(t,\varepsilon) = e_j + \mu^{m+3-n-h(n-1)}\int\limits_a^t K_j(t,\tau,\varepsilon)D(\tau,\varepsilon)w_j^{(k-1)}(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots . \quad (54)$$

Переходячи в (54) до границі при $k \to \infty$ і враховуючи обмеженість наближень $w_j^{(k)}(t,\varepsilon)$, одержуємо

$$w_j(t,\varepsilon) = e_j + \mu^{m+3-n-h(n-1)}d_j(t,\varepsilon),$$

де $d_j(t,\varepsilon)$ — деяка рівномірно обмежена вектор-функція. Тоді згідно з (49) маємо такі асимптотичні формули для $n-1$ лінійно незалежних розв'язків системи (47):

$$z_1^{(j)}(t,\varepsilon) = \left(e_j + \mu^{m+3-n-h(n-1)}d_j(t,\varepsilon)\right)\exp\left(\mu^{-h(n-1)}\int\limits_0^t \lambda_m^{(j)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

У свою чергу з (48) дістаємо

$$z_2^{(j)}(t,\varepsilon) = \mu^{m+1}c(t,\varepsilon)z_1^{(j)}(t,\varepsilon), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Склавши з вектор-стовпців $z^{(j)}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[z_1^{(j)}(t,\varepsilon), z_2^{(j)}(t,\varepsilon)\right]$, $j = \overline{1, n-1}$, прямокутну матрицю розмірністю $n\times(n-1)$ і врахувавши (38), (39), знайдемо асимптотичний вираз для фундаментальної матриці системи (8):

$$X(t,\varepsilon) = \left[U_m(\tau,\varepsilon) + O\left(\mu^{m+3-n-h(n-1)}\right)\right]\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right). \quad (55)$$

Дослідивши аналогічним способом спряжену систему рівнянь (22), знайдемо асимптотичну формулу для фундаментальної матриці й цієї системи:

$$Y(\tau,\varepsilon) = \left[V_m(\tau,\varepsilon) + O\left(\mu^{m+3-n-h(n-1)}\right)\right]\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t H_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad (56)$$

де $H_m(\tau,\varepsilon) = \mathrm{diag}\left\{\eta_m^{(1)}(t,\varepsilon), \eta_m^{(2)}(t,\varepsilon), \ldots, \eta_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right\}$.

У роботі [6] введено поняття матриці монодромії виродженої лінійної системи. Згідно з [6] такою матрицею для системи (8) буде квадратна матриця $(n-1)$-го порядку

$$\Omega = Y^*(0,\varepsilon)B(0)X(\omega,\varepsilon)\left[Y^*(0,\varepsilon)B(0)X(0,\varepsilon)\right]^{-1}. \quad (57)$$

Припустимо, що

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^m \mu^k\lambda_k^{(i)}(t)\right) \le 0 \quad \forall t \in [0;\omega], \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Тоді, підставляючи (55), (56) у (57), після нескладних перетворень отримуємо

$$\Omega = V_m^*(0,\varepsilon)B(0)U_m(0,\varepsilon) \times$$

$$\times\left[\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^\omega \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right) + O\left(\mu^{m+3-n-h(n-1)}\right)\right]\left(V_m^*(0,\varepsilon)B(0)U_m(0,\varepsilon)\right)^{-1},$$

звідки випливає, що матриця монодромії даної системи подібна до матриці

$$\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^{\omega}\Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)+O\left(\mu^{m+3-n-h(n-1)}\right).$$

Згідно з [6] власні значення цієї матриці є мультиплікаторами системи (8). Враховуючи структуру матриці $\Lambda_m(t,\varepsilon)$, приходимо до висновку, що мультиплікатори системи (8) виражаються асимптотичними формулами

$$\rho_i = \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^{\omega}\left(\lambda_0+\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t)\right)dt\right)+O\left(\mu^{m+3-n-h(n-1)}\right), \quad i=\overline{1,\, n-1}.$$

Підсумовуючи проведені дослідження і використовуючи результати [6], одержуємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай*

$$(K\varphi,\psi) = (A_1\varphi,\psi)-\delta_{h,1}(B\varphi',\psi)\neq 0 \quad \forall t\in[0;\omega] \tag{58}$$

і для деякого натурального $m>(h+1)(n-1)-2$ *та* $\mu\in(0;\mu_0]$ *виконуються такі умови:*

1) *функції*

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m}\mu^k\left(\lambda_k^{(j)}(t)-\lambda_k^{(i)}(t)\right)\right], \quad i,\ j=\overline{1,\, n-1},$$

не змінюють знак на відрізку $[0;\omega]$;

2) $\operatorname{Re}\left(\lambda_0+\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t)\right)\leq 0 \quad \forall t\in[0;\omega], \quad i=\overline{1,\, n-1}$;

3) $\int_0^{\omega}\left(\lambda_0+\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t)\right)dt\neq 0$.

Тоді при досить малих $\mu\in(0;\mu_0]$ *система* (8) *не має* ω*-періодичного розв'язку, а неоднорідна система* (1) *має єдиний* ω*-періодичний розв'язок.*

Припустимо тепер, що виконуються всі умови теореми 1, і розглянемо питання про побудову асимптотики ω-періодичного розв'язку системи (1).

Будемо вважати, що λ_0 — власне значення граничної в'язки матриць $A_0(t)-\lambda B(t)$ — ненульове. Тоді розв'язок системи (1) будуватимемо у вигляді формального розвинення

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t). \tag{59}$$

Підставивши (59) у систему (1) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо

$$A_0(t)x_k = b_k(t), \quad k=0,1,2,\ldots,$$

де

$$b_k(t) = f_k-\sum_{i=1}^{k}A_i x_{k-i}+Bx'_{k-h}, \quad k=0,1,2,\ldots. \tag{60}$$

Оскільки $\det A_0(t)\neq 0 \quad \forall t\in\boldsymbol{R}$, а вираз (60) для вектора $b_k(t)$ містить тільки ті $x_i(t)$, індекси яких менші k, звідси одержуємо рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів розвинення (59):

$$x_k = A_0^{-1}(t)b_k(t), \quad k=0,1,\ldots. \tag{61}$$

Завдяки періодичності вектор-функцій $f_k(t)$ та матричних функцій $A_k(t)$, $B(t)$ всі коефіцієнти розвинення (59), які визначаються за формулою (61), будуть ω-періодичними. Отже, розвинення (59) є формальним ω-періодичним розв'язком системи (1).

Методами роботи [2] можна показати, що виконання умови 2 теореми 1 забезпечує асимптотичний характер цього розв'язку. А саме, якщо $\tilde{x}(t,\varepsilon)$ — точний ω-періодичний розв'язок системи (1), існування якого стверджується в теоремі 1, а $x_m(t,\varepsilon)$ — m-те наближення, яке утворюється з розвинення (59) при його обриванні на m-му члені, то має місце асимптотична оцінка

$$\|\tilde{x}(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1},$$

де c — деяка стала, що не залежить від ε.

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і власне значення* λ_0 *в'язки матриць* $A_0(t) - \lambda B(t)$ *відмінне від нуля при всіх* $t \in \boldsymbol{R}$, *то система* (1) *має єдиний* ω*-періодичний розв'язок, який зображується у вигляді асимптотичного розвинення* (59), *коефіцієнти якого знаходяться за рекурентними формулами* (61).

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
3. *Яковець В. П., Акименко А. М.* Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь // Наук. зап. НДПУ ім. М. В. Гоголя. Природ. та фіз.-мат. науки. – 1998. – С. 154 – 169.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Выща шк., 1991. – 207 с.
6. *Яковець В. П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1278 – 1296.
7. *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable // Math. Ann. – 1965. – **161**, № 1. – P. 67 – 77.

Одержано 06.06.2000