УДК 517.96 + 519.624

В. Е. Капустян, В. М. Ильман (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

From the point of view of singularities of differentiable mappings, we find the dependence between the dimension of a family of singular integral equations and singularity types of their solutions.

З точки зору особливостей диференційовних відображень знайдено залежність між розміром сім'ї сингулярних інтегральних рівнянь і типами особливостей їх розв'язків.

Многие граничные задачи сводятся к решению семейств интегральных уравнений с сингулярными операторами. При определенных значениях параметров решения этих уравнений имеют особенности (качественные перестройки решений, отрывные решения и др.). Типы особенностей решений уравнений не только дают качественную информацию, но могут свидетельствовать о некорректности поставленной задачи. В связи с этим представляет интерес найти типы особенностей, которыми могут обладать решения сингулярных уравнений. Для обнаружения особых состояний решений интегральных уравнений используется семейственный подход [1]. В данной работе установлены зависимости размерности параметрического семейства уравнений с полярной сингулярностью от типа особенностей их решений.

1. Постановка задачи, основные положения. Пусть задано уравнение

$$Sq + Tq = f, \tag{1}$$

в котором S — сингулярный оператор:

$$Sq = aq(x) + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_l q(\tau)\frac{d\tau}{\tau - x}, \qquad a \text{ — const};$$

T — оператор Фредгольма:

$$Tq = \int_l q(\tau)K(\tau, x)\,d\tau, \qquad x \in l \subset R.$$

Нас будет интересовать зависимость особенностей решения уравнения (1) от типов особенностей семейств гладких вещественных функций f и K.

Рассмотрим два класса функций E_n, E_n^{ν}.

Пусть $C_n(M)$ — пространство непрерывно дифференцируемых до n-го порядка функций на множестве $M \subset R^k$, $k = 1, 2$; $H^{\nu}(M)$ — пространство непрерывных по Гельдеру с показателем ν функций и $H_n^{\nu}(M)$ — пространство функций φ со структурой $\langle \varphi \mid \varphi \in C_n(M),\ \varphi^{(n)} \in H^{\nu}(M)\rangle$. Тогда $E_n(M \times D, N)$ — класс семейств функций $\varphi\colon M \times D \to N$, $D \subset R^m$, $N \subset R$, таких, что $\varphi \in C_n(M)$ и $\varphi \in C_1(D)$. Если, кроме того, $\varphi \in H^{\nu}(M)$, то такой класс семейств обозначим через $E_n^{\nu}(M \times D, N)$.

Определение 1. *Функции* $\varphi \in E_n^{\nu}(M \times D, N)$, $\varphi_1 \in E_n^{\delta}(M_1 \times D_1, N_1)$ *эквивалентны* ($\varphi \sim \varphi_1$), *если они стабильно эквивалентны* [1, *с.* 146], *т. е. обычно эквивалентны с точностью до морсовских слагаемых.*

Свойство 1. *Если* $\varphi \in E_n^{\nu}(M \times D, N)$, *то всегда найдется функция* $\varphi_1 \in E_n^{\nu}(M \times D_1, N_1)$ *такая, что в окрестности точки* $x \in M$ $\varphi_1 \sim \varphi$.

Очевидно, в качестве φ_1 достаточно взять струю m-го порядка функции φ, равную $j_x^m(\varphi_1)$, $m \le n$.

Свойство 2. *Если функция* $\varphi \in E_n^{\nu}(M \times D, N)$ *и ее дифференцируемое расширение —* $\overline{\varphi}$ *на* R^k, *то* $\overline{\varphi} \in E_n^1(R^k \times D_1, N_1)$ [2, с. 595].

Свойство 3. *Если функция* $\overline{\varphi} \in C_n(R^k)$ *на множестве* $M \subset R^k$ *имеет изолированную особую точку, то для сужения* $\varphi \in E_n^{\nu}(M \times D, N)$ *эта точка остается изолированной внутренней или краевой особой* [1, с. 217 – 219, 223].

Пусть функция $\varphi \in E_n^{\nu}(l \times D, N)$ и точка $x \in l \subset R$ — изолированная особая.

Определение 2. *Полную струю* $j_x^m(\varphi)$ *назовем* AB_m*-формой, эквивалентной функции* φ *в окрестности точки* x.

Частным случаем свойства 3 является следующее свойство.

Свойство 4. *Если для функции* $\overline{\varphi} \in C_n(R)$ *точка* $x \in l$ *— изолированная особая, то для функции* $\varphi \in E_n^{\nu}(l \times D, N)$ *ее* AB_m*-форма определяет все возможные типы особенностей* A_k, B_p.

Очевидно, из-за ограничений, накладываемых на семейство φ, бифуркационные многообразия AB_m-форм разнообразнее, и в допустимой области параметров $\overline{D}$ особые типы A_k, B_p могут находиться как внутри, так и на границе — $\overline{D}$.

Свойство 5. *Пусть* $\varphi \in E_n^{\nu}(l \times l \times D, N)$ *и расширение* $\overline{\varphi}$ *на* R^2 *имеет единственную особую точку в* $l \times l$. *Тогда оператор Фредгольма* T *сужает особенности функции* φ *до серий* A_k, B_p.

В частности, простые особенности A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 [1, с. 217] внутренней точки из множества $l \times l$ сужаются до $-A_m$, и m определяется таблицей

A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
k	$k-2$	2		2
			2	
1	1	3		4

Этот результат следует из того, что $T\varphi \in E_n^{\nu}(l \times D_1, N_1)$, и свойства 4.

2. Основные результаты. Предположим, что индекс оператора S равен ρ, а $l = [-1, 1]$.

Свойство 6. *Для оператора* S *существует* S^{-1}.

Доказательство. Положим $\operatorname{arctg}(a) = \pi\omega$, $|\omega| < 1/2$, и оператор S^{-1} выберем в виде [3, с. 320]

$$\left(a + \frac{X(x)}{\pi} \int_l \frac{d\tau}{X(\tau)(\tau - x)} + bX(x)\right)\cos^2 \pi\omega, \qquad X(x) = (1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}, \tag{2}$$

где $\alpha = -1/2 - \omega$, $\beta = -1/2 + \omega$, $b \neq 0$, если $\rho > 0$; $\alpha = \pm 1/2 - \omega$, $\beta = \mp 1/2 + \omega$, $b = 0$, если $\rho = 0$; $\alpha = 1/2 - \omega$, $\beta = 1/2 + \omega$, $b = 0$, если $\rho < 0$.

Если учесть выражение

$$\int_l X(\tau)\tau^m \frac{d\tau}{\tau - x} = \int_l X(\tau) \frac{\tau^m - x^m}{\tau - x} d\tau + x^m J(x) = \sum_{k=0}^{m-1} M_k x^{m-l-k} + J(x)x^m, \tag{3}$$

в котором интеграл $M_k = \int_l X(\tau)\tau^k \, d\tau$ заменой $\tau = 1 - 2y$ и биномиальным представлением $(1-2y)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-2)^j y^j$ выражается через бета-функцию

$$M_k = 2^{\alpha+\beta+1} \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-2)^j \int_0^1 y^{j+\beta}(1-y)^\alpha \, dy =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-2)^j B(\beta + j + 1, \alpha + 1), \qquad \alpha, \beta > -1,$$

а интеграл $\int_l X(\tau) \frac{d\tau}{\tau - x} = J(x)$ согласно [3, с. 282] есть $-\pi\left(aX(x) + \frac{p(x)}{\sin(\pi\beta)}\right)$, где при $0 < |\alpha|, |\beta| < 1$ и $|\alpha + \beta| = \{0 \vee 1\}$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \rho = 0; \\ x + \alpha - \beta, & \rho > 0; \\ 0, & \rho < 0, \end{cases}$$

то получим (при $\rho < 0$, $\int_l \frac{d\tau}{X(\tau)} = 0$) $SS^{-1} = I$.

Свойство 7. *Операторы S, S^{-1} действуют из класса $E_0^\nu(M \times D, N)$ в класс $E_0^\delta(M \times D, N)$ [3, с. 61 – 63].*

Пусть функция $\varphi \in E_n^\nu(l \times D, N)$. Рассмотрим оператор S_1:

$$S_1\varphi(x) = V(x) = a\frac{\varphi(x)}{X(x)} + \frac{1}{\pi}\int_l \frac{\varphi(\tau)}{X(\tau)(\tau - x)} d\tau, \qquad x \in l. \tag{4}$$

Свойство 8. *Оператор S_1 действует из класса $E_n^\nu(l \times D, N)$ в класс $E_n(l \times D, N)$.*

Доказательство. Действительно, функция

$$V(x) = a\frac{\varphi(x)}{X(x)} + \frac{1}{\pi}\int_l \frac{\varphi(\tau) - \varphi(x)}{X(\tau)(\tau - x)} d\tau + \frac{1}{\pi}\varphi(x)\int_l \frac{d\tau}{X(\tau)(\tau - x)}$$

после вычисления второго интеграла по формулам (3) примет вид

$$V(x) = \frac{1}{\pi}\int_l \frac{\varphi(\tau) - \varphi(x)}{X(\tau)(\tau - x)} d\tau - \frac{1}{\sin(\pi\beta)}(\varphi(x)p(x)).$$

Поскольку $\varphi \in C_n(l)$, из теоремы Привалова [3, с. 58] следует существование производной функции V порядка $k \le n$. Поэтому

$$V^{(n)}(x) = \frac{n!}{\pi}\int_l \frac{\varphi(\tau) - j_\tau^n(\varphi)}{X(\tau)(\tau - x)^{n+1}} d\tau - \frac{1}{\sin(\pi\beta)}(\varphi(x)p(x))^{(n)}.$$

Далее, так как $\varphi^{(n)} \in H^\nu(l)$, используя оценку $|\varphi(\tau) - j_\tau^n(\varphi)| < L|\tau - x|^{n+\nu}$ и оценки в окрестности точки x $U_x \subset l$ для интеграла $\int_{U_x} \frac{(\tau - x)^{\nu-1}}{X(\tau)} d\tau$ [3, с. 59, 60], получаем $V \in C_n(l)$.

Замечание 1. Если Q_m — алгебраический полиномиальный оператор, то, очевидно, оператор $S_1 + Q_m$ удовлетворяет свойству 8.

Аналогично понятию дифференцируемой эквивалентности функций [1, с. 9] дадим определение эквивалентности операторов S_1.

Определение 3. *Оператор* S_{11}, *действующий из класса* $E_n^{\nu}(l_1 \times D, N_1)$ *в класс* $E_n(l_1 \times D, N_1)$, *эквивалентен оператору* S_{12}, *действующему из класса* $E_n^{\delta}(l_2 \times D_1, M_2)$ *в* $E_n(l_2 \times D_1, N_2)$, *если существуют диффеоморфизмы* $h: M_1 \to M_2$ *и* $g: N_1 \to N_2$ *такие, что* $S_{12} = g S_{11} h^{-1}$.

Теорема 1. *Оператор* $S_0 = S_1 + \text{const}$ *переводит диффеоморфные множества в диффеоморфные.*

Доказательство. Пусть функции $\varphi_1 \in E_n^{\nu}(l \times D, M_1)$ и $\varphi_2 \in E_n^{\delta}(l_1 \times D_1, M_2)$ дифференцируемо эквивалентны. Тогда множества M_1 и M_2 диффеоморфные, т. е. существует диффеоморфизм $h: M_1 \to M_2$. Согласно свойству 8 оператор S_0 действует из класса $E_n^{\nu}(l \times D, M_1)$ в класс $E_n(l \times D, N_1)$ и из $E_n^{\delta}(l_1 \times D_1, M_2)$ в $E_n(l_1 \times D_1, N_2)$.

Поскольку значения оператора S_1 на интервалах l_1 и l отличаются постоянным множителем, $S_0 \sim S_0$ на этих интервалах. Поэтому функцию $g: N_1 \to N_2$ найдем из условия $S_0(h) = g(S_0)$. Имеем $S_0 h = g\left(\frac{1}{X} S^{-1}\right)$ и тогда $g = \frac{1}{X} S^{-1}(h(S(x)))$. Функция g — диффеоморфизм, так как существует $g^{-1} = \frac{1}{X}(h^{-1}(S(X)))$, и согласно свойству 8 она непрерывно дифференцируема вместе со своей обратной.

Замечание 2. Если функции φ_1 и φ_2 эквивалентны по определению 1, то $h = I + \text{const}$ (I — тождественный оператор) и $g = I + \text{const}$.

Лемма 1. *Пусть функция* $f \in E_n^{\nu}(l \times D, N)$ *и ее расширение* $\bar{f}$ *на множество* R *имеет одну изолированную особую точку на интервале* $l \subset R$, *причем параметрическое пространство* D *функции* $\bar{f}$ *имеет* $\dim D = r$. *Тогда справедливо соотношение* $S_0 f \sim AB_m$*-форме* ($m = r + 3$, $\rho > 0$; $m = r + 2$, $\rho = 0$; $m = r + 1$, $\rho < 0$).

Доказательство. По условию леммы $\dim D = r$, поэтому особая точка функции $\bar{f}$ имеет тип A_{r+1} [1, с. 192] и согласно свойствам 1 – 3 сужение $f \sim AB_{r+2}$-форме, при этом $AB_{r+2} \in E_n^{l}(l \times D, N)$. Тогда из теоремы 1 имеем $S_0 f \sim S_0 AB_{r+2}$, и с учетом формул (3) получаем $AB_{r+2} \mapsto S_0 AB_{r+2} = AB_m$.

В дальнейшем за отрывное решение уравнения (1) будем принимать такое решение, при котором $q(\pm 1) \geq 0$ и $q(x) < 0 \quad \forall x \in \sum_{k=j}^{\mu} l_k \subset l$. Число μ определяет количество зон „отрыва" решения.

Теорема 2. *При условиях леммы* 1 *для значения* $S^{-1} f$ *возможен наибольший порядок* m *внутренней особенности* A_m *и максимально возможное количество зон отрывных решений* μ *исчерпывается таблицей*

ρ	m	μ
$\rho > 0$	$2\left[\frac{r+1}{2}\right] + 3$	$\left[\frac{r+1}{2}\right] + 2$
$\rho < 0$	$2\left[\frac{r+1}{2}\right] + 1$	$\left[\frac{r+1}{2}\right] + 1$
$\rho = 0$	$2\left[\frac{r+1}{2}\right] + 2$	$\left[\frac{r+1}{2}\right] + 1$

В таблице символ $[\cdot]$ — целая часть числа.

Доказательство. Согласно лемме 1 $S_0 f \sim AB_m$-форме, следовательно, $S^{-1} f \sim AB_m X$. Поэтому порядок особенностей $S^{-1} f$ определяется размерностью пространства параметров D_1 формы AB_m. Поскольку имеют место ограничения $|x| \leq 1$ и $AB_m(\pm 1) \geq 0$, то для $\rho > 0$ $\dim D_1 = r + 3$, для $\rho < 0$ $\dim D_1 = r + 1$ и для $\rho = 0$ $\dim D_1 = r + 2$. Тогда с учетом сингулярности $X(x)$ получим результат, представленный в таблице.

Замечание 3. Особенности функции $X(x) AB_m(x)$ можно определить непосредственными вычислениями [4] и число μ найти из соотношения

$$\frac{d}{dx}\left(X(x) AB_m(x)\right) = 0,$$

$$AB_m(x) < 0, \qquad |x| < 1,$$

$$AB_m(\pm 1) \geq 0.$$

Результаты вычислений особенностей $S^{-1} f$ показывают, что их порядок зависит от двойственности особенностей функции f, а краевые особенности $S^{-1} f$ располагаются на гиперплоскостях $p = \left\{(d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}) \,\middle|\, \pm 1 + \sum_{i=0}^{m-1} d_i = 0\right\}$ границы области $\overline{D}_1$.

На основании свойства 5 и теоремы 2 заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Простые особенности расширения $\overline{K}$ на множество R^2 семейства $K \in E_n^{\mathrm{v}}(l \times l \times D, N)$ с единственной особенностью внутри квадрата $l \times l$ сужаются оператором $S^{-1} T$ до серии A_m, причем максимальное значение индекса m определяется следующей таблицей*:

ρ	A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
$\rho > 0$	$2\left[\frac{k}{2}\right] + 3$ 3	$2\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ 3	5	5	5 7
$\rho < 0$	$2\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ 1	$2\left[\frac{k}{2}\right] - 1$ 1	3	3	3 5
$\rho = 0$	$2\left[\frac{k}{2}\right] + 2$ 2	$2\left[\frac{k}{2}\right]$ 2	4	4	4 6

3. Приложения. Рассмотрим одно приложение полученных результатов. При решении граничных задач с бесконечной границей ядро оператора Фредгольма уравнения (1) может быть выражено через несобственный интеграл

$$K(\lambda) = \int_L \varphi(u) g(\lambda u) du, \qquad (5)$$

где $L = R \vee R^+$, $\varphi \in E_n^1(L \times D, N)$, $g \in E_n(L \times L \times \{d_0\}, N_1)$ и $\left|\int_L g(p)dp\right| <$ $<$ const, причем точка $0 \in L$ есть точка симметрии функции g.

Подробные исследования особенностей асимптотик осциллирующих интегралов для семейств g проведены в монографии [5].

Пусть функция φ имеет единственную особую точку $u = 0$. Очевидно, вне окрестности U_0 этой точки функция φ монотонна.

Предположим, что функция φ ограниченного роста, т. е. $|\varphi| < |u|^\delta e^{-\gamma|u| + h}$, $\gamma \geq 0$, $h \geq 0$, тогда ее степень монотонности sp (δ, γ).

Определение 4. *Функции* $\varphi_1 \in E_n^1(R \times D, N_1)$, $\varphi_2 \in E_n^1(R \times D_1, N_2)$ *эквивалентны* ($\varphi_1 \approx \varphi_2$), *если они локально эквивалентны в окрестности* U_0 *своей особой точки по определению* 1 *и имеют одинаковую степень монотонности.*

Лемма 2. *Если функция* $\varphi \in E_n^1(L \times D, N)$ *ограниченного роста и имеет единственную особую точку* $u = 0$, *то в этом классе найдется функция* φ_1 *такая, что* $\varphi_1 \approx \varphi$.

Доказательство. Пусть sp (δ, γ) — степень монотонности функции φ. В классе $E_n^1(L \times D, N)$ выделим подкласс со степенью монотонности sp (δ, γ). Тогда в этом подклассе найдется такая функция φ_1, что при $\dim D = k$ $j_0^{k+2}(\varphi_1) = j_0^{k+2}(\varphi)$. Следовательно, согласно свойству 1 $\varphi_1 \approx \varphi$.

Следствие 1. *Если функция* $\varphi \in E_n^1(R^+ \times D_1, N)$ *имеет степень монотонности* sp $(\delta \in N, \gamma \,|\, N = \{1, 2, \ldots\})$, *ее расширение на множество* R *имеет единственную особую точку* $u = 0$ *и для* $\overline{\varphi}$ $\dim D = k$, *то* $\varphi(u) \approx$ $\approx P_{k+1}(u) e^{-\gamma u}$.

Здесь $P_m(u)$ — алгебраический многочлен, коэффициенты которого однозначно определяются условием эквивалентности.

Следствие 2. *Нечетная функция* $\varphi \in E_n^1(R \times D, N)$ *со степенью монотонности* sp $(-1, 0)$ *и единственной особой точкой* $u = 0$ *при* $\dim D = k$ *эквивалентна выражению* $\dfrac{P_{2k+1}(u)}{(\alpha^2 + u^2)^{k+1}}$.

Лемма 3. *Пусть функция ограниченного роста удовлетворяет условиям следствия* 1, *тогда особенность* A_{k+1} *переводится косинус (синус)-преобразованием Фурье в особенность* A_{2k+3} $(A_{2k+1} + 2A_1)$.

Доказательство. Утверждение леммы получается непосредственно после вычисления интеграла выражения (5) при $\varphi(u) = P_{k+1}(u) e^{-\gamma u}$ и объясняется следующим.

По условию функция φ экспоненциального типа с особенностью A_{k+1} (для ее расширения). Тогда она симметризируется косинус (синус)-преобразованием и поэтому порядок особенности удваивается. Далее, из выражения (5) следует, что функция $K \in E_n'(L \times L \times D \bigcup \{d_0\}, N)$ определена на параметрическом множестве размерности $k + 1$. Следовательно, порядок симметризированной особенности должен увеличиться на единицу. Этого достаточно для четной функции K, для которой в результате получим порядок особенности $2k + 3$. Для нечетной функции K порядок особенностей должен быть четным, следовательно, недостаточно параметров для увеличения порядка особенности в точке 0, поэтому это приводит только к появлению двух дополнительных изолированных особенностей A_1^+ и A_1^-.

Лемма 4. *Если функция удовлетворяет следствию 2, то ее синус-преобразование Фурье снижает порядок внутренней особенности $2k+2$ до порядка $k+1$.*

Лемма очевидна, так как выражение $\dfrac{P_{2k+1}(\lambda)}{(\gamma^2+\lambda^2)^{k+1}}$ есть синус-преобразование Фурье функции $P_{k+1}(u)e^{-\gamma u}$.

Замечание 4. Леммы 3, 4 справедливы и для соответствующих преобразований Ханкеля. Однако в приложениях встречается функция φ нетипичного поведения, для которой леммы 3, 4 не верны. Например, в граничных задачах механики деформируемого твердого тела функция φ характеризует податливость неоднородной среды воздействию внешних нагрузок и является гладкой функцией ограниченного роста. Так, распределение нормальных напряжений σ в средней плоскости полосы под действием симметричных сосредоточенных сил Q задается выражением [6, с. 29 – 31]

$$\sigma(x,0) = \frac{Q}{\pi h}\int_0^\infty \varphi(u)\cos(ux)\,du$$

и для слоя [6, с. 171, 172]

$$\sigma(r,0) = \frac{Q}{\pi h^2}\int_0^\infty \varphi(u)uJ_0(ur)\,du.$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя, $\varphi(u) = 2\,\dfrac{\operatorname{sh}(u)+u\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}(2u)+2u}$.

Фукция φ гладкая, экспоненциального вида и не зависит от параметров. Ее расширение $\overline{\varphi}$ на R имеет изолированную особую точку $u=0$ типа A_{-3}, следовательно, $\varphi(u) \approx P_3(u)e^{-\gamma u}$ и согласно 3 функция σ должна иметь особенность A_7. В действительности имеем возмущенную особенность A_5.

Теорема 4. *Пусть гладкая функция φ удовлетворяет условиям следствия 1, а ядро $K(\xi - x)$ оператора Фредгольма T есть синус-преобразование Фурье функции φ. Тогда решения однородного уравнения (1) имеют внутреннюю особенность A_m и количество участков отрыва μ, где $m_{\max}$, $\mu_{\max}$ приведены в таблице*

m, μ	$\rho > 0$	$\rho < 0$	$\rho = 0$
m	$2k+5$	$2k+3$	$2k+4$
μ	$k+2$	$k+1$	$k+2$

если же функция удовлетворяет условиям следствия 2, то

m, μ	$\rho > 0$	$\rho < 0$	$\rho = 0$
m	$2\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+3$	$2\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+1$	$2\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+1$
μ	$\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+2$	$\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+1$	$\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+1$

Замечание 5. Если функция $\varphi = e^{-\lambda u}$, то оператор $S^{-1}TK$ порождает особенность A_3 при $\rho > 0$, A_1 при $\rho < 0$ и A_2 при $\rho = 0$.

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. 1. – 608 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. *Ильман В. М.* Семейственный подход к анализу контактных напряжений. – Днепропетровск, 1997. – 34 с. – Деп. в ГНТБ Украины, № 50-Ук98.
5. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Монодромии и асимптотики интегралов. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
6. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 407 с.

Получено 19.05.2000,
после доработки — 21.06.2002