УДК 512.544

А. В. Тушев (Днепропетр. нац. ун-т)

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С СОБСТВЕННЫМИ ФАКТОР-ГРУППАМИ КОНЕЧНОГО РАНГА

We study soluble groups of an infinite special rank all of whose proper normal subgroups define quotient groups of a finite special rank.

Вивчаються розв'язні групи нескінченного спеціального рангу, всі власні нормальні підгрупи яких визначають фактор-групи скінченного спеціального рангу.

1. Введение. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое теоретико-групповое свойство. Группу G, не удовлетворяющую свойству $\mathcal{P}$, будем по аналогии с [1] называть минимально не $\mathcal{P}$-группой, если все ее собственные фактор-группы имеют свойство $\mathcal{P}$. На этом пути, пожалуй, наиболее полное и интересное описание получили разрешимые минимально не полициклические группы в работе [2]. Из результатов указанной работы, в частности, следует, что разрешимая минимально не полициклическая группа конечнопорождена, финитно аппроксимируема и имеет подгруппу конечного индекса, ступень разрешимости которой не превышает числа 3.

Группы минимально бесконечного ранга введены в [3]. В работе [4] рассматривались конечнопорожденные финитно аппроксимируемые группы минимально бесконечного ранга, ступень разрешимости которых не превышает числа 3.

Модуль M будем называть модулем минимально бесконечного ранга, если его аддитивная группа имеет бесконечный ранг, а любой его собственный подмодуль определяет фактор-группу конечного ранга. Очевидно, модуль минимально бесконечного ранга не содержит собственных подмодулей, аддитивная группа которых имеет конечный ранг.

В данной работе рассматриваются свойства нильпотентного радикала (подгруппы Фиттинга) $\operatorname{Fitt} G$ разрешимых групп минимально бесконечного ранга. Показано, что $\operatorname{Fitt} G$ — единственная максимальная абелева нормальная подгруппа группы G (лемма 9). Кроме того, рассмотрены группы минимально бесконечного ранга, у которых фиттингов фактор $G/(\operatorname{Fitt} G)$ метабелев. Показано, что у таких групп подгруппа $\operatorname{Fitt} G$ элементарная абелева (теорема 4).

Теорема 4 является несложным следствием теоремы 2 — основного результата данной работы, в которой показано, что если G — метабелева группа конечного ранга, то аддитивная группа любого $\mathbb{Z}G$-модуля минимально бесконечного ранга является элементарной абелевой. Из теоремы 2 также следует, что если G — метабелева группа конечного ранга, то аддитивная группа любого простого $\mathbb{Z}G$-модуля является элементарной абелевой (теорема 3). Этот результат анонсирован в [5].

Основным инструментом для доказательства теоремы 2 является теорема 1, которая по сути является версией теоремы 1 работы [6] об индуцированных модулях над групповыми алгебрами метабелевых групп конечного ранга. Доказательство теоремы 1 работы [6] основано на методах, разработанных в работах [7, 8]. Кроме того, ключевую роль в доказательстве теоремы 2 играет описанный в [6, 9] модернизированный локальный метод. Напомним, что локальный метод основан на свойстве локальной нетеровости групповых колец локально полициклических групп (см. [10, 11]). Хотя групповые кольца разрешимых групп конечного ранга не являются нетеровыми, однако в некоторых случаях это свойство можно получить путем перехода к подходящим кольцам частных.

Так, если A — абелева нормальная подгруппа без кручения группы G конечного ранга, определяющая полициклическую фактор-группу G/A и M — циклический $\mathbb{Z}G$-модуль без $\mathbb{Z}A$-кручения, то существует нетеров циклический $\mathbb{Z}G(\mathbb{Z}A)^{-1}$-модуль M', содержащий модуль M (см. [9], § 3). Однако такой подход не позволяет изучать $\mathbb{Z}$-модульную структуру модуля M'. Поэтому в данной работе осуществляется переход к $\mathbb{Z}G(S)^{-1}$-модулям, где $S = \mathbb{Z}A \setminus p\mathbb{Z}A$ и p — простое число. Другими словами, поле частных $\mathbb{Z}A(\mathbb{Z}A)^{-1}$ заменяется локализацией $\mathbb{Z}A(S)^{-1}$ кольца $\mathbb{Z}A$ по идеалу $p\mathbb{Z}A$. Такой подход, по-прежнему, обеспечивает нетеровость (леммы 4 и 5) и в то же время позволяет изучать $\mathbb{Z}$-модульную структуру.

2. Некоторые свойства модулей минимально бесконечного ранга.

Лемма 1. *Пусть M — модуль минимально бесконечного ранга. Тогда либо M — группа без кручения, либо M — элементарная абелева p-группа.*

Доказательство. Предположим, что модуль M имеет нетривиальную $\mathbb{Z}$-периодическую часть T, и пусть W — нижний слой некоторой силовской p-подгруппы P из T. Тогда W — бесконечная элементарная абелева подгруппа, а фактор-группа M/W имеет конечный ранг. Отображение $\varphi: a \mapsto ap$ является модульным эндоморфизмом, причем, так как $\varphi(M) \simeq M/\operatorname{Ker}\varphi$ и $W \leq \operatorname{Ker}\varphi$, аддитивная группа подмодуля $\varphi(M)$ имеет конечный ранг. Поскольку модуль M не содержит собственных подмодулей, аддитивная группа которых имеет конечный ранг, можно заключить, что $\varphi(M) = 0$ и, следовательно, M — элементарная абелева p-группа.

Лемма 2. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга и M — $\mathbb{Z}G$-модуль минимально бесконечного ранга такой, что $C_G(M) = 1$. Тогда*:

i) *$C_M(G_1) = 0$ для любой нееденичной нормальной подгруппы G_1 из G;*

ii) *$C_G(M_1) = 1$ для любого ненулевого подмодуля M_1 из M.*

Доказательство. i). Предположим, что $C_M(G_1) \neq 0$ для некоторой нееденичной нормальной подгруппы G_1 из G. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда подгруппа $G_1 = A$ абелева. Пусть $s = r(A)$ — ранг подгруппы A, тогда каждая конечнопорожденная подгруппа B из A порождается не более чем s элементами. Поскольку M — модуль минимально бесконечного ранга, фактор-группа $M/C_M(A)$ имеет конечный ранг. Положим $r(M/C_M(A)) = r$.

Для любого подмножества $X \subseteq A$ обозначим через $[M, X]$ подгруппу аддитивной группы модуля M, порожденную элементами вида $m(1-x)$, где $x \in X$ и $m \in M$. Если $b \in B$, то $C_M(A) \leq C_M(B)$, а так как отображение по правилу $m \mapsto m(1-b)$ является эндоморфизмом аддитивной группы модуля M с ядром $C_M(b)$ и образом $[M, b]$, то $M/C_M(b) \simeq [M, b]$. Поэтому $r([M, b]) \leq r$, откуда нетрудно получить $r([M, B]) \leq rs$. Ввиду того что любое конечное множество элементов подгруппы $[M, A]$ содержится в некоторой подгруппе $[M, B]$, имеем $r([M, A]) \leq rs$. Поскольку A — нормальная подгруппа группы G, то непосредственно проверяется, что $[M, A]$ — подмодуль модуля M, а так как M — модуль минимально бесконечного ранга и $r([M, A]) \leq \infty$, то $[M, A] = 0$. Следовательно, $A \leq C_G(M) = 1$, что приводит к противоречию.

ii). Если $G_1 = C_G(M_1) \neq 1$ для некоторого ненулевого подмодуля M_1 из M, то непосредственно проверяется, что G_1 — нормальная подгруппа группы G и $0 \neq M_1 \leq C_M(G_1)$, но это противоречит утверждению i).

Утверждение 1. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга и M — $\mathbb{Z}G$-модуль минимально бесконечного ранга такой, что $C_G(M) = 1$. Предположим, что модуль M не является простым. Тогда G — группа почти без кручения.*

Доказательство. Ввиду утверждения ii) леммы 2 в ходе доказательства модуль M можно заменить любым его собственным подмодулем. Пусть M_1 — подмодуль модуля M такой, что $M \neq M_1 \neq 0$. Поскольку фактор-группа M/M_1 имеет конечный ранг, существует подмодуль $M_2 \leq M$ такой, что $M_1 \leq \leq M_2$ и либо M_2/M_1 — группа без кручения, либо M_2/M_1 — конечная группа. Поэтому, заменив, если нужно, M на M_2, можно считать, что либо M/M_1 — группа без кручения, либо M/M_1 — конечная группа. Пусть $G_1 = C_G(M/M_1)$, тогда из теоремы 2 [12] следует, что фактор-группа G/G_1 содержит подгруппу без кручения конечного индекса. Поэтому достаточно показать, что подгруппа G_1 почти без кручения.

Предположим, что подгруппа G_1 содержит собственную абелеву конечную нормальную p-подгруппу A. Если M — элементарная абелева q-группа и $p = = q$, то полупрямое произведение $M \leftthreetimes A$ является локально нильпотентной группой и, следовательно, $C_M(A) \neq 0$, что противоречит лемме 2. Если же $p \neq \neq q$, то из теоремы Машке следует существование $\mathbb{Z}A$-подмодуля $U \leq M$ такого, что $M = U \oplus M_1$, а так как $0 \neq U \leq C_M(A)$, получаем противоречие с леммой 2.

Теперь ввиду леммы 1 можно считать, что M — группа без кручения. Если M/M_1 — группа без кручения, то по теореме Машке существует $\mathbb{Q}A$-подмодуль $V \leq M'$ такой, что $M' = V \oplus M_1'$, где $M' = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и $M_1' = M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Очевидно, $0 \neq V \cap M \leq C_M(A)$, что противоречит лемме 2. Если $|M/M_1| < \infty$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $Mp = M_1$ для некоторого простого числа. Пусть $N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Mp^n$. Если $N \neq 0$, то фактор-группа M/N без кручения, а этот случай рассмотрен выше. Если же $N = 0$, то группа G_1 аппроксимируется конечными p-группами, поскольку G_1 действует тождественно в факторах Mp^n/Mp^{n-1}. Тогда из конечности ранга группы G следует, что периодический радикал подгруппы G_1 конечен и, следовательно, подгруппа G_1 почти без кручения.

3. О нетеровости некоторых колец частных.

Лемма 3. *Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга и B — ее конечнопорожденная плотная подгруппа. Пусть $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}A$. Тогда существует элемент $0 \neq \beta \in \mathbb{Z}A$ такой, что $\alpha\beta \in \mathbb{Z}B$, причем элемент β можно выбрать так, что $\beta \notin p\mathbb{Z}A$ для любого простого числа p.*

Доказательство. Очевидно, существует конечнопорожденная плотная подгруппа $D \leq A$ такая, что $D \geq B$ и $\alpha \in \mathbb{Z}D$. Нетрудно показать, что $|D : B| < \infty$, а так как кольцо $\mathbb{Z}B$ нетерово [13], то кольцо $\mathbb{Z}D$ является целым над $\mathbb{Z}B$. Следовательно, элемент α является корнем некоторого полинома $\alpha^n + \beta_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + \beta_0$ с коэффициентами $\beta_{n-1}, \ldots, \beta_0 \in \mathbb{Z}B$. Если n —

наименьшая степень такого полинома, то $\beta_0 \neq 0$, поскольку кольцо $\mathbb{Z}B$ не имеет делителей нуля. Тогда, полагая $\gamma = \alpha^{n-1} + \beta_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots + \beta_1$, имеем $\alpha\gamma = -\beta_0 \in \mathbb{Z}B$. Элемент γ можно представить в виде $\gamma = \beta d$, где $d \in \mathbb{Z}$ и $\beta \notin p\mathbb{Z}A$ для любого простого числа p. Очевидно, $\alpha\beta \in \mathbb{Z}B$.

Лемма 4. *Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга, p — простое число и Q — локализация кольца $\mathbb{Z}A$ по идеалу $p\mathbb{Z}A$. Пусть M — Q-модуль. Тогда*:

i) *кольцо Q — нетерово*;

ii) *фактор-модуль M/Mp не имеет $\mathbb{Z}_pA$-кручения и, в частности, не содержит ненулевых конечных подмодулей.*

Доказательство. i). Пусть B — конечнопорожденная плотная подгруппа группы A. Тогда кольцо $\mathbb{Z}B$ нетерово [13]. Пусть $\{I_j\}$ — возрастающая цепочка идеалов кольца Q и $\{L_j = I_j \cap \mathbb{Z}B\}$. Поскольку возрастающая цепочка идеалов $\{L_j\}$ обрывается, достаточно показать, что $I_j = L_jQ$. Пусть $0 \neq a \in I_j$, тогда $a = \alpha/\gamma$, где $\alpha \in \mathbb{Z}A$ и $\gamma \in \mathbb{Z}A \setminus p\mathbb{Z}A$. Следовательно, $\alpha \in I_j$ и достаточно показать, что $\alpha \in L_jQ$. По лемме 3 существует элемент $\beta \in \mathbb{Z}A \setminus p\mathbb{Z}A$ такой, что $\alpha\beta \in \mathbb{Z}B \cap I_j = L_j$, а так как элемент β обратим в кольце Q, то $\alpha \in L_jQ$.

ii). Если $\bar{a}$ — ненулевой элемент группового кольца $\mathbb{Z}_pA = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})A$ такой, что $m\bar{a} \in pM$ для некоторого $m \in M$, то его прообраз a в кольце $\mathbb{Z}A$ не принадлежит идеалу $p\mathbb{Z}A$ и $ma \in pM$. Но тогда элемент a обратим в кольце Q и, следовательно, $m \in pMa^{-1} = pM$.

Подмножество S кольца R называется мультипликативным, если $ab \in S$ для любых элементов $a, b \in S$. Элемент $x \neq 0$ кольца R называется регулярным, если x не является делителем нуля в R. Мультипликативное подмножество S кольца R называется правым подмножеством Оре, если S удовлетворяет правому условию Оре, т. е. для любого элемента $a \in S$ и любого элемента $b \in R$ существуют элементы $x \in S$ и $y \in R$ такие, что $ay = bx$.

Если S — мультипликативное подмножество кольца R, состоящее из регулярных элементов, то кольцо $R(S^{-1})$ является правым кольцом частных кольца R относительно подмножества S, если $R \leq R(S^{-1})$, все элементы из S обратимы в кольце $R(S^{-1})$ и любой элемент y кольца $R(S^{-1})$ представим в виде $y = xa^{-1}$, где $x \in R$ и $a \in S$. При этом если M — правый R-модуль без S-кручения, то $R(S^{-1})$-модуль $M(S^{-1})$ называется модулем частных модуля M относительно подмножества S, если $M \leq M(S^{-1})$ и любой элемент $k \in M(S^{-1})$ представим в виде $k = ms^{-1}$, где $m \in M$ и $s \in S$.

Пусть G — группа и R — кольцо. Кольцо $R * G$, содержащее R, называется скрещенным произведением группы G и кольца R, если существует инъективное отображение $g \mapsto \bar{g}$ группы G в группу обратимых элементов кольца $R * G$, отображающее единицу группы G в единицу кольца $R * G$ и такое, что $R * G$ является свободным правым R-модулем с базисом $\overline{G}$, причем для любых элементов $h, g \in G$ выполняются равенства $\bar{g}R = R\bar{g}$ и $\bar{g}\,\bar{h}R = \overline{gh}R$ (см. [14], гл. 1, п. 5.8).

Лемма 5. *Пусть G — группа, A — ее нормальная абелева подгруппа без кручения. Пусть K — область целостности, I — G-инвариантный простой идеал кольца KA, $S = KA \setminus I$ и Q — локализация кольца KA по идеалу I. Пусть M — KG-модуль без KA'-кручения. Тогда существуют правое кольцо частных $R = KG(S^{-1})$, которое изоморфно скрещенному произведению $Q *$ $* \hat{G}$, где $\hat{G} \simeq G/A$, и R-модуль частных $M' = M(S^{-1}) \simeq M \otimes_{KG} R$, причем:*

i) *если фактор-группа $\hat{G}$ — полициклическая, а кольцо Q — нетерово, то кольцо R также нетерово;*

ii) $M/MI \leq M'/M'I$;

iii) *если* $|M/MI| = \infty$, *то* $|M'/M'I| = \infty$.

Доказательство. Известно, что кольцо KA является областью целостности. Отсюда нетрудно получить, что элементы из S не имеют делителей нуля в KG, т. е. являются регулярными элементами. Покажем, что S является правым подмножеством Оре, т. е. для любого элемента $a \in S$ и любого элемента $b \in KG$ существуют элементы $x \in S$ и $y \in KG$ такие, что $ay = bx$. Пусть $b = \sum k_i g_i$, где $k_i \in K$ и $g_i \in G$. Положим $s = \prod a^{g_i}$. Непосредственно проверяется, что $at = bs$, где $t \in KG$. Тогда из [14] (гл. 2, теорема 1.12) следует, что существует правое кольцо частных R кольца KG относительно S. Из леммы 2.3.6 [7] следует, что кольцо R изоморфно скрещенному произведению $Q * \hat{G}$, где Q — локализация кольца KA по идеалу I и $\hat{G} \simeq G/A$. Существование модуля M' следует из [14] (гл. 2, п. 1.17).

i). Данное утверждение является известным свойством скрещенных произведений полициклических групп и нетеровых колец.

ii). Предположим, что существует элемент $a \in M$ такой, что $a \notin MI$ и $a \in M'I$. Тогда существуют элементы $b_i \in M'$ и $a_i \in I$ такие, что $a = \sum b_i a_i$. Из определения M' следует, что существуют элементы $s_i \in S$ такие, что $b_i s_i \in M$. Тогда $as \in MI$, где $s = \prod s_i \in S$. Однако это невозможно, поскольку фактор M/MI аннулируется максимальным идеалом I, $a \notin MI$ и $s \notin I$. Таким образом, $M'I \cap M = MI$. Тогда $(M + M'I)/M'I \simeq M/(M'I \cap M) =$ $= M/MI$.

iii). Данное утверждение следует из утверждения ii).

Утверждение 2. *Пусть G — группа, A — ее нормальная абелева подгруппа без кручения, определяющая полициклическую фактор-группу G/A. Пусть M — конечнопорожденный $\mathbb{Z}G$-модуль без $\mathbb{Z}A$-кручения и $S = \mathbb{Z}A \setminus p\mathbb{Z}A$, где p — простое число. Тогда*:

i) *существуют нетерово правое кольцо частных $R = KG(S^{-1})$ и нетеров R-модуль частных $M' = M(S^{-1}) \simeq M \otimes_{KG} R$;*

ii) *если $|M/Mp| < \infty$, то $M = Mp$ и, следовательно, $M' = M'p$.*

Доказательство. i). Существование кольца R и модуля M', а также нетеровость кольца R следуют из предыдущей леммы. Поскольку M — конечнопорожденный $\mathbb{Z}G$-модуль, то M' — конечнопорожденный, а значит, и нетеров R-модуль.

ii). Согласно утверждению ii) леммы 5 $M'/M'p$ содержит конечный подмодуль M/Mp. Но согласно утверждению ii) леммы 4 $M'/M'p$ не содержит ненулевых конечных подмодулей и, следовательно, $M = Mp$.

4. Модули минимально бесконечного ранга над метабелевыми группами конечного ранга.

Лемма 6. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, A — ее абелева нормальная подгруппа без кручения такая, что фактор-группа G/A — полициклическая и фактор-группа $G/C_G(A)$ — конечнопорожденная абелева. Пусть $M = b\mathbb{Z}G$ — циклический $\mathbb{Z}G$-модуль без $\mathbb{Z}A$-кручения. Тогда $|M/Mp| = \infty$ почти для всех простых чисел p.*

Доказательство. Согласно следствию 2.1 работы [11] существуют свободный $\mathbb{Z}A$-подмодуль F модуля $b\mathbb{Z}G$ и элемент $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}A$ такие, что каждый элемент фактор-модуля $b\mathbb{Z}G/F$ аннулируется некоторым произведением элементов, сопряженных с α элементами из G.

Очевидно, $\alpha \notin p\mathbb{Z}A$ почти для всех простых чисел p. Пусть p — простое число такое, что $\alpha \notin p\mathbb{Z}A$. По лемме 5.2 работы [8] каждый элемент из $(Mp \cap \cap F)/Fp$ аннулируется некоторым произведением элементов, сопряженных с α элементами из G. Тогда, так как $\mathbb{Z}_pA$ — область целостности, F/Fp — свободный $\mathbb{Z}_pA$-модуль и $\alpha \notin p\mathbb{Z}A$, то $Mp \cap F = Fp$. Следовательно, $|M/Mp| \geq |F/Fp|$, а так как $|F/Fp| = \infty$, то $|M/Mp| = \infty$.

Лемма 7. *Пусть R — кольцо и W — нетеров R-модуль. Если $|W/Wp| < < \infty$ для некоторого простого числа p, то $|N/Np| < \infty$ для любого подмодуля $N \leq W$.*

Доказательство. Предположим, что $|N/Np| = \infty$ для некоторого простого числа p. Пусть P/Np — силовская p-подгруппа фактор-группы W/Np. Из нетеровости модуля W/Np следует, что $Pp^n \leq Np$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда нетрудно показать, что $|P/Pp| = \infty$. В то же время из определения P следует $P \cap Wp = Pp$. Отсюда легко получить $|W/Wp| = \infty$, а это приводит к противоречию.

Лемма 8. *Пусть T — разрешимая группа конечного ранга, B — ее абелева нормальная подгруппа без кручения такая, что фактор-группа T/B — полициклическая. Пусть F — подгруппа конечного индекса в T такая, что $B \leq F$. Пусть $U = a\mathbb{Z}T$ — циклический $\mathbb{Z}T$-модуль без $\mathbb{Z}B$-кручения, $V = a\mathbb{Z}F$ и p — простое число. Тогда если $|U/Up| < \infty$, то и $|V/Vp| < \infty$.*

Доказательство. Предположим, что $|V/Vp| = \infty$. Поскольку $|T:F| < \infty$, то U — конечнопорожденный $\mathbb{Z}F$-модуль. Пусть $S = \mathbb{Z}B \setminus p\mathbb{Z}B$. Согласно утверждению 2 (i) существуют нетерово кольцо частных $R = \mathbb{Z}F(S^{-1})$ и нетеров R-модуль частных $W = U(S^{-1})$, причем по утверждению 2 (ii) $W = Wp$. Очевидно, $aR = V(S^{-1})$, поэтому из утверждения iii) леммы 5 следует $|aR/aRp| = = \infty$. А так как $aR \leq W$, получаем противоречие с леммой 7.

Напомним, что группа G имеет конечный свободный ранг, если она содержит конечный субнормальный ряд, в котором каждый фактор является либо бесконечным циклическим, либо локально конечным; тогда свободный ранг $r_0(G)$ группы G равен количеству бесконечных циклических факторов в таком ряде.

Подгруппа H группы G называется плотной, если для любого элемента $g \in G$ существует натуральное число n такое, что $g^n \in H$. Нетрудно показать, что подгруппа H разрешимой группы G конечного (специального) ранга тогда и только тогда является плотной, когда $r_0(G) = r_0(H)$.

Пусть R — кольцо, H — группа и U — модуль над групповым кольцом RH. Тогда U можно рассматривать и как RN-модуль, где $N = H / C_H(U)$. Этот очевидный факт используется в формулировке следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — метабелева группа конечного ранга и M — $\mathbb{Z}G$-модуль без $\mathbb{Z}$-кручения. Тогда существуют элемент $0 \neq a \in M$ и подгруппа $S \leq G$ такие, что $a\mathbb{Z}G = a\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z}G$ и либо $r_0(S) < r_0(G)$, либо для любой конечнопорожденной плотной подгруппы $H \leq S$ существует абелева H-инвариантная подгруппа без кручения $A \leq N = H / C_H(a\mathbb{Z}H)$ такая, что фактор-группа N / A полициклическая и подмодуль $a\mathbb{Z}H$, рассматриваемый как $\mathbb{Z}N$-модуль, не имеет $\mathbb{Z}A$-кручения.*

Доказательство. Данная теорема очевидным образом следует из теоремы 1 работы [6]. Действительно, пусть $M' = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — делимая оболочка аддитивной группы модуля M. Известно, что M' является $\mathbb{Q}G$-модулем, причем $M \leq M'$. Из теоремы 1 работы [6] следует существование элемента $0 \neq b \in M'$ и подгруппы $S \leq G$ таких, что $b\mathbb{Q}G = b\mathbb{Q}S \otimes_{\mathbb{Q}S} \mathbb{Q}G$, причем либо $r_0(S) < r_0(G)$, либо для любой конечнопорожденной плотной подгруппы $H \leq S$ существует абелева H-инвариантная подгруппа без кручения $A \leq N = H / C_H(b\mathbb{Q}H)$ такая, что фактор-группа N / A является почти нильпотентной и подмодуль $a\mathbb{Q}H$, рассматриваемый как $\mathbb{Q}N$-модуль, не имеет $\mathbb{Q}A$-кручения. Тогда из конечной порожденности подгруппы H следует, что фактор-группа N / A является полициклической. Очевидно, существует натуральное число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a = bn \in M$. При этом легко видеть, что элемент a и подгруппа S удовлетворяют всем условиям теоремы.

Теорема доказана.

Бесконечный финитно аппроксимируемый модуль M называется минимально бесконечным, если любой его собственный фактор-модуль конечен.

Теорема 2. *Пусть G — метабелева группа конечного ранга и M — $\mathbb{Z}G$-модуль минимально бесконечного ранга. Тогда*:

i) *M — элементарная абелева p-группа*;

ii) *либо A — минимально бесконечный $\mathbb{Z}G$-модуль, либо A содержит простой $\mathbb{Z}G$-модуль B такой, что $|A / B| < \infty$.*

Доказательство. i). Доказательство проведем индукцией по $r_0(G)$. Предположим, что утверждение теоремы не верно, тогда по лемме 1 M — группа без кручения.

По теореме 1 существуют элемент $0 \neq a \in M$ и подгруппа $S \leq G$ такие, что $a\mathbb{Z}G = a\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z}G$ и либо $r_0(S) < r_0(G)$, либо для любой конечнопорожденной плотной подгруппы $H \leq S$ существует абелева нормальная подгруппа без кручения $A \leq N = H / C_H(a\mathbb{Z}H)$ такая, что фактор-группа N / A полициклическая и модуль $a\mathbb{Z}N$ не имеет $\mathbb{Z}A$-кручения.

Поскольку $a\mathbb{Z}G = a\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}G$, то $a\mathbb{Z}S$ является $\mathbb{Z}S$-модулем минимально бесконечного ранга. Если $r_0(S) < r_0(G)$, то теорема следует из предположения индукции. Таким образом, можно считать, что $r_0(S) = r_0(G)$, а чтобы не вводить новых обозначений, будем полагать $G = S$.

Пусть H — конечнопорожденная плотная подгруппа группы G. Тогда по теореме 1 существует абелева нормальная подгруппа $A \leq N = H / C_H(a\mathbb{Z}H)$ такая, что фактор-группа N/A полициклическая и подмодуль $a\mathbb{Z}H$, рассматриваемый как $\mathbb{Z}N$-модуль, не имеет $\mathbb{Z}A$-кручения. Из леммы 6 следует существование простого числа p такого, что $|a\mathbb{Z}H / a\mathbb{Z}Hp| = \infty$.

Поскольку $a\mathbb{Z}G$-модуль минимально бесконечного ранга, то $|a\mathbb{Z}G / a\mathbb{Z}Gp| < \infty$. Тогда $|G : C| < \infty$, где $C = C_G(a\mathbb{Z}G / a\mathbb{Z}Gp)$, и, следовательно, $|H : C \cap H| < \infty$. А так как H — конечнопорожденная подгруппа и $|H : C \cap H| < \infty$, то $C \cap H$ — конечнопорожденная подгруппа группы G.

Пусть $\{h_i\}$ — конечное множество порождающих подгруппы $C \cap H$. Ввиду того что $h_i \in C_G(a\mathbb{Z}G / a\mathbb{Z}Gp)$, существуют элементы $b_i \in \mathbb{Z}G$ такие, что $a(1 - h_i) = ab_ip$. Очевидно, существует конечнопорожденная плотная подгруппа $L \leq G$ такая, что $H \leq L$ и все элементы $b_i \in \mathbb{Z}L$. По лемме 4(iii) из [6] $|L : H| < \infty$, поэтому $|L : (H \cap C)| < \infty$. Из соотношений $a(1 - h_i) = ab_ip$ следует, что подгруппа $H \cap C$ действует тождественно на фактор-модуле $a\mathbb{Z}L / a\mathbb{Z}Lp$, а так как $|L : (H \cap C)| < \infty$, то нетрудно показать, что $|a\mathbb{Z}L / a\mathbb{Z}Lp| < \infty$.

По теореме 1 существует абелева нормальная подгруппа без кручения $B \leq T = L / C_L(a\mathbb{Z}L)$ такая, что фактор-группа T/B полициклическая и подмодуль $a\mathbb{Z}L = a\mathbb{Z}T$, рассматриваемый как $\mathbb{Z}T$-модуль, не имеет $\mathbb{Z}B$-кручения. Поскольку $|L : H| < \infty$, то $|T : F| < \infty$, где $F = HC_L(a\mathbb{Z}L)/C_L(a\mathbb{Z}L)$. Поэтому подгруппу B можно выбрать так, что $B \leq F$. Поскольку $|a\mathbb{Z}L / a\mathbb{Z}Lp| < \infty$ и $|a\mathbb{Z}H / a\mathbb{Z}Hp| = \infty$, то $|a\mathbb{Z}T / a\mathbb{Z}Tp| < \infty$ и $|a\mathbb{Z}F / a\mathbb{Z}Fp| = \infty$, но это противоречит лемме 8.

ii). Данное утверждение очевидным образом следует из утверждения i).

Поскольку любой простой модуль является модулем минимально бесконечного ранга, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — метабелева группа конечного ранга и M — простой $\mathbb{Z}G$-модуль. Тогда M — элементарная абелева p-группа.*

5. Разрешимые группы минимально бесконечного ранга с метабелевым фиттинговым фактором.

Лемма 9. *Разрешимая группа минимально бесконечного ранга имеет подгруппу Фиттинга, которая является единственной максимальной абелевой нормальной подгруппой группы G.*

Доказательство. Пусть N — нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Если N неабелева, т. е. N имеет неединичный коммутант N', то фактор-группа N/N' имеет конечный ранг и из утверждения 5.2.6 [15] следует, что и вся подгруппа N имеет конечный ранг. Поскольку группа минимально бесконечного ранга не может содержать нетривиальных нормальных подгрупп конечного ранга, приходим к противоречию.

Теорема 4. *Пусть G — разрешимая группа минимально бесконечного ранга с метабелевым фиттинговым фактором. Пусть $A = \mathrm{Fitt}\, G$ — подгруппа Фиттинга группы G. Тогда*:

i) $A = C_G(A)$;

ii) A *является элементарной абелевой p-группой*;

iii) *либо A — минимально бесконечный $\mathbb{Z}\Gamma$-модуль, либо A содержит простой $\mathbb{Z}\Gamma$-модуль B такой, что $|A : B| < \infty$, где $\Gamma = G/A$ и Γ действует на A сопряжениями.*

Доказательство. Из леммы 9 следует, что группа G имеет подгруппу Фиттинга, которая является единственной максимальной абелевой нормальной подгруппой группы G. Соотношение i) является известным свойством нильпотентного радикала разрешимых групп. Очевидно, A является $\mathbb{Z}\Gamma$-модулем минимально бесконечного ранга, где $\Gamma = G/A$ и Γ действует на A сопряжениями. Тогда утверждения ii) и iii) следуют из теоремы 2.

1. *Robinson D. J. S., Zang Z.* Groups whose proper quotients have finite derived subgroups // J. Algebra. – 1988. – **118**. – P. 346 – 368.
2. *Robinson D. J. S., Wilson J. S.* Soluble groups with many polycyclic quotients // Proc. London Math. Soc. – 1984. – **48**, № 2. – P. 193 – 229.
3. *Groves J. R. J.* Metabelian groups with finitely generated integral homology // Quart. J. Math. – 1982. – **33**, № 2. – P. 405 – 420.
4. *Тушев А. В.* О разрешимых группах, все собственные фактор-группы которых имеют конечный ранг // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 3. – С. 1274 – 1281.
5. *Тушев А. В.* О модулях над метабелевыми группами конечного ранга // Междунар. конф. по алгебре: Тез. докл. по теории групп (Барнаул, 20 – 25 авг. 1991 г.). – Барнаул, 1991. – С. 113.
6. *Tushev A. V.* Induced modules over group algebras of metabelian groups of finite rank // Communs Algebra. – 1999. – **27**, № 12. – P. 5921 – 5938.
7. *Тушев А. В.* О примитивности групповых алгебр некоторых классов разрешимых групп // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 3. – С. 143 – 160.
8. *Tushev A. V.* Spectra of conjugated ideals in group algebras of abelian groups of finite rank and control theorems // Glasgow Math. J. – 1996. – **38**. – P. 309 – 320.
9. *Tushev A. V.* On modules over groups rings of soluble groups of finite rank // London Math. Soc. Lect. Note Ser. – 1999. – **261**. – P. 718 – 727.
10. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. – 1980. – **19**, № 12. – С. 150 – 172.
11. *Brown K. A.* The Nullstellensatz for certain group rings // J. London Math. Soc. – 1982. – **2**, № 26. – P. 425 – 434.
12. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. мат. журн. – 1954. – **6**, № 3. – С. 295 – 304.
13. *Hall P.* Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1954. – **4**, № 16. – P. 419 – 436.
14. *McConnell J. C., Robson J. C.* Noncommutative noetherian rings. – New York: Wiley, 1987. – 596 p.
15. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. – New York: Springer, 1982. – 481 p.

Получено 24.01.2000,
после доработки — 04.05.2001