УДК 517.9

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

We obtain new sufficient conditions for the existence and uniqueness of N-periodic solution (N is a positive integer) of a nonlinear difference equation with continuous argument of the form $x(t+1)=f(t, x(t))$ and investigate properties of this solution.

Одержано нові достатні умови існування і единості N-періодичного (N — ціле додатне число) розв'язку нелінійного різницевого рівняння з неперервним аргументом вигляду $x(t+1)=f(t, x(t))$ і досліджено його властивості.

Исследованию периодических решений разностных уравнений вида

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in R = (-\infty, +\infty)$, $f\colon R \times R \to R$, посвящено большое количество работ (см., например, [1 – 8] и цитированную в них литературу). Тем не менее многие вопросы теории периодических решений таких уравнений изучены недостаточно. Особенно это касается вопросов построения периодических решений и исследования их свойств, изучение которых является основной целью настоящей работы.

Рассмотрим уравнение (1) при следующих предположениях:

1) функция $f(t, x)$ является непрерывной при $t \in R$, $x \in R$ и N-периодической по t (N — целое положительное число);

2) для произвольных $t, x, y \in R$ функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le w(t)|x-y|, \tag{2}$$

где $w(t)$ — некоторая неотрицательная, N-периодическая функция;

3) $\omega(t)\omega(t+1)\ldots\omega(t+N-1) \le \theta < 1$, $t \in R$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f^1(t, x) &= f(t, x), \\ f^2(t, x) &= f(t+1, f^1(t, x)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^n(t, x) &= f(t+n-1, f^{n-1}(t, x)), \qquad n = 2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

и рассмотрим уравнение

$$x(t) = f^N(t, x(t)). \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда уравнение* (4) *имеет единственное непрерывное, N-периодическое решение* $\gamma(t)$.

Доказательство проведем с помощью метода последовательных приближений, которые определим с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 0, \\ x_m(t) &= f^N(t, x_{m-1}(t)), \qquad m = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассуждая по индукции, нетрудно показать, что $x_m(t)$, $m \ge 0$, непрерывны при $t \in R$ и N-периодичны.

Принимая во внимание условия 1 – 3 и формулы (3), можно убедиться, что функция $f^N(t,x)$ удовлетворяет условию

$$|f^N(t,x)-f^N(t,y)| \le \omega(t)\omega(t+1)\ldots\omega(t+N-1)\,|x-y| \tag{6}$$

при всех $t, x, y \in R$.

Докажем, что при всех $t \in R$ и $m \ge 1$ выполняется оценка

$$|x_m(t)-x_{m-1}(t)| \le M\theta^{m-1}, \tag{7}$$

где $M = \sup_t |f^N(t,0)|$.

Действительно, в силу условия 1 и (5) имеем

$$|x_1(t)-x_0(t)| = |f^N(t,0)| \le M,$$

т. е. (7) выполняется при $m = 1$. Предположим, что оценка (7) доказана для некоторого $m-1$. Тогда согласно (5) и (6) находим

$$|x_m(t)-x_{m-1}(t)| = |f^N(t,x_{m-1}(t))-f^N(t,x_{m-2}(t))| \le$$

$$\le \omega(t)\omega(t+1)\ldots\omega(t+N-1)\,|x_{m-1}(t)-x_{m-2}(t)| \le M\theta^{m-1},$$

и, таким образом, оценка (7) справедлива при всех $m \ge 1$.

Непосредственно из (7) вытекает, что последовательность непрерывных и N-периодических функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, определенных соотношениями (5), равномерно сходится к некоторой непрерывной и N-периодической функции $\gamma(t)$. Переходя в (5) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что функция $\gamma(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t)$ удовлетворяет уравнению (4).

Докажем теперь, что построенное решение $\gamma(t)$ является единственным. В самом деле, пусть имеется еще одно непрерывное и N-периодическое решение уравнения (4) $k(t)$ и $k(t) \ne \gamma(t)$. Тогда

$$k(t) = f^N(t,k(t))$$

и согласно условиям (6), 3 имеем

$$|\gamma(t)-k(t)| = |f^N(t,\gamma(t))-f^N(t,k(t))| \le$$

$$\le \omega(t)\omega(t+1)\ldots\omega(t+N-1)\,|\gamma(t)-k(t)| \le \theta\,|\gamma(t)-k(t)|$$

или

$$|\gamma(t)-k(t)| \le 0.$$

Последнее соотношение имеет место лишь в случае $k(t) \equiv \gamma(t)$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное непрерывное, N-периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — некоторое непрерывное, N-периодическое решение уравнения (1). Тогда

$$x(t+1) = f(t,x(t)),$$

$$x(t+2) = f(t+1,x(t+1)) = f(t+1,f(t,x(t))) = f^2(t,x(t)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x(t+N) = x(t) = f^N(t,x(t)),$$

т. е. $x(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Отсюда с учетом леммы 1 следует, что для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Предположим, что это не так, т. е. $\gamma(t+1) \neq f(t, \gamma(t))$. Тогда в силу тождества $\gamma(t) \equiv f^N(t, \gamma(t))$ имеем

$$\gamma(t+1) \equiv f^N(t+1, \gamma(t+1)), \quad f(t, \gamma(t)) \equiv f(t, f^N(t, \gamma(t))).$$

Далее, принимая во внимание соотношения (3) и условия 2, 3, находим

$$|f^N(t+1, \gamma(t+1)) - f(t, f^N(t, \gamma(t)))| =$$
$$= |f(t+N, f^{N-1}(t+1, \gamma(t+1))) - f(t, f^N(t, \gamma(t)))| =$$
$$= |f(t, f^{N-1}(t+1, \gamma(t+1))) - f(t, f^N(t, \gamma(t)))| \le$$
$$\le \omega(t)|f^{N-1}(t+1, \gamma(t+1)) - f^N(t, \gamma(t))| \le$$
$$\le \omega(t)\omega(t+N-1)|f^{N-2}(t+1, \gamma(t+1)) - f^{N-1}(t, \gamma(t))| \le \ldots$$
$$\ldots \le \omega(t)\omega(t+N-1)\ldots\omega(t+1)|\gamma(t+1) - f(t, \gamma(t))|$$

и, следовательно,

$$|\gamma(t+1) - f(t, \gamma(t))| \le \theta|\gamma(t+1) - f(t, \gamma(t))|.$$

Последнее неравенство выполняется лишь в случае, когда $\gamma(t+1) \equiv f(t, \gamma(t))$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Таким образом, если выполняются условия 1 – 3, то уравнение (1) имеет единственное непрерывное, N-периодическое решение $\gamma(t)$ и

$$\gamma(t) = \lim_{m \to \infty} x_m(t),$$

где $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, определяются соотношениями (5). Выполняя в (1) преобразование

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{8}$$

получаем уравнение

$$y(t+1) = F(t, y(t)), \tag{9}$$

где $F(t, y) = f(t, y + \gamma(t)) - f(t, \gamma(t))$. Принимая во внимание условия 1 – 3, можно показать, что функция $F(t, y)$ также удовлетворяет этим условиям и $F(t, 0) \equiv 0$. Следовательно, уравнение (9) имеет единственное непрерывное, N-периодическое решение $y(t) = 0$. Однако уравнение (9) имеет большое количество непрерывных при $t \ge 0$ решений, находящихся в некоторой окрестности тривиального решения $y(t) = 0$. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда уравнение* (9) *имеет семейство* $y(t) = y(t, \varphi(t))$ *непрерывных при* $t \ge 0$ *решений* (*за исключением точек* $t = 1, 2, \ldots$, *в которых они могут иметь разрывы* 1-*го рода*), *удовлетворяющих условию*

$$\lim_{t \to \infty} |y(t)| = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку для любого $t \in R^+ = [0, +\infty)$ имеем $\tau = t - [t] \in [0, 1)$, где $[t]$ — целая часть t, полагая $y(\tau) = \varphi(\tau)$ ($\varphi(t)$ — произвольная непрерывная при $t \in [0, 1)$ функция, удовлетворяющая условию $\lim_{t \to 1-0} \varphi(t) = \varphi^1 \neq \infty$), непосредственно из уравнения (9) находим

$$y(1+\tau) = F(\tau, \varphi(\tau)) = F^1(\tau, \varphi(\tau)),$$

$$y(2+\tau) = F(\tau+1, F^1(\tau, \varphi(\tau))) = F^2(\tau, \varphi(\tau)), \tag{11}$$

....

$$y(t) = y([t]+\tau) = F(\tau+[t]-1, F^{[t]-1}(\tau, \varphi(\tau))) = F^{[t]}(\tau, \varphi(\tau)).$$

Принимая во внимание условия 1 – 3, нетрудно убедиться, что так построенные решения являются непрерывными при $t \geq 0$ (за исключением точек $t = 1, 2, \ldots$, в которых они могут иметь разрывы 1-го рода). Они будут непрерывными при всех $t \geq 0$, если выполняется условие $\varphi^1 = F(0, \varphi(0))$ (следует из (11)).

Покажем, что решения уравнения (9), определяемые соотношениями (11), удовлетворяют условию (10). Действительно, поскольку в силу условия 2

$$|F(t, y)| \leq \omega(t)|y|, \quad t, y \in R,$$

и для любого $t \in R^+$ имеем $[t] = mN + l$ (m, l — некоторые целые неотрицательные числа, $l < N$), из (11) получаем

$$|y(t)| \leq \tilde{M}\theta^m,$$

где

$$\tilde{M} = \max\left\{ \sup_{0\leq\tau<1} |\varphi(\tau)|, \sup_{0\leq\tau<1} \omega(\tau)|\varphi(\tau)|, \ldots, \sup_{0\leq\tau<1} \omega(\tau)\omega(\tau+1)\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\omega(\tau+N-2)|\varphi(\tau)| \right\}.$$

Отсюда с учетом условия 3 следует (10). Теорема 2 доказана.

В теореме 1 условия 2, 3 являются наиболее обременительными. Покажем, что при рассмотрении вопроса о существовании N-периодических решений их можно существенно ослабить. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* 1 *и* $\gamma(t)$ — *непрерывное,* N-*периодическое решение уравнения* (4). *Тогда уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно непрерывное при* $t \in [0, +\infty)$ (*за исключением точек* $t = 1, 2, \ldots$) N-*периодическое решение.*

Доказательство. Поскольку для любого $t \in R^+$ имеем $\tau = t - [t] \in [0, 1)$, где $[t]$ — целая часть t, полагая $x(\tau) = \gamma(\tau)$, непосредственно из (1) находим

$$x(t) = x(\tau+[t]) = f^{[t]}(\tau, \gamma(\tau)), \tag{12}$$

где $f^{[t]}(\tau, \gamma)$ определяются посредством формул (3). В силу условий теоремы это решение является, очевидно, непрерывным при $t \in R^+$ (за исключением точек $t = 1, 2, \ldots$, в которых оно может иметь разрывы 1-го рода). Покажем, что оно является N-периодическим, т. е. $x(t+N) = x(t)$. Действительно, принимая во внимание условия теоремы и соотношения (3), получаем

$$x(\tau+N) = f^N(\tau, \gamma(\tau)) = \gamma(\tau),$$

$$x(\tau+N+1) = f^{N+1}(\tau, \gamma(\tau)) = f(\tau+N, f^N(\tau, \gamma(\tau))) =$$

$$= f(\tau, \gamma(\tau)) = f^1(\tau, \gamma(\tau)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x(\tau + N + [t]) = x(t + N) = f^{[t]}(\tau, \gamma(\tau)) = x(t).$$

Теорема 3 доказана.

***Замечания.* 1.** Решение уравнения (1), определяемое формулой (12), будет непрерывным при $t \in R^+$, если $\gamma(1) = f(0, \gamma(0))$.

2. Теоремы 1 – 3 имеют место также в случае, когда $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. При этом их доказательства остаются прежними, если $|f|$, $|x|$ определить, например, соотношениями $|f| = \max_{1 \le i \le n} |f_i|$, $|x| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Поскольку условия 1 – 3 являются только достаточными для существования и единственности непрерывного, N-периодического решения $\gamma(t)$, можно ожидать, что существуют и другие условия, гарантирующие существование и единственность такого решения уравнения (1). Следующая теорема является этому подтверждением.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия:*

1′) *функция $f(t, x)$ является непрерывной при $t, x \in R$, непрерывно дифференцируемой по x и N-периодической по t;*

2′) *для произвольных $t, x \in R$ функция $f'_x(t, x)$ удовлетворяет условию*

$$0 < \alpha \le \eta_*(t) \le f'_x(t, x) \le \eta^*(t), \tag{13}$$

где $\eta_*(t)$, $\eta^*(t)$ — некоторые положительные, N-периодические функции;

3′)

$$\eta_*(t)\eta_*(t+1)\ldots\eta_*(t+N-1) \ge \lambda > 1,$$

$$\eta^*(t)\eta^*(t+1)\ldots\eta^*(t+N-1) \le \theta, \qquad t \in R.$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное непрерывное, N-периодическое решение.*

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* 1′, 2′, 3′ *теоремы* 4. *Тогда уравнение* (4) *имеет единственное непрерывное, N-периодическое решение $k(t)$.*

Доказательство. Пусть C^0 — множество функций $x(t)$, непрерывных при $t \in R$ и N-периодических. Положив

$$\rho(x(t), y(t)) = \sup_{t \in R} |x(t) - y(t)|,$$

введем в C^0 метрику ρ. Тогда множество C^0 с метрикой ρ есть полное метрическое пространство.

С помощью соотношения

$$Tx(t) = x(t) + \frac{1}{\lambda + \theta}\left[x(t) - f^N(t, x(t)) \right] \tag{14}$$

определим отображение T и покажем, что оно является сжатым отображением пространства C^0 в себя.

Действительно, пусть $x(t) \in C^0$. Тогда в силу условия 1′ функция $Tx(t)$ является непрерывной при $t \in R$ и N-периодической, т. е. отображение T переводит C^0 в себя. Покажем, что оно является сжатым, т. е. если $x(t)$, $y(t) \in C^0$, то

$$\rho(Tx(t), Ty(t)) \leq \Delta\rho(x(t), y(t)),$$

где $\Delta = (\theta + 1)/(\theta + \lambda) < 1$. В самом деле, поскольку

$$\frac{\partial f^N(t, x)}{\partial x} = f'_x\left(t + N - 1, f^{N-1}(t, x)\right) f'_x\left(t + N - 2, f^{N-2}(t, x)\right) \ldots f'_x(t, x),$$

принимая во внимание соотношения (3) и условия 2′, 3′, получаем

$$\theta \geq \frac{\partial f^N(t, x)}{\partial x} \geq \eta_*(t + N - 1) \ldots \eta_*(t) \geq \lambda.$$

Тогда находим

$$|Tx(t) - Ty(t)| = \left|\left(1 + \frac{1}{\lambda + \theta}\right)(x(t) - y(t)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda + \theta}\left(f^N(t, x(t)) - f^N(t, y(t))\right)\right| =$$

$$= \left|\left(1 + \frac{1}{\lambda + \theta}\right)(x(t) - y(t)) - \frac{1}{\lambda + \theta}\frac{\partial f^N(t, x_*)}{\partial x}(x(t) - y(t))\right| =$$

$$= |x(t) - y(t)|\left|1 + \frac{1}{\lambda + \theta} - \frac{1}{\lambda + \theta}\frac{\partial f^N(t, x_*)}{\partial x}\right| \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\lambda + \theta} - \frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)|x(t) - y(t)| \leq \frac{\theta + 1}{\lambda + \theta}\sup_{t \in R}|x(t) - y(t)|$$

и, следовательно,

$$\sup_{t \in R}|Tx(t) - Ty(t)| \leq \Delta\sup_{t \in R}|x(t) - y(t)|,$$

что и требовалось показать.

Таким образом, согласно принципу сжатых отображений Банаха в пространстве C^0 существует неподвижная точка $k(t)$ отображения T и

$$k(t) = \lim_{m \to \infty} x_m(t),$$

где $x_0(t) \in C^0$ и $x_m(t) = T^m x_0(t)$, $m = 1, 2, \ldots$. Поскольку

$$Tk(t) = k(t),$$

в силу (14) имеем

$$k(t) = f^N(t, k(t)),$$

т. е. функция $k(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Рассуждая от противного, легко убедиться, что функция $k(t)$ является единственным непрерывным и N-периодическим решением уравнения (4). Лемма 2 доказана.

Поскольку произвольное непрерывное, N-периодическое решение уравнения (1) является решением уравнения (4), в силу леммы 2 для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что функция $k(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Предположим, что это не так, т. е. $k(t+1) \neq f(t, k(t))$. Тогда в силу тождества $k(t) \equiv f^N(t, k(t))$ имеем $k(t+1) \equiv f^N(t+1, k(t+1))$, $f(t, k(t)) \equiv f(t, f^N(t, k(t)))$. Отсюда с учетом соотношений (3) и условий 2′, 3′ вытекает

$$|k(t+1) - f(t, k(t))| = |f^N(t+1, k(t+1)) - f(t, f^N(t, k(t)))| =$$

$$= |f(t+N, f^{N-1}(t+1, k(t+1))) - f(t, f^N(t, k(t)))| =$$

$$= |f(t, f^{N-1}(t+1, k(t+1))) - f(t, f^N(t, k(t)))| =$$

$$= |f_x'(t, k_N)||f^{N-1}(t+1, k(t+1)) - f^N(t, k(t))| =$$

$$= |f_x'(t, k_N)||f(t+N-1, f^{N-2}(t+1, k(t+1)) -$$

$$- f(t+N-1, f^{N-1}(t, k(t)))| =$$

$$= |f_x'(t, k_N)||f_x'(t+N-1, k_{N-1})||f^{N-2}(t+1, k(t+1)) - f^{N-1}(t, k(t))| = \ldots$$

$$\ldots = |f_x'(t, k_N)||f_x'(t+N-1, k_{N-1})|\ldots|f_x'(t+1, k_1)||k(t+1) - f(t, k(t))| \geq$$

$$\geq \eta_*(t)\eta_*(t+1)\ldots\eta_*(t+N-1)|k(t+1) - f(t, k(t))| \geq$$

$$\geq \lambda|k(t+1) - f(t, k(t))|,$$

где $k_i = k_i(t) \in \left[f^{i-1}(t+1, k(t+1)), f^i(t, k(t))\right]$, $i = 1, \ldots, N$, что возможно лишь в случае, когда $k(t+1) = f(t, k(t))$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.

Выполняя в (1) замену переменных

$$x(t) = z(t) + k(t), \tag{15}$$

получаем уравнение

$$z(t+1) = \tilde{F}(t, z(t)), \tag{16}$$

где $\tilde{F}(t, z) = f(t, z + k(t)) - f(t, k(t))$. Легко видеть, что функция $\tilde{F}(t, z)$ удовлетворяет условиям $1' - 3'$ и $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$. Поскольку $\tilde{F}_z'(t, z) = f_z'(t, z + k(t))$ и в силу (13) имеем $0 < \alpha \leq \eta_*(t) \leq \tilde{F}_z'(t, z)$ при $t, z \in R$, нетрудно показать, что существует единственная функция $\Phi(t, z)$, являющаяся непрерывной по t, z, непрерывно дифференцируемой по z и N-периодической по t, такая, что $\Phi(t, 0) \equiv 0$ и $\tilde{F}(t, \Phi(t, z)) = z$. Отсюда и из (13) следует

$$\frac{1}{\eta^*(t)} \leq \Phi_z'(t, z) \leq \frac{1}{\eta_*(t)} \tag{17}$$

и уравнение (16) можно записать в виде

$$z(t) = \Phi(t, z(t+1)). \tag{18}$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $1' - 3'$. *Тогда уравнение* (18), *а следовательно, и уравнение* (16), *имеет семейство* $z(t) = z(t, \psi(t))$ *непрерывных при* $t \leq 0$ *(за исключением точек* $t = -1, -2, \ldots$, *в которых они могут иметь разрывы* 1*-го рода) решений, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{t \to +\infty} |z(t)| = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Положим $z(t) = \psi(t)$ при $t \in (-1, 0]$, где $\psi(t)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{t \to -1+0} \psi(t) = \psi^1 \neq \infty$. Тогда непосредственно из (18) вытекает

$$z(\tau-1) = \Phi(\tau-1, \psi(\tau)) = \Phi^1(\tau, \psi(\tau)),$$

$$z(\tau-2) = \Phi(\tau-2, \Phi^1(\tau, \psi(\tau))) = \Phi^2(\tau, \psi(\tau)), \qquad (20)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z(t) = z(\tau-[|t|]) = \Phi\left(\tau-[|t|], \Phi^{[|t|]-1}(\tau, \psi(\tau))\right) = \Phi^{[|t|]}(\tau, \psi(\tau)),$$

где $\tau = t + [|t|]$. В силу условий $1'-3'$ так построенные решения являются непрерывными при $t \le 0$ (за исключением точек $t = -1, -2, \ldots$, в которых они могут иметь разрывы 1-го рода). Эти решения будут, очевидно, непрерывными при всех $t \le 0$, если функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию $\psi^1 = \Phi(-1, \psi(0))$.

Далее, принимая во внимание (17) и (20), получаем

$$|z(\tau-1)| \le \overline{M},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|z(\tau-N)| \le \overline{M}\lambda^{-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|z(t)| = |z(\tau-[|t|])| \le \overline{M}\lambda^{-m},$$

где $[|t|] = mN + l$, m, l — целые неотрицательные числа,

$$l < N,$$

$$\overline{M} = \max\left\{\sup_{-1<\tau\le 0}|\psi(\tau)|, \sup_{-1<\tau\le 0}\eta_*^{-1}(\tau-1)|\psi(\tau)|, \ldots, \sup_{-1<\tau\le 0}\eta_*^{-1}(\tau-1)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\eta_*^{-1}(\tau-N+1)|\psi(\tau)|\right\}.$$

Отсюда и из условия $3'$ следует (19). Теорема 5 доказана.

1. *Gumowski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems. – Berlin, 1980. – 272 p.
2. *Murray J. D.* Mathematical biology. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1989. – 767 p.
3. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 127 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
5. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 307 с.
6. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
7. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 140 – 145.
8. *Agarwal R. P., Romanenko E. Yu.* On stable periodic solutions of difference equations // Appl. Math. Lett. – 1998. – **11**, № 4. – P. 81 – 84.

Получено 23.06.99