УДК 517.9

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К РЕШЕНИЮ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА*

For an unbounded domain of the meridional plane with a limited smooth boundary satisfying some additional conditions, we develope a method of reduction of the Dirichlet problem for the axial-symmetric potential to the Fredholm integral equations. In the case where the domain boundary is the unit circle, we obtain a solution of the outer Dirichlet problem in the explicit form.

Для необмеженої області меридіанної площини з обмеженою гладкою межею, що задовольняє деякі додаткові умови, розроблено метод редукції задачі Діріхле для осесиметричного потенціалу до інтегральних рівнянь Фредгольма. У випадку, коли межею області є одиничне коло, розв'язок зовнішньої задачі Діріхле одержано в явному вигляді.

В работе [1] разработан новый метод решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала $\varphi(x, y)$ в односвязной области D меридианной плоскости xOy с ограниченной границей ∂D. При этом искомая функция $\varphi(x, y)$ в области D, симметричной относительно оси Ox, удовлетворяет уравнению

$$y\Delta\varphi(x, y)+\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, и принимает заданные значения на границе области ∂D.

В случае, когда граница ∂D является гладкой кривой, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, в [1] задача Дирихле редуцирована к уравнению Фредгольма на вещественной прямой и доказано, что это уравнение имеет единственное решение в пространстве четных непрерывных функций.

Отметим, что полученное таким способом в работе [1] решение внутренней задачи Дирихле единственно. Это очевидным образом следует из того, что осесимметричный потенциал $\varphi(x, y)$ в ограниченной области D подчиняется принципу максимума.

В то же время в случае неограниченной области D из единственности решения указанного уравнения Фредгольма не следует единственность решения сформулированной выше задачи Дирихле. Действительно, построенное в [1] решение внешней задачи Дирихле, вообще говоря, не обращается в нуль в бесконечно удаленной точке. Поскольку для таких решений уравнения (1) принцип максимума не выполняется, полученное решение задачи Дирихле в случае неограниченной области D не является единственным.

Чтобы внешняя задача Дирихле имела единственное решение, необходимо в постановку задачи включить дополнительное требование

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Ниже будет получено решение внешней задачи Дирихле, удовлетворяющее условию (2). При этом для решения задачи используется модификация метода работы [1].

В дальнейшем, если не приняты другие предположения, D обозначает неограниченную область меридианной плоскости xOy, граница которой ∂D является замкнутой жордановой гладкой кривой, симметричной относительно оси Ox. Замыкание области D обозначим через $\overline{D}$.

Рассмотрим *внешнюю задачу Дирихле для осесимметричного потенциала* об

* Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда INTAS (грант № 99-00089)

отыскании непрерывной в $\overline{D}$ функции $\varphi(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в области D и условию (2), а также принимает заданные значения $\varphi_{\partial D}(x, y)$ на границе области ∂D, т. е. удовлетворяет равенству $\varphi(x, y) = \varphi_{\partial D}(x, y)$ при всех $(x, y) \in \partial D$.

Через $\mathbb{R}$ обозначим вещественную прямую комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Область плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D меридианной плоскости xOy при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$, будем обозначать через D_z, ее замыкание — $\overline{D_z}$, а границу — ∂D_z. Положительным направлением обхода границы ∂D_z будем считать такое направление, при котором область D_z остается слева. Обозначим через b_1 и b_2 точки, в которых граница ∂D_z пересекает вещественную прямую, при этом $b_1 < b_2$.

Рассмотрим гомотопическое семейство $\{\Gamma_{z\bar{z}}\}$ жордановых спрямляемых кривых в области D_z, каждая кривая $\Gamma_{z\bar{z}}$ которого симметрична относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и соединяет точки z и $\bar{z}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$, пересекая при этом вещественную прямую на интервале $(-\infty, b_1)$. Дополним еще это семейство кривых дугами $\Gamma_{z\bar{z}}$ границы ∂D_z такими, что их концами являются точки z и $\bar{z}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$, и, кроме того, $b_1 \in \Gamma_{z\bar{z}}$.

Если $z \in \overline{D_z}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ понимаем как непрерывную ветвь аналитической функции $G(t) = \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ с разрезом вдоль кривой $\Gamma_{z\bar{z}}$ такую, что $G(b_2) > 0$. Обозначим также $\left(\sqrt{(\tau - z)(\tau - \bar{z})}\right)^+ := \lim\limits_{t \to \tau, t \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_z}} \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ при $\tau \in \partial D_z \setminus \{z, \bar{z}\}$.

В работе [2] показано, что каждой голоморфной в области D_z функции F, принадлежащей классу Смирнова E_1 (см., например, [3, с. 205]) и удовлетворяющей условию

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = 0, \tag{3}$$

соответствует решение $\varphi(x, y)$ уравнения (1) в области D, задаваемое формулой

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}}\, dt & \text{при} \quad y \neq 0; \\ F(x) & \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad x < b_1; \\ -F(x) & \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad x > b_2, \end{cases} \tag{4}$$

где $(x, y) \in D$, $z = x + iy$.

Кроме того, в [2] установлены также достаточные условия непрерывной продолжимости интегрального представления (4) осесимметричного потенциала на границу области.

Следовательно, естественно получить решение внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в результате решения интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}\right)^+}\, dt = \varphi_{\partial D}(x, y), \qquad z = x + iy \in \partial D_z \setminus \{b_1, b_2\}, \tag{5}$$

в котором искомая функция F должна быть голоморфной в области D_z и удовлетворять условию (3). При этом, как и в случае внутренней задачи Дирихле, можно ограничиться отысканием такой функции F, которая удовлетворяет дополнительному условию

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \qquad \forall z \in D_z. \tag{6}$$

Как и в работе [1], при решении внешней задачи Дирихле будем использовать конформное отображение $\sigma_-(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$ на область D_z^-, удовлетворяющее условиям нормировки $\sigma_-(0) = \infty$ и $\sigma_-(-1) = b_1$.

В дальнейшем предполагаем, что отображение $\sigma_-(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой

$$\omega(\sigma'_-, \varepsilon) := \sup_{|Z_1|=|Z_2|=1,\ |Z_1 - Z_2| \le \varepsilon} |\sigma'_-(Z_1) - \sigma'_-(Z_2)|$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega(\sigma'_-, \eta)}{\eta} \ln^3 \frac{1}{\eta} d\eta < \infty. \tag{7}$$

В работе [1] указаны условия на угол, который образует касательная к границе ∂D_z с положительным направлением оси Ox, достаточные для выполнения неравенства (7).

Введем в рассмотрение гельдеровский класс $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ функций $g : \partial D_z \to \mathbb{C}$, для каждой из которых при фиксированном $\alpha \in (0; 1]$ существует $\nu \in [0; \alpha)$ такое, что выполняется условие

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le$$

$$\le c(\max\{|z_1 - b_1||z_1 - b_2|, |z_2 - b_1||z_2 - b_2|\})^{-\nu} |z_1 - z_2|^\alpha \qquad \forall z_1, z_2 \in \partial D_z,$$

где постоянная c не зависит от z_1 и z_2. Соответствующий ему класс функций $g_{\partial D} : \partial D \to \mathbb{R}$, для каждой из которых функция g, определяемая равенством $g(x + iy) := g_{\partial D}(x, y)$ $\forall (x, y) \in \partial D$, принадлежит классу $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$, будем обозначать $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$.

В дальнейшем предполагаем, что заданная функция $\varphi_{\partial D}$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, и удовлетворяет условию

$$\varphi_{\partial D}(x, -y) = \varphi_{\partial D}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \partial D. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$M_-(Z, T) := \sqrt{\frac{(T - Z)(T - \overline{Z})}{T^2(\sigma_-(T) - \sigma_-(Z))(\sigma_-(T) - \sigma_-(\overline{Z}))}},$$

которую при каждом фиксированном Z таком, что $Z \ne -1$ и $Z \ne 0$, будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M_-(Z, -1) > 0$.

При доказательстве теоремы 2 работы [1] интегральное уравнение (5) приведено к сингулярному интегральному уравнению

$$A(\xi, \xi) U_*(\xi) + \frac{2\xi B(\xi, \xi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{U_*(\tau)}{\tau^2 - \xi^2} d\tau - \frac{2\xi}{\pi} \int_0^\xi U_*(\tau) \int_\tau^\xi \frac{s(A(s, \tau) - A(\xi, \tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2} \sqrt{s^2 - \tau^2}} ds d\tau -$$

$$- \frac{4\xi}{\pi^2} \int_0^\xi \left(\int_\tau^\xi \frac{s(B(s, \tau) - B(\xi, \tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2} \sqrt{s^2 - \tau^2}} ds \int_0^\infty \frac{\tau U_*(\eta)}{\eta^2 - \tau^2} d\eta \right) d\tau = f_*(\xi) \qquad \forall \xi > 0, \tag{9}$$

в котором

$$U_*(\xi) = \operatorname{Re}\frac{i(\xi-i)F\left(\sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)\sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)}{2(\xi+i)^2},$$

$$A(\xi,\tau) := 2\operatorname{Re}M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i},\frac{\tau-i}{\tau+i}\right), \quad B(\xi,\tau) := 2\operatorname{Im}M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i},\frac{\tau-i}{\tau+i}\right), \tag{10}$$

$$f_*(\xi) = \varphi_*(\xi) - \xi\int_0^{\xi}\frac{s(\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\,ds.$$

Здесь функция φ_* выражается через правую часть уравнения (5) равенством

$$\varphi_*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}\varphi_{\partial D}(x,y),$$

где $x+iy = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)$.

Если при этом функция U_* является таким решением уравнения (9), что функция

$$F(z) = -\frac{2(\xi+i)^2}{\pi(\xi-i)\sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(|\tau|)}{\tau-\xi}\,d\tau, \quad z=\sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\in D_z, \quad \operatorname{Im}\xi>0, \tag{11}$$

непрерывно продолжается из области D_z на границу ∂D_z, то граничные значения функции (11) удовлетворяют интегральному уравнению (5).

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ банахово пространство функций $g_*:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, непрерывных на расширенной вещественной прямой $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, с нормой $\|g_*\|_{C(\mathbb{R})} := \sup_{\tau\in\mathbb{R}}|g_*(\tau)|$. Введем в рассмотрение модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R}}(g_*,\varepsilon) := \sup_{\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R},|\tau_1-\tau_2|\le\varepsilon}|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)|,$$

а также локальный центрированный (относительно бесконечно удаленной точки) модуль непрерывности $\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\varepsilon) := \sup_{\tau\in\mathbb{R},|\tau|\ge1/\varepsilon}|g_*(\tau)-g_*(\infty)|$ функции $g_*\in C(\mathbb{R})$. Обозначим теперь через $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ класс функций $g_*\in C(\mathbb{R})$, модули непрерывности которых удовлетворяют условиям Дини:

$$\int_0^1\frac{\omega_{\mathbb{R}}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty, \qquad \int_0^1\frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty.$$

Обозначим еще через $C_e(\mathbb{R})$ подпространство банахова пространства $C(\mathbb{R})$, состоящее из четных функций, а через $\mathcal{D}_e(\mathbb{R})$ — множество четных функций класса $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим функции

$$\tilde m(\xi,\tau) := \begin{cases}\dfrac{\xi}{\pi}\displaystyle\int_{\tau}^{\xi}\frac{s\big(A(s,\tau)-A(\xi,\tau)+i(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))\big)}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds & \text{при } \xi\tau>0, |\tau|<|\xi|;\\ 0 & \text{при } \xi\tau<0 \text{ или } \xi\tau>0, |\tau|>|\xi|.\end{cases}$$

$$\tilde A(\xi,\tau) := 2\operatorname{Re}\tilde m(\xi,\tau), \qquad \tilde B(\xi,\tau) := 2\operatorname{Im}\tilde m(\xi,\tau),$$

$$k_p(\xi,\tau) := -\frac{\xi}{|\xi|}\tilde{A}(\xi,\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi}\frac{\tilde{B}(\xi,\eta)}{\eta-\tau}d\eta$$

и интегральные операторы

$$(k_p f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_p(\xi,\tau)}{\sqrt{\tau^2+1}}f(|\tau|)d\tau,$$

$$(Rf)(\xi) := \sqrt{\xi^2+1}\left(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}f(|\xi|) + \right.$$

$$\left. + \frac{P_-(\xi)}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{(\tau^2+1)\left|\operatorname{Im}\sigma_-\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2|\tau|}}\;\frac{f(|\tau|)}{\tau-\xi}d\tau\right),$$

где $P_-(\xi) := \sqrt{-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^2\sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} - \sqrt{-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^2\sigma'_-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)}$, при этом значения корней положительны при $\xi = 0$.

В работе [1] при доказательстве теоремы 3 сингулярное интегральное уравнение (9) приведено к интегральному уравнению Фредгольма

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = (Rf_*)(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

в котором $U_0(\xi) = U_*(|\xi|)\sqrt{\xi^2+1}$ и оператор Rk_p компактен в пространстве $C_e(\mathbb{R})$. При этом доказано, что уравнение (12) имеет единственное решение в пространстве $C_e(\mathbb{R})$, которое в случае, если функция $(Rf_*)(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{D}_e(\mathbb{R})$, также принадлежит этому классу.

Прежде чем перейти к нахождению решения внешней задачи Дирихле, удовлетворяющего условию (2), рассмотрим один специальный случай этой задачи. Так, рассмотрим задачу об отыскании осесимметричного потенциала $\varphi_D(x,y)$ в области D, удовлетворяющего условию вида (2) и равенству $\varphi_D(x,y) \equiv 1$ на границе ∂D. Назовем эту задачу *характеристической* задачей области D.

Справедлива следующая теорема о разрешимости характеристической задачи неограниченной области D.

Теорема 1. *Пусть конформное отображение $\sigma_-(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию (7). Тогда существует единственное решение характеристической задачи области D, которое представляется формулой*

$$\varphi_D(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z}\frac{F_D(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt & \text{при} \quad y \neq 0; \\ F_D(x) & \text{при} \quad y = 0 \ \text{и} \ x < b_1; \\ -F_D(x) & \text{при} \quad y = 0 \ \text{и} \ x > b_2, \end{cases} \tag{13}$$

в которой $(x,y) \in D$, $z = x + iy$, а голоморфная в области D_z функция F_D выражается равенством

$$F_D(z) = -\frac{2(\xi+i)^2}{\pi(\xi-i)\sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_D(|\tau|)}{\sqrt{\tau^2+1}}\frac{d\tau}{\tau-\xi}, \qquad z = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z, \quad \operatorname{Im}\xi > 0.$$

Здесь U_D — *решение интегрального уравнения Фредгольма* (12), *в котором* $f_*(\xi) \equiv (\xi^2+1)^{-1}$.

Доказательство. Для решения характеристической задачи области D рассмотрим интегральное уравнение (5), в котором $\varphi_{\partial D}(x, y) \equiv 1$. Оно приводится к сингулярному интегральному уравнению (9) с правой частью $f_*(\xi) \equiv (\xi^2+1)^{-1}$. Регуляризуя далее полученное сингулярное интегральное уравнение так, как это сделано при доказательстве теоремы 3 из [1], получаем интегральное уравнение Фредгольма (12) с искомой функцией $U_0 \equiv U_D$. Поскольку при условиях теоремы функция $(Rf_*)(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{D}_e(\mathbb{R})$, согласно доказанному в теореме 3 работы [1] уравнение (12) имеет единственное решение U_D в пространстве $C_e(\mathbb{R})$, которое, кроме того, принадлежит классу $\mathcal{D}_e(\mathbb{R})$. Следовательно, существует единственное решение характеристической задачи области D, которое представляется формулой (13).

Теорема доказана.

Используя полученное решение характеристической задачи области D, будем искать решение внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала, удовлетворяющего условию (2), в виде

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_{\partial D}(b_2, 0)\varphi_D(x, y) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \text{при } y \neq 0; \\ \varphi_{\partial D}(b_2, 0)\,\varphi_D(x, 0) + F(x) & \text{при } y = 0 \text{ и } x < b_1; \\ \varphi_{\partial D}(b_2, 0)\,\varphi_D(x, 0) - F(x) & \text{при } y = 0 \text{ и } x > b_2, \end{cases} \tag{14}$$

где голоморфная в области D_z функция F удовлетворяет условиям (3), (6) и является решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^+}\,dt = \varphi_{\partial D}(x, y) - \varphi_{\partial D}(b_2, 0), \tag{15}$$

$$z = x + iy \in \partial D_z \setminus \{b_1, b_2\}.$$

Уравнение (15) рассмотрено в работе [1]. Из доказанных там теорем 2, 3 следует существование и единственность голоморфной в области D_z функции F, удовлетворяющей условиям (3), (6) и интегральному уравнению (15).

Таким образом, справедлива следующая теорема о разрешимости внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \leq$ ≤ 1, *и удовлетворяет условию* (8), *а конформное отображение* $\sigma_-(Z)$ *на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию* (7). *Тогда решение внешней задачи Дирихле, удовлетворяющее условию* (2), *единственно и задается формулой* (14), *в которой функция* $\varphi_D(x, y)$ *задается формулой* (13), *а голоморфная в области* D_z *функция* F *выражается равенством* (11). *При этом функция* U_* *имеет вид* $U_*(\xi) = \dfrac{U_0(\xi)}{\sqrt{\xi^2+1}}$, *где* U_0 — *решение уравнения Фредгольма* (12) *в пространстве* $C_e(\mathbb{R})$.

Из теорем 1, 2 очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *При условиях теоремы 2 решение внешней задачи Дирихле, удовлетворяющее условию* (2), *представляется также формулой* (4), *в которой функция* F *выражается равенством* (11), *где*

$$U_*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}\left(U_0(\xi) + \varphi_{\partial D}(b_2, 0)U_D(\xi)\right).$$

При этом указанная функция F *является единственным голоморфным в области* D_z *решением уравнения* (5), *удовлетворяющим условиям* (3), (6).

Таким образом, при условиях теоремы 2 интегральное уравнение (5) внешней задачи Дирихле редуцировано к двум интегральным уравнениям Фредгольма (12) для нахождения функций U_0 и U_D. Отметим, что в работе [4] задача Дирихле для уравнения, обобщающего уравнение (1), с помощью потенциала двойного слоя, ассоциированного с этим уравнением, также редуцирована к интегральному уравнению Фредгольма, но при более жестких ограничениях на границу области.

Покажем теперь, что, по существу, все решения уравнения (1) в области D с произвольной ограниченной (в том числе и неспрямляемой) границей, удовлетворяющие условию (2), представляются формулами вида (4).

Теорема 3. *Для любого осесимметричного потенциала* $\varphi(x, y)$ *в области* D *с ограниченной жордановой границей, удовлетворяющего условию* (2) *и условию вида* (8), *существует единственная голоморфная в области* D_z *функция* F, *удовлетворяющая условиям* (3), (6), *и такая, что потенциал* $\varphi(x, y)$ *представляется в виде*

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \text{при } y \neq 0; \\ F(x) & \text{при } y = 0 \text{ и } x < b_1; \\ -F(x) & \text{при } y = 0 \text{ и } x > b_2. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $(x, y) \in D$, $z = x + iy$, γ — *произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая ограничивает область* D'_z *такую, что* $\Gamma_{z\bar{z}} \subset D'_z$ *и* $D'_z \subset D_z$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x, y)$ — решение уравнения (1) в области D и $z = x + iy \in D_z$. Обозначим через γ_ρ образ окружности $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| = \rho < 1\}$ при отображении $\sigma_-(Z)$, а через $D_{z,\rho}$ — неограниченную область, границей которой является кривая γ_ρ. В качестве семейства $\{\Gamma_{z\bar{z}}\}$ возьмем семейство дуг всех возможных кривых γ_ρ, $0 < \rho < 1$, каждая кривая $\Gamma_{z\bar{z}}$ которого соединяет точки z и $\bar{z}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$, пересекая при этом вещественную прямую на интервале $(-\infty, b_1)$. Тогда очевидно, что с учетом теоремы Коши при условии (3) равенство (16) при $z \in \gamma_\rho$, $y \neq 0$ приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^+}\,dt = \varphi(x, y),$$

где $\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^+ := \lim\limits_{\tau \to t,\, \tau \in \mathbb{C}\setminus\overline{D_{z,\rho}}} \sqrt{(\tau - z)(\tau - \bar{z})}$.

Теперь с учетом следствия 1 доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 1 из [1].

Отметим, что в теореме 8 из [5] при некоторых дополнительных предположениях об области D и функции $\varphi(x, y)$ голоморфная функция F, входящая в формулу (16), найдена в явном виде.

Отметим также, что в случае, когда границей области D является окружность, интегральное уравнение (5) разрешимо в явном виде. При этом справедлива следующая теорема о разрешимости в явном виде внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала.

Теорема 4. *Пусть* $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 > 1\}$, *функция* $\varphi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, *и удовлетворяет условию* (8). *Тогда решение задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в области* D, *удовлетворяющее условию* (2), *выражается формулой*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{\partial D}(1;0)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F_*\left(i\dfrac{1+t}{1-t}\right)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \text{при } y \ne 0; \\ -\dfrac{\varphi_{\partial D}(1;0)}{x} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F_*\left(i\dfrac{1+t}{1-t}\right)}{t-x}\,dt & \text{при } y = 0 \text{ и } x < -1; \\ \dfrac{\varphi_{\partial D}(1;0)}{x} - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F_*\left(i\dfrac{1+t}{1-t}\right)}{t-x}\,dt & \text{при } y = 0 \text{ и } x > 1, \end{cases}$$

в которой $z = x + iy$,

$$F_*(\xi) = i(\xi - i)f_*(|\xi|) + \frac{2\xi(\xi - i)}{\pi}\int_0^\infty \frac{f_*(\tau)}{\tau^2 - \xi^2}\,d\tau \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{17}$$

Здесь функция f_* *задается равенством* (10), *при этом функция* φ_* *связана с заданными значениями* $\varphi_{\partial D}$ *равенством*

$$\varphi_*(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}}\left(\varphi_{\partial D}\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}, \frac{-2\tau}{\tau^2+1}\right) - \varphi_{\partial D}(1;0)\right) \qquad \forall \tau > 0.$$

Доказательство. Очевидно, что при условиях теоремы $\sigma_-(Z) = Z^{-1}$ и выполняется тождество $M_-(Z,T) \equiv 1$. Поэтому уравнение (9) превращается в равенство $U_*(\xi) = f_*(\xi)/2$ при всех $\xi > 0$. Отсюда, в частности, следует, что единственным решением характеристической задачи области D в этом случае является функция $\varphi_D(x,y) = 1/(x^2+y^2)$. Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что предельные значения правой части равенства (11) выражаются по формуле Сохоцкого (см., например, [6, с. 47]) и представляются равенством (17).

1. *Плакса С. А.* Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 12. – С. 1623–1640.
2. *Плакса С. А.* Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I // Там же. – № 5. – С. 631–646.
3. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
4. *Раджабов Н.* Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу на плоскости // Докл. АН ТаджССР. – 1974. – **17**, № 8. – С. 7–11.
5. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1695–1703.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Получено 26.12.2001