УДК 517.911

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина (Южноукр. пед. ун-т, Одесса)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$

We prove the existence of continuously differentiable solutions $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ such that

$$\|x(t) - \xi(t)\| = O(\eta(t)), \quad \|x'(t) - \xi'(t)\| = O(\eta(t)/t), \quad t \to +0,$$

or

$$\|x(t) - S_N(t)\| = O(t^{N+1}), \quad \|x'(t) - S_N'(t)\| = O(t^N), \quad t \to +0,$$

where

$$\xi : (0, \tau) \to \mathbb{R}^n, \quad \eta : (0, \tau) \to (0, +\infty), \quad \|\xi(t)\| = o(1),$$

$$\eta(t) = o(t), \quad \eta(t) = o(\|\xi(t)\|), \quad t \to +0, \quad S_N(t) = \sum_{k=2}^{N} c_k t^k,$$

$$c_k \in \mathbb{R}^n, \ k \in \{2, \ldots, N\}, \ 0 < \rho < \tau, \ \rho \text{ is sufficiently small.}$$

Доводиться існування неперервно диференційовних розв'язків $x : (0, \rho] \mapsto \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\|x(t) - \xi(t)\| = O(\eta(t)), \quad \|x'(t) - \xi'(t)\| = O(\eta(t)/t), \quad t \to +0,$$

або

$$\|x(t) - S_N(t)\| = O(t^{N+1}), \quad \|x'(t) - S_N'(t)\| = O(t^N), \quad t \to +0,$$

де

$$\xi : (0, \tau) \to \mathbb{R}^n, \quad \eta : (0, \tau) \to (0, +\infty), \quad \|\xi(t)\| = o(1),$$

$$\eta(t) = o(t), \quad \eta(t) = o(\|\xi(t)\|), \quad t \to +0, \quad S_N(t) = \sum_{k=2}^{N} c_k t^k,$$

$$c_k \in \mathbb{R}^n, \ k \in \{2, \ldots, N\}, \ 0 < \rho < \tau, \ \rho \text{ — достатньо мале.}$$

Введение. Исследованию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных, либо частично разрешенных относительно старших производных, посвящено много работ (см., например, [1 – 7]). Главное внимание в них было уделено вопросам существования и единственности решения, а также сходимости к решению последовательностей приближений. Однако асимптотические свойства решений таких уравнений изучены сравнительно мало даже в простейших случаях. Настоящая работа посвящена этой тематике. Методы исследования, разработанные для дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, здесь оказываются неприменимыми. В то же время, по мнению авторов, именно исследование асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений представляет наибольший интерес как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений. Авторы поставили своей целью выполнить качественное исследование решений задачи Коши $F(t, x, x') = 0$, $x(0) = 0$ в окрестности начальной точки. Одновременно решался вопрос о возможности с единых позиций, по одной и той же схеме рассуждений, исследовать как регулярные, так и сингулярные задачи Коши для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Данная работа является первой из намеченного цикла работ, в которых излагаются результаты, полученные авторами в указанном направлении. Здесь методами качественной теории дифференциальных уравнений (см. [8 – 10], а также [11, 12]) исследовано асимптотическое поведение при $t \to +0$ решений задачи Коши $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$. Указаны достаточные условия существования и единственности непрерывно дифференцируемых решений $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}^n$ (где $\rho>0$ достаточно мало) с определенными асимптотическими свойствами. Оказалось, что при изучении задачи Коши указанного вида применима методика исследования, предложенная одним из авторов в [12]. Разумеется, при этом преодолеваются новые технические трудности, но основная схема рассуждений из [12] остается прежней. Поэтому при доказательстве теорем настоящей работы авторы отсылают читателя за подробностями к работе [12]; все обозначения и терминология настоящей статьи те же, что и в [12]. Отметим, что применяемая методика исследования позволила выяснить асимптотическое поведение при $t\to+0$ не только найденных решений, но и первых производных этих решений.

1. Априорные оценки. Рассмотрим задачу Коши

$$x' = f(t,x,x'), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $t\in(0,\tau)$ — действительная переменная, $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}^n$ — неизвестная действительная функция, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t,x,y): t\in(0,\tau),\ \|x\|<\lambda(t),\ \|y\|<r\},$$

$\lambda:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывная неубывающая функция, $\lim_{t\to+0}\lambda(t)=0$, r — постоянная. Предположим, что

$$\|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)\| \le l_3\|y_1-y_2\|,\qquad (t,x,y_i)\in\mathcal{D},\quad i\in\{1,2\}, \tag{3}$$

где l_3 — постоянная, $l_3<1$.

Определение. *Пусть* ρ — *постоянная*, $\rho\in(0,\tau)$. *Будем называть* ρ-*решением задачи* (1), (2) *непрерывно дифференцируемую функцию* $x:(0,\rho]\to\to\mathbb{R}^n$ *со свойствами*:

1) $(t,x(t),x'(t))\in\mathcal{D}$ *при всех* $t\in(0,\rho]$;

2) x *тождественно удовлетворяет уравнению* (1) *при всех* $t\in(0,\rho]$.

Пусть существуют непрерывно дифференцируемые функции $\xi:(0,\tau)\to\mathbb{R}^n$, $\eta:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ и непрерывная функция $\omega:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ такие, что $r_0\|\xi(t)\|<\lambda(t)$, $t\in(0,\tau)$, r_0 — постоянная, $r_0>1$, $\|\xi'(t)-f(t,\xi(t),\xi'(t))\|\le\le\omega(t)$, $t\in(0,\tau)$, $\lim_{t\to+0}\xi(t)=0$, $\lim_{t\to+0}\xi'(t)=\xi_0$, $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ — постоянный вектор, $\|\xi_0\|<r$,

$$\lim_{t\to+0}\frac{\eta(t)}{t}=0,\qquad \lim_{t\to+0}t\frac{\eta'(t)}{\eta(t)}=\eta_0,\quad 0<\eta_0<+\infty,$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\eta(t)}{\|\xi(t)\|}=0,\qquad \lim_{t\to+0}\frac{\eta'(t)}{\|\xi'(t)\|}=0,$$

$$\lim_{t\to+0}\omega(t)=0,\qquad \lim_{t\to+0}\frac{t\omega(t)}{\eta(t)}=\omega_0,\quad 0\le\omega_0<+\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{U}(\rho,M,q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u:(0,\rho]\to\mathbb{R}^n$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\|u(t)-\xi(t)\|\le M\eta(t),\qquad \|u'(t)-\xi'(t)\|\le\frac{qM\eta(t)}{t},\quad t\in(0,\rho]. \tag{4}$$

Здесь ρ, M, q — положительные постоянные, $\rho<\tau$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

$$1) \quad \forall \mu \in (0, \tau) \quad \| f(t_1, x, y) - f(t_2, x, y) \| \le l_1(\mu) | t_1 - t_2 |, \quad (t_i, x, y) \in \mathcal{D}, \quad t_i \ge \mu, \quad i \in \{1, 2\}; \tag{5}$$

$$2) \quad \| f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y) \| \le l_2(t) \| x_1 - x_2 \|, \quad (t, x_i, y) \in \mathcal{D}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Здесь $l_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$, $i \in \{1, 2\}$, *— непрерывные невозрастающие функции, причем*

$$\lim_{t \to +0} t l_2(t) = l_0, \quad 0 \le l_0 < (1 - l_3)\eta_0.$$

Тогда существуют ρ, M, q *такие, что задача* (1), (2) *имеет хотя бы одно* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$\| f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y) \| \le l_2(t) \| x_1 - x_2 \|, \quad (t, x_i, y) \in \mathcal{D}, \quad i \in \{1, 2\}, \tag{6}$$

где l_2 *— постоянная, и* $l_2 + l_3 < 1$. *Тогда существуют* ρ, M, q *такие, что задача* (1), (2) *имеет единственное* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

Доказательство теоремы 1. Вначале выберем ρ, M, q. Пусть $\eta_0 < q < l_3^{-1}(\eta_0 - l_0)$, $M > (\eta_0 - l_0 - q l_3)^{-1} \omega_0$. Неравенства, определяющие выбор ρ, не приводим ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\| x \|_{\mathcal{B}} = \max_{t \in [0, \rho]} (\| x(t) \| + \| x'(t) \|). \tag{7}$$

Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ которого удовлетворяет условиям (4), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = \xi_0$ и, кроме того,

$$\forall \mu \in (0, \rho] \quad \forall t_i \in [\mu, \rho], \quad i \in \{1, 2\} : \| u'(t_1) - u'(t_2) \| \le K(\mu) | t_1 - t_2 |, \tag{8}$$

где $K(\mu) = (1 - l_3)^{-1} \left(l_1(\mu) + \mu^{-2} \right)$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто, ограничено, выпукло и (согласно теореме Арцела) компактно. Далее рассматриваем дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, u(t), u'(t)) \tag{9}$$

с начальным условием (2), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Проводим рассуждения по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 из [12], случай $b < 2\sigma$ (см. [12, с. 305 – 310]), при этом здесь обозначаем

$$\Phi_1 = \{ (t, x) : t \in (0, \rho], \ \| x - \xi(t) \| = M \eta(t) \},$$

$$\Phi_2 = \left\{ (t, x) : t \in (0, \rho], \ \| x - x_2(t) \| = \gamma h^{\nu} (\eta(t))^{1-\nu} \right\}$$

(γ, ν — постоянные, $\nu \in (0, 1)$, $\gamma > 2(l_0 + 1)(2M)^{1-\nu}(1 - \nu)^{-1} \eta_0^{-1}$),

$$\Phi_3(\nu) = \{ (t, x) : t \in (0, \rho], \ \| x - x_u(t) \| = \nu \eta(t)(-\ln t) \}$$

(ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$). Доказываем, что задача (9), (2) имеет единственное решение $x_u \in \mathcal{U}$. Определяем оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $Tu = x_u$, и доказываем, что этот оператор непрерывен. Применение теоремы Шаудера о неподвижной точке завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Вначале выбираем ρ, M, q. Пусть $\eta_0 < q < l_3^{-1}\eta_0$, $M > (\eta_0 - q l_3)^{-1}\omega_0$. Неравенства, определяющие выбор ρ, не приводим ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x: [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ с нормой (7). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u: [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ которого удовлетворяет условиям (4), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = \xi_0$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто и ограничено. Далее рассматриваем задачу (9), (2), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция, и проводим рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1 из [12], случай $b < 2\sigma$ (см. [12, с. 302 – 305]), при этом нужно взять те же Φ_1 и $\Phi_3(\nu)$, что и при доказательстве теоремы 1 настоящей работы, а также положить

$$\Phi_2 = \{(t, x): t \in (0, \rho],\ \|x - x_2(t)\| = \gamma h t\}$$

(γ — постоянная, $\gamma > l_2 + l_3$). Устанавливаем, что задача (9), (2) имеет единственное решение $x_u \in \mathcal{U}$. Определяем оператор $T: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $Tu = x_u$, доказываем, что этот оператор является сжимающим. Для завершения доказательства теоремы 2 остается применить принцип Банаха сжатых отображений.

2. Уточнение асимптотических свойств. Рассмотрим задачу Коши (1), (2), где $t \in (0, \tau)$ — действительная переменная, $x: (0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ — неизвестная действительная функция, $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, $\mathcal{D} = \{(t, x, y): t \in (0, \tau),\ \|x\| < r_1 t^2,\ \|y\| < r_2 t\}$, r_1, r_2 — постоянные. Будем предполагать, что

$$f(t, x, y) = at + bx + F_m(t, x, y) + \varphi(t, x, y), \qquad (t, x, y) \in \mathcal{D},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор, b — $(n \times n)$-мерная матрица с постоянными элементами,

$$F_m(t, x, y) = \sum_{i+|j|+|k|=2}^{m} a_{ijk} t^i x^j y^k, \quad x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_n), \quad j = \mathrm{col}(j_1, \ldots, j_n),$$

$$k = \mathrm{col}(k_1, \ldots, k_n), \quad |j| = j_1 + \ldots + j_n, \quad |k| = k_1 + \ldots + k_n,$$

$$x^j = x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}, \quad y^k = y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n},$$

все i, j, k — неотрицательные целые числа, m — натуральное число, $m \geq 2$, все $a_{ijk} \to \mathbb{R}^n$ — постоянные векторы, $\|\varphi(t, x, y)\| \leq K_0(t^{m+1} + \|x\|^{m+1} + \|y\|^{m+1})$, $(t, x, y) \in \mathcal{D}$. Пусть $\|a\| < \min\{2r_1, r_2\}$. Предположим, что выполнены условия (3), (6).

Пусть функция $S_N: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$S_N(t) = \sum_{k=2}^{N} c_k t^k,$$

где N — натуральное число, $2 \leq N \leq m + 1$, $c_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{2, \ldots, N\}$, — постоянные векторы, выбранные так, чтобы

$$\| S'_N(t) - at - bS_N(t) - F_m(t, S_N(t), S'_N(t)) \| = O(t^N) \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Нетрудно убедиться в том, что все векторы c_k определяются однозначно; в частности, $c_2 = a/2$. Обозначим через $\mathcal{U}_N(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\| u(t) - S_N(t) \| \le M t^{N+1}, \quad \| u'(t) - S'_N(t) \| \le M t^N, \quad t \in (0, \rho]. \tag{10}$$

Здесь ρ, M — положительные постоянные, $\rho < \tau$.

Для каждого $\rho \in (0, \tau)$ определим ρ-решение задачи (1), (2) так же, как и в первом пункте.

Теорема 3. *Если выполнено условие* (5), *где* $l_1 : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — *непрерывная невозрастающая функция, то существуют* ρ, M *такие, что задача* (1), (2) *имеет хотя бы одно* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}_N(\rho, M)$.

Теорема 4. *Если* $l_2 + l_3 < 1$, *то существуют* ρ, M *такие, что задача* (1), (2) *имеет единственное* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}_N(\rho, M)$.

***Доказательство теоремы* 3.** Вначале выберем достаточно большое M и достаточно малое ρ. Условия, определяющие выбор M, ρ, не приводим ввиду ограниченности объема статьи. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ с нормой (7). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ которого удовлетворяет условиям (10), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ и, кроме того, выполнено условие (8), где $K(\mu) = (1 - l_3)^{-1}(l_1(\mu) + 1)$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто, ограничено, выпукло и (в соответствии с теоремой Арцела) компактно. Далее рассматривается задача (9), (2), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция, и проводятся рассуждения по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 из [12], случай $b < 2\sigma$ (см. [12, с. 305 – 310]). Здесь

$$\Phi_1 = \left\{ (t, x) : t \in (0, \rho],\ \| x - S_N(t) \| = M t^{N+1} \right\},$$

$$\Phi_2 = \left\{ (t, x) : t \in (0, \rho],\ \| x - x_2(t) \| = h^{\nu} t^{N(1-\nu)} \right\}$$

(ν — постоянная, $\nu \in (0, 1)$),

$$\Phi_3(\nu) = \left\{ (t, x) : t \in (0, \rho],\ \| x - x_u(t) \| = \nu t^{N+1}(-\ln t) \right\}$$

(ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$). Доказываем, что у задачи (9), (2) найдется одно и только одно решение $x_u \in \mathcal{U}$. Определяем оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $Tu = x_u$, и устанавливаем, что этот оператор непрерывен. Доказательство теоремы 3 завершается применением теоремы Шаудера о неподвижной точке.

***Доказательство теоремы* 4.** Вначале выберем достаточно большое M и достаточно малое ρ. Условия, определяющие выбор M, ρ, не приводим ввиду ограниченности объема статьи. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ с нормой (7). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ которого удовлетворяет условиям (10), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто и ограничено. Далее рассматриваем задачу (9), (2), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция, и проводим рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1 из [12], случай $b < 2\sigma$ (см. [12, с. 302 – 305]). При этом выбираем те же

Φ_1, $\Phi_3(\nu)$, что и при доказательстве теоремы 3 настоящей работы, а также

$$\Phi_2 = \{(t, x): t \in (0, \rho], \|x - x_2(t)\| = \gamma h t\}$$

(γ — постоянная, $\gamma > l_2 + l_3$). Доказываем, что у задачи (9), (2) существует одно и только одно решение $x_u \in \mathcal{U}$. Определяем оператор $T: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $Tu = x_u$, и устанавливаем, что этот оператор является сжимающим. После этого остается применить принцип Банаха сжатых отображений.

1. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производных // Дифференц. уравнения. – 1971. – **7**, № 9. – С. 1575 – 1580.
2. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1974. – 472 с.
3. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 9. – С. 79 – 84.
4. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case // Different. Equat. and Dynam. Systems. – 1999. – **7**, № 4. – P. 437 – 459.
5. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. – 1959. – № 48. – P. 97 – 102.
6. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – **179**, № 2. – P. 317 – 326.
7. *Kowalski Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. pol. math. – 1963. – **13**, № 2. – P. 173 – 204.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
9. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
10. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 550 с.
11. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 5. – С. 756 – 760.
12. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. мат. журн. – 2001. – **54**, № 3. – С. 302 – 310.

Получено 29.08.2001,
после доработки — 15.05.2002