УДК 517.5

И. В. Момот (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМА КЛИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ *

We prove a complex analog of the classical Klee theorem for strongly linearly convex closed sets.

Доведено комплексний аналог класичної теореми Клі для сильно лінійно опуклих замкнених множин.

В работе [1] показано, что линейно выпуклые и сильно линейно выпуклые множества в пространстве $\mathbb{C}^n$ являются естественной областью для построения комплексного аналога выпуклого анализа. В выпуклом анализе и приложениях важное значение имеют теоремы Крейна – Мильмана и Кли, описывающие выпуклые множества через их экстремальные точки [2]. Комплексный аналог теоремы Крейна – Мильмана получен в [3]. Цель настоящей работы — распространить теорему Кли на некоторые неограниченные подмножества комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Все понятия и обозначения, которые не определены здесь, соответствуют таковым из [1].

Для множества $E \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через $\operatorname{cext} E$ множество его c-экстремальных точек, а через $\operatorname{cconv} E$ c-оболочку E. Сильно линейно выпуклое множество, согласно установившейся в последнее время терминологии, будем называть $\mathbb{C}$-выпуклым множеством.

Определение 1. *Назовем c-лучом замкнутое неограниченное ациклическое подмножество комплексной прямой с непустой границей.*

Определение 2. *Экстремальным c-лучом множества $E \subset \mathbb{C}^n$ назовем c-луч H, который лежит в E, если множество $E \setminus H$ линейно выпукло и каждая точка границы ∂H является c-экстремальной точкой для E.*

(Это эквивалентно тому, что ни одна точка луча H не будет внутренней ни для какого c-интервала, лежащего в E и имеющего хотя бы одну точку за пределами H.)

Для множества $E \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через $\operatorname{rcext} E$ множество точек всех c-экстремальных лучей в E.

Лемма 1. *Пусть $F \subset \mathbb{C}^n$ — замкнутое c-выпуклое тело с непустой c-выпуклой границей ∂F. Тогда F имеет вид $F = F_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где F_1 — плоское односвязное подмножество прямой $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Поскольку граница ∂F $\mathbb{C}$-выпукла, для произвольной точки $z = \operatorname{Int} F$ существует комплексная гиперплоскость, не пересекающая ∂F. Следовательно, F содержит некоторую комплексную гиперплоскость. Тогда согласно теореме 7.1 [1] F представимо в виде декартова произведения $F = F_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$.

Очевидно, что F_1 связно и односвязно, потому что, в силу представления F, существуют сечения F комплексной прямой, гомеоморфные F_1.

Лемма 2. *Если $F \subset \mathbb{C}^n$ — $\mathbb{C}$-выпуклое замкнутое множество и L — его касательная плоскость, то* $\operatorname{cext}(F \cap L) = (\operatorname{cext} F) \cap L$.

Согласно определению c-экстремальных точек и включению $F \cap L \subset F$ имеем

---

* Частично поддержана проектом INTAS-99-00089.

$$\operatorname{cext}(F \cap L) \supset (\operatorname{cext} F) \cap L.$$

Пусть теперь $z \in \operatorname{cext}(F \cap L)$, тогда z не может быть внутренней точкой никакого c-интервала $K \subset F$, ибо иначе было бы $K \subset F \cap L$ (поскольку $z \in L$ и L — касательная прямая к F), а это противоречит тому, что $z \in \operatorname{cext}(F \cap L)$. Значит,

$$\operatorname{cext}(F \cap L) \subset (\operatorname{cext} F) \cap L$$

и лемма доказана.

Лемма 3. *Если $F \subset \mathbb{C}^n$ — $\mathbb{C}$-выпуклое замкнутое множество и L — его касательная плоскость, то*

$$\operatorname{rcext}(F \cap L) = (\operatorname{rcext} F) \cap L.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Теорема 1. *Каждое замкнутое $\mathbb{C}$-выпуклое множество $F \subset \mathbb{C}^n$, которое не содержит комплексной прямой, является c-оболочкой своих c-экстремальных точек и c-экстремальных лучей:*

$$F = \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} F \cup \operatorname{rcext} F).$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 2 и проведем доказательство индукцией по размерности множества F. Теорема тривиальна при $\dim_{\mathbb{C}} F = 0$ и $\dim_{\mathbb{C}} F = 1$. Пусть она верна при всех размерностях F, меньших m, $1 < m \le n$. Докажем ее для F при $\dim_{\mathbb{C}} F = m$.

По условию F не содержит прямой, поэтому не может совпасть ни с его аффинной оболочкой, ни с декартовым произведением $F_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$. Из леммы 2 следует, что непустая граница ∂F не будет $\mathbb{C}$-выпуклым множеством.

Согласно определению $\mathbb{C}$-выпуклости сечение F произвольной комплексной прямой тоже $\mathbb{C}$-выпукло. Пусть z — произвольная точка F. Если z принадлежит какой-нибудь касательной прямой L к F, то по предположению индукции

$$z \in \operatorname{cconv}(\operatorname{cext}(F \cap L) \cup \operatorname{rcext}(F \cap L)).$$

Если же есть точки множества F, через которые не проходит никакая касательная плоскость к F, то существует точка $z \in \operatorname{Int} F$. Проведем комплексную прямую l через эту точку. Примем во внимание, что $l \cap F$ — $\mathbb{C}$-выпуклое множество, не совпадающее с l. Следовательно, $z \notin \partial(l \cap F)$. Пусть точка w — произвольная точка множества $\partial(l \cap F)$. Согласно $\mathbb{C}$-выпуклости множества $l \cap F$ через точку w проходит некоторая касательная к F плоскость T и по предположению индукции имеем

$$w \in \operatorname{cconv}(\operatorname{cext}(F \cap T) \cup \operatorname{rcext}(F \cap T)).$$

Это выполняется для каждой точки $w \in \partial(l \cap F)$. Тогда согласно леммам 2 и 3

$$z \in \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} F \cup \operatorname{rcext} F).$$

Поэтому в силу произвольности выбора точки

$$F \subset \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} F \cup \operatorname{rcext} F).$$

Обратное включение тривиально, следовательно, теорема доказана.

Полученный результат в случае выпуклых множеств совпадает с теоремой Кли, а в случае компактных $\mathbb{C}$-выпуклых множеств — с комплексной теоремой

Крейна – Мильмана, поэтому распространяет теорему Кли на неограниченные $\mathbb{C}$-выпуклые множества.

Следствие 1. *Каждое непустое замкнутое $\mathbb{C}$-выпуклое множество $F \subset \mathbb{C}^n$, не содержащее комплексной прямой, имеет хотя бы одну c-экстремальную точку.*

Следствие 2. *Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — компактное $\mathbb{C}$-выпуклое множество. Тогда или $\operatorname{Int} K = \varnothing$, или существует такое сечение K некоторой прямой l, что множество $\operatorname{cext} K \bigcap l$ содержит нетривиальный одномерный когомологический коцикл.*

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Int} K = \varnothing$. Тогда существует точка $z = \operatorname{Int} K$ и естественно $z \notin \operatorname{cext} K$. Следовательно, z принадлежит c-комбинации точек из $K_1 = \partial(l \bigcap K)$. Если все точки K_1 будут c-экстремальными для K, то утверждение доказано, так как $K_1 \subset l \bigcap K \setminus z$ — носитель ненулевого одномерного коцикла. Если же не все точки K_1 будут c-экстремальными для K, то предыдущую процедуру повторим для одной из таких точек z_1 и сечения K комплексной прямой l_1, которая уже лежит в опорной гиперплоскости к K. Из комплексной теоремы Каратеодори [4] заключаем, что не более чем за n шагов мы придем к искомому сечению.

Определение 3. *Флагом гиперплоскости $L \subset \mathbb{C}^n$ назовем множество* $\Phi(L) = \mathbb{C}^n \setminus L$.

Исследуем связь граничных точек и опорных гиперплоскостей для исходного и сопряженного к нему множества.

Лемма 4. *Пусть E — открытое линейно выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$, содержащее начало координат, а*

$$E^* = \{w \mid \langle w, z\rangle \neq 1 \text{ для всех } z \in E\} \tag{1}$$

— сопряженный к нему компакт. Тогда относительно сферы $\langle z, \Xi\rangle = 1$ полюс каждой гиперплоскости, опорной к E, является граничной точкой для E^*, а гиперплоскость $\langle z_0, w\rangle = 1$ для каждой граничной точки $z_0 \in \partial E$ — опорной гиперплоскостью к E^*.

Доказательство. Пусть $L\colon \langle w_0, z\rangle = 1$ — не проходящая через начало координат опорная к E гиперплоскость. Имеем $L \bigcap E = \varnothing$. Тогда из (1) точка $w_0 \in E^*$. Очевидно, что w_0 не может принадлежать $\operatorname{Int} E^*$, иначе плоскость L не была бы опорной к E. В силу этого $w^* \in \partial E^*$.

С другой стороны, $z_0 \notin E = E^{**}$. В силу линейной выпуклости E существует гиперплоскость $L\colon \langle w_0, z\rangle = 1$, проходящая через z_0 и не пересекающая E. В частности, $\langle w_0, z_0\rangle = 1$. Следовательно, $w_0 \in E^*$. Точка $w_0 \notin \operatorname{Int} E^*$, иначе гиперплоскость L не проходила бы через граничную точку E. Кроме того, $L \bigcap \operatorname{Int} E^* = \varnothing$ (если это не так, то z^0 не принадлежала бы $\overline{E}$, а следовательно, и ∂E). Поэтому L — опорная к E^* гиперплоскость.

Замечание 1. В условиях леммы каждой c-экстремальной точке z множества E при соответствии сопряжения отвечает гиперплоскость L, которая может рассматриваться как экстремальная гиперплоскость для E^* в смысле следующих определений.

Определение 4. *Будем говорить, что гиперплоскость L принадлежит c-комбинации семейства гиперплоскостей $\{L_\lambda\}$, если для каждой ее точки $z \in L$ существует множество $M(z) = \{w \mid \exists\lambda,\ w \in L_\lambda\}$, состоящее из подмно-*

жества точек плоскостей L_λ, *такое, что* z *принадлежит с-комбинации* $[M(z)]$.

Определение 5. *Гиперплоскость* L *называется экстремальной гиперплоскостью* $\mathbb{C}$*-выпуклого множества* $E \subset \mathbb{C}^n$, *если* E *принадлежит флагу* $\Phi(L)$ *и не существует семейства гиперплоскостей* $\{L_\lambda\}$, *флаги которых также содержат* E, *такого, что* L *принадлежит с-комбинации этого семейства.*

Теперь можно получить двойственный вариант комплексной теоремы Крейна – Мильмана.

Теорема 2. *Каждое открытое* $\mathbb{C}$*-выпуклое тело* D *в* n*-мерном комплексном пространстве* $\mathbb{C}^n$, *содержащее внутри начало координат, является компонентой пересечения таких содержащих* D *флагов пространства* $\mathbb{C}^n$, *которые ограничены экстремальными гиперплоскостями тела* D.

Доказательство. Согласно предположению 2.5 [1] сопряженное множество D^* — компакт. Тогда из комплексной теоремы Крейна – Мильмана следует

$$D^* = \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} D^*).$$

Отсюда при повторном переходе к сопряженному множеству с учетом предположения 2.14 и теоремы 2.1 [1] D будет связной компонентой множества

$$D = D^{**} = (\operatorname{cconv}(\operatorname{cext} D^*))^* \subset (\operatorname{cext} D^*)^* = \bigcap_{w \in \operatorname{cext} D^*} \Phi(w),$$

где $\Phi(w)$ — флаг, образованный гиперплоскостью $L: \langle w, z \rangle = 1$. В силу линейной выпуклости $\mathbb{C}$-выпуклой области D она будет связной компонентой линейно выпуклого множества $(\operatorname{cext} D^*)^*$.

Результаты, изложенные в настоящей статье, были заслушаны на международной конференции по комплексному анализу и теории потенциала [5].

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 262 с.
2. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
3. *Зелинский Ю. Б.* О комплексных оболочках // Всесоюз. конф. „Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 95 – 97.
4. *Zelinskii Yu. B.* Caratheodory theorem for linearly convex sets // Classical Analysis: Proc. 6th Int. Symp. – London: World Sci., 1992. – P. 122 – 124.
5. *Момот И. В.* О линейно выпуклых множествах с гладкой границей // Int. Conf. on Complex Analysis and Potential Theory (7 – 12 august 2001). – Kiev: Inst. Math. NAS Ukraine, 2001. – P. 78 – 79.

Получено 12.12.2001,
после доработки — 25.07.2002