УДК 517.9

А. Н. Ронто (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ[1]

We obtain some estimates for the periods of periodic motions in the Lipschitz dynamical systems.

Отримано деякі оцінки періодів періодичних рухів у ліпшицевих динамічних системах.

1. Введение. Вопросу оценки снизу периодов периодических движений в динамических системах в последнее время уделялось значительное внимание. В этом отношении следует отметить работы [1 – 5], где в виде таких оценок получены необходимые условия существования нетривиальных периодических движений в непрерывной и дискретной автономных дифференциальных системах с липшицевыми правыми частями. В указанных работах рассматривалось традиционное условие Липшица, записываемое в терминах нормы, т. е. условие вида

$$\| f(x_1) - f(x_2) \|_X \leq l \| x_1 - x_2 \|_X, \quad \{x_1, x_2\} \subset X, \tag{1}$$

где $f\colon X \to X$ — нелинейный оператор, $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$ — банахово пространство, а $l \in (0, +\infty)$ — некоторая постоянная.

Упомянутые оценки для периодов периодических орбит существенно зависят от геометрии фазового пространства рассматриваемой системы [2, 3, 5]. Поэтому естественно ожидать, что в некоторых случаях они могут быть улучшены за счет надлежащего изменения самой постановки задачи. В этой связи представляется целесообразным изучение различных способов формализации условия Липшица в абстрактных бесконечномерных банаховых пространствах, кроме нормы, возможно, наделенных некоторыми дополнительными структурами.

В работе [1] Дж. А. Йорк доказал следующее утверждение, относящееся к динамической системе

$$x' = f(x) \tag{2}$$

в n-мерном пространстве $X = R^n$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|_X$.

Теорема (Дж. А. Йорк). *Если функция f в уравнении (2) удовлетворяет условию Липшица (1) с некоторой постоянной $l \in (0, +\infty)$, то период каждого периодического решения (2), отличного от положения равновесия, не меньше, чем $2\pi/l$.*

Аналогичное предложение имеет место также в случае, когда значения решений дифференциального уравнения (2) принадлежит произвольному гильбертовому пространству [2]. Ряд дальнейших результатов, касающихся подобных оценок для дифференциальных уравнений в произвольном банаховом пространстве, был получен в упомянутых выше работах С. Базенберга, Д. Фишера и М. Мартелли.

В настоящей статье установлены некоторые новые оценки указанного типа. В них используется абстрактное двустороннее условие Липшица в частично упорядоченном банаховом пространстве $\langle X, \|\cdot\|, \leqslant \rangle$, записываемое в виде

$$\mathfrak{m}(f(x_1) - f(x_2)) \leqslant L\mathfrak{m}(x_1 - x_2), \quad \{x_1, x_2\} \subset X.$$

Здесь $\mathfrak{m}: X \to X_+$ — некоторое нелинейное отображение со свойствами, подобными свойствам нормы, а оператор $L \in \mathcal{L}(X)$ таков, что $L(X_+) \subset X_+$, где X_+ означает конус неотрицательных векторов X (подробности см. в п. 3).

Основные утверждения о периодах периодических движений в автономных системах содержатся в теоремах 9, 10 и 4. Часть результатов работы была получена в 1996 г. и опубликована в виде препринта [6].

[1] Частично поддержана грантом OMFB UK-3/1999.

2. Обозначения. Пусть X, X_1, X_2 — банаховы пространства.

1. $\|\cdot\|_X$ или просто $\|\cdot\|$ означает норму в X.

2. $\mathcal{L}(X)$ — алгебра линейных непрерывных операторов $X \to X$.

3. Символ $\mathbf{1}_X$ (или просто $\mathbf{1}$, если X подразумевается) — единица в $\mathcal{L}(X)$.

4. $\ker L$ и $\operatorname{im} L$ — соответственно ядро и область значений оператора $L \in \in \mathcal{L}(X)$.

5. $\sigma(L)$ (соответственно $\rho(L) := \mathbf{C} \setminus \sigma(L)$) — спектр (соответственно резольвентное множество) оператора $L \in \mathcal{L}(X)$.

6. $r(L)$ — спектральный радиус оператора $L \in \mathcal{L}(X)$.

7. Если $\langle X, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченное линейное пространство, то символом X_+ обозначается конус $\{x \in X\colon x \geqslant 0\}$ неотрицательных элементов в X.

8. $\nu(X_+)$ — постоянная нормальности конуса X_+.

9. $C([a,b], X)$ — банахово пространство непрерывных функций $[a,b] \to X$ с равномерной нормой, порожденной нормой $\|\cdot\|_X$.

10. Если пространство X частично упорядочено, то символом $C([a,b], X_+)$ обозначается конус непрерывных функций со значениями в X_+.

3. Предварительные результаты. В этом пункте мы приводим ряд результатов теории частично упорядоченных векторных пространств [7 – 9], иногда дополняя их новыми утверждениями.

Пусть $\langle X, \leqslant_X \rangle$ — частично упорядоченное векторное пространство (ЧУВП). Частичный порядок в X, как правило, будет обозначаться символом $\leqslant_X$, и соотношение $x_1 \geqslant_X x_2$ для $\{x_1, x_2\} \subset X$, по определению, будет обозначать, что $x_2 \leqslant_X x_1$. (В тех случаях, когда не может возникнуть недоразумений, индекс X при знаке $\leqslant_X$ иногда опускается).

Множество $\{x \in X\colon x \geqslant_X 0\}$ называется *положительным конусом* пространства X. Напомним, что конусы — это подмножества линейного пространства, удовлетворяющие условиям [7, 8]:

c_1) *если* $x \in X_+$ *и* $\mu \in [0, +\infty)$, то $\mu x \in X_+$;

c_2) *из включения* $\{x_1, x_2\} \subset X_+$ *следует, что* $x_1 + x_2 \in X_+$;

c_3) *если* $x \in X_+ \setminus \{0\}$, *то* $-x \notin X_+$.

***Замечание* 1.** Мы используем понятие „конус", следуя М. Г. Крейну (см. [7] и приведенную в ней библиографию). Эта терминология несколько отличается от принятой в [10], где конусом называется линейная полугруппа М. Г. Крейна.[2] В [10, с. 14] множество, удовлетворяющее условиям c_1) – c_3), называется *строгим конусом*. Чтобы подчеркнуть наличие свойства c_3), иногда используется название „собственный конус". Линейные полугруппы иногда называют *клиньями*.

Далее рассматривается тот случай, когда заданное ЧУВП X снабжено некоторым *абстрактным модулем*, т. е. конусозначным отображением X со свойствами, подобными свойствам нормы в нормированном пространстве. Именно, используется следующее определение.

Определение 1. *Пусть заданы два ЧУВП* $\langle X, \leqslant_X \rangle$ *и* $\langle E, \leqslant_E \rangle$ *с положительными конусами* X_+ *и* E_+ *соответственно. Отображение* $\mathfrak{m}\colon X \to E_+$, *удовлетворяющее условиям*:

m_1) *из* $\mathfrak{m}(x) = 0$ *следует, что* $x = 0$;

[2] Согласно [7], множество $C \subset X$ называется *линейной полугруппой*, если для него выполнены условия c_1 и c_2, но, возможно, не c_3. Ясно, что если C — линейная полугруппа в X, то C/R является конусом в фактор-пространстве X/R, где отношение эквивалентности $R \subset X^2$ задано равенством $R := \{(x, -x)\colon x \in X\}$. Тем не менее, конусы заслуживают отдельного изучения ввиду ряда присущих им специфических свойств. В частности, условие c_3) исключает из рассмотрения тот случай, когда $C = X$.

$m_2)$ $\mathfrak{m}(\alpha x) = |\alpha| \mathfrak{m}(x)$ *для произвольных* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ *и* $x \in X$;

$m_3)$ $\mathfrak{m}(x_1 + x_2) \leqslant_E \mathfrak{m}(x_1) + \mathfrak{m}(x_2)$ *для всех* $\{x_1, x_2\} \subset X$,

называется E_+*-значным абстрактным модулем или, более кратко,* E_+*-значным модулем на пространстве* X.

Свойство $m_3)$ естественно называть *полуаддитивностью* модуля. Отметим, что в условиях $m_1) - m_3)$ наличие на пространстве X частичной упорядоченности несущественно. (Порядок на X, однако, будет играть значительную роль при изучении дальнейших свойств отображений указанного типа).

Наиболее типичным примером оператора, удовлетворяющего указанным выше условиям $m_1) - m_3)$, является модуль, порожденный частичным упорядочением линейного пространства, при котором положительный конус является воспроизводящим и миниэдральным в следующем смысле.

Определение 2 [7]. *Конус* $X_+ \subset X$ *называется воспроизводящим, если линейная оболочка* X_+ *совпадает с* X, *т. е. каждый вектор* $x \in X$ *допускает разложение вида* $x = x^+ - x^-$, *где* $\{x^+, x^-\} \subset X_+$.

Определение 3 [7]. *Конус* X_+ *миниэдрален, если для любых* $\{x_1, x_2\} \subset X_+$ *можно указать такой вектор* $\xi := \sup(x_1, x_2) \in X_+$, *что* $x_1 \leqslant \xi$, $x_2 \leqslant \xi$, *причем* $\xi \leqslant \Xi$ *для любого другого вектора* $\Xi \in X_+$ *с указанными свойствами.*

Вектор $\sup(x_1, x_2)$ в определении 3 называется *точной верхней гранью* элементов x_1 и x_2.

***Пример* 1.** Пусть положительный конус X_+ ЧУВП $\langle X, \leqslant \rangle$ является воспроизводящим и миниэдральным. Тогда оператор $|\cdot| : X \to X_+$, заданный формулой

$$|x| := \sup(x, 0) + \sup(-x, 0) \quad (\forall\, x \in X), \tag{3}$$

является X_+-значным абстрактным модулем в смысле определения 1.

Доказательство. В любом ЧУВП X с миниэдральным и воспроизводящим положительным конусом операция „sup" может быть распространена с X_+^2 на все X^2 [7, с. 19]. Следовательно, оператор (3) определен на всем пространстве X, и остается только проверить выполнение аксиом $m_1) - m_3)$.

Аксиома m_1. Из (3) следует, что $|x| = 0 \Leftrightarrow \sup(x, 0) = -\sup(-x, 0)$. Достаточно теперь заметить, что неотрицательный элемент ЧУВП равен неположительному лишь в том случае, когда оба они равны нулю.

Аксиома m_2. Вектор $\sup(\alpha x, 0)$ является наименьшей из верхних граней для αx. В силу свойства c_1 конуса имеем $\sup(\alpha x, 0) = \alpha \sup(x, 0)$ для всех $\alpha \geq 0$ и $x \in X$. Поэтому требуемый результат следует из равенства $|\alpha x| = \sup(\alpha x, 0) + \sup(-\alpha x, 0)$.

Аксиома m_3. Легко видеть, что для произвольных $\{x_1, x_2\} \subset X$

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2| &= \sup(x_1 + x_2, 0) + \sup(-(x_1 + x_2), 0) = \\ &= \sup(x_1, -x_2) + x_2 + \sup(-x_1, x_2)) - x_2 = \\ &= \sup(x_1, -x_2) + \sup(-x_1, x_2)). \end{aligned} \tag{4}$$

Далее, поскольку

$$\sup(x_1, x_2) \leqslant \sup(x_1, 0) + \sup(x_2, 0) \quad \text{для всех } \{x_1, x_2\} \subset X, \tag{5}$$

из (4) следует

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2| &= \sup(x_1, -x_2) + \sup(-x_1, x_2)) \leqslant \\ &\leqslant \sup(x_1, 0) + \sup(-x_2, 0) + \sup(-x_1, 0) + \sup(x_2, 0) = |x_1| + |x_2|. \end{aligned}$$

Остается только отметить, что справедливость соотношения (5) может быть установлена следующим образом. Пусть $\{\theta_1, \theta_2\} \subset X_+$ таковы, что $x_1 \preccurlyeq \theta_1$ и $x_2 \preccurlyeq \theta_2$. Используя обычные в ЧУВП алгебраические операции, получаем $x_1 \preccurlyeq \theta_1 + \theta_2$ и $x_2 \preccurlyeq \theta_1 + \theta_2$, т. е. $\theta_1 + \theta_2$ является верхней гранью для пары $\{x_1, x_2\} \subset X$. Поскольку мажоранты θ_1 и θ_2 произвольны, из неравенства $\sup(x_1, x_2) \preccurlyeq \theta_1 + \theta_2$ следует, что $\sup(x_1, x_2) \preccurlyeq \sup(x_1, 0) + \sup(x_2, 0)$.

***Замечание* 2.** Пространство со свойствами, указанными в примере 1, в другой терминологии [11] называется *векторной решеткой*. Отображения $\mathfrak{m}$ со свойствами $m_1) - m_3)$ иногда называются *абстрактными нормами* [9, с. 714]. При этом, как правило, предполагается, что $\mathfrak{m}$ принимает значения в некотором K-пространстве [9, 12].

Из существования абстрактного на X модуля, вообще говоря, не следует, что положительный конус X_+ в этом пространстве является миниэдральным или воспроизводящим.

***Пример* 2.** Пусть линейное пространство $X = C([0,1], R^1)$ частично упорядочено конусом

$$X_+ := \{x \in X \colon x \text{ — неотрицательная и неубывающая}\}.$$

Тогда отображение $\mathfrak{m}(x) := \int_0^{\cdot} |x(\sigma)|\, d\sigma \;\; (x \in X)$ является X_+-значным модулем. При этом конус X_+ не является воспроизводящим в X.

Доказательство. Конус X_+ не является воспроизводящим, поскольку в силу теоремы Жордана о функциях ограниченного изменения разложение $x = x_1 - x_2$ с некоторыми $\{x_1, x_2\} \subset X_+$ возможно только в том случае, когда $\mathrm{Var}_{[0,1]}\, x < +\infty$. Между тем, выполнение условий $m_1) - m_3)$ для указанного выше отображения $\mathfrak{m}$ легко проверяется.

***Пример* 3.** Пусть в линейном пространстве $X := C^1([0,1], R^1)$ непрерывно дифференцируемых вещественных функций на $[0, 1]$ задано поточечное отношение частичного порядка, индуцированное из $C([0,1], R^1)$, т. е., что по определению $x_1 \preccurlyeq x_2$ тогда и только тогда, когда $x_1(t) \le x_2(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. В этом случае конус

$$X_+ := \{x \in C^1([0,1], R^1) \colon x(t) \ge 0 \text{ для всех } t \in [0, 1]\}$$

не миниэдрален, хотя формула

$$[\mathfrak{m}(x)](t) := |x(0)| + \int_0^t |x'(s)|\, ds, \quad t \in [0, 1], \tag{6}$$

определяет X_+-значный модуль $\mathfrak{m}$ на пространстве $C^1([0,1], R^1)$.

Доказательство. Конус неотрицательных дифференцируемых функций не миниэдрален, так как, например, пара $\{x_1, x_2\} \subset X_+$, где $x_1(t) := t$ и $x_2(t) := 1/2$ для $t \in [0, 1]$, не имеет точной верхней грани в $C^1([0,1], R^1)$. При этом для отображения (6), очевидно, выполнены условия $m_2)$ и $m_3)$. Если же $[\mathfrak{m}(x)](t) = 0$ для всех $t \in [0, 1]$, то $x(0) = 0$ и $|x'(t)| = 0$ для всех $t \in [0, 1]$, откуда $x \equiv 0$. Это означает, что условие $m_1)$ также выполняется.

Примеры 2 и 3 показывают целесообразность изучения ЧУВП с абстрактным модулем, который, возможно, не порождается никаким миниэдральным конусом. Такие пространства, однако, образуют достаточно широкий класс, и поэтому желательно выделить некоторые их подклассы, удобные при исследовании различных задач. Это означает, что на отображение $\mathfrak{m}$ из определения 1 следует налагать некоторые дополнительные ограничения.

Здесь мы будем предполагать выполнение следующего, алгебраического по сути, условия:

$m_4)$ $\mathfrak{m}(x_1) \preccurlyeq_E \mathfrak{m}(x_2)$ *для всех* $\{x_1, x_2\} \subset X$, *таких, что* $0 \preccurlyeq_X x_1 \preccurlyeq_X x_2$.

Свойство $m_4)$, означающее, что сужение $\mathfrak{m}|_{X_+}$ изотонно, выполняется во многих приложениях (можно указать, в частности, на пример 2).

Наиболее содержательной теория ЧУВП является тогда, когда, наряду с частичным упорядочением и линейными операциями, на нем заданы некоторые другие структуры. В настоящей работе нам понадобится рассматривать модуль на частично упорядоченном нормированном пространстве (ЧУНП), когда он будет „сосуществовать" с некоторой нормой. В этом случае, как обычно [8], будем предполагать, что

$c_4)$ *множество* X_+ *замкнуто в* X.

В нормированном пространстве, частично упорядоченном посредством воспроизводящего конуса, справедлива следующая фундаментальная теорема, восходящая к М. Г. Крейну и В. Л. Шмульяну [8, с. 102, 382].

Теорема 1 (М. Г. Крейн – В. Л. Шмульян). *Пусть положительный конус* X_+ *некоторого ЧУНП* $\langle X, \preccurlyeq, \|\cdot\| \rangle$ *является воспроизводящим. Тогда существуют такие отображение* $\Pi : X \to X_+$ *и постоянная* $k \in (0, +\infty)$, *что* $x \preccurlyeq \Pi x$ *и* $\|\Pi x\| \le k\|x\|$ *для всех* $x \in X$.

Теорема 1 утверждает, что ЧУНП $\langle X, \preccurlyeq, \|\cdot\| \rangle$, каждый вектор x которого имеет положительную мажоранту Πx, является *несплющенным* [8, с 102] в том смысле, что $\|\Pi x\| \le k\|x\|$, где число k не зависит от $x \in X$. В более общей форме это утверждение доказано И. А. Бахтиным, М. А. Красносельским и В. Я. Стеценко в [13].

В дальнейшем используется понятие *нормального* конуса.

Определение 4 [8, 14, 15]. *Говорят, что положительный конус* X_+ *некоторого ЧУНП* $\langle X, \preccurlyeq, \|\cdot\| \rangle$ *нормален* (*относительно нормы* $\|\cdot\|$), *если из соотношения* $0 \preccurlyeq x_1 \preccurlyeq x_2$ *всегда следует, что* $\|x_1\|_X \le \nu\|x_2\|$, *где положительная постоянная* ν *не зависит от выбора* $\{x_1, x_2\} \subset X$.

Точную нижнюю грань всевозможных значений числа ν в определении 4 будем называть *постоянной нормальности* конуса X_+ и обозначать символом $\nu(X_+)$. Очевидно, что всегда $\nu(X_+) \ge 1$ (за исключением тривиального случая, когда $X_+ = \{0\}$).

Как поясняет теорема 1.2 из [8], свойство, описываемое определением 4, означает, что в данном ЧУНП каждое порядково ограниченное множество является также ограниченным по норме.

Ниже рассматривается E_+-значный модуль $\mathfrak{m}$, заданный на некотором ЧУНП $\langle X, \preccurlyeq, \|\cdot\| \rangle$ с конусом X_+ и, кроме условий $m_1) - m_4)$, удовлетворяющий еще такому дополнительному условию:

$m_5)$ $\exists\, \alpha > 0 : \|x\|_X \le \alpha \|\mathfrak{m}(x)\|_E \;\; \forall x \in X$.

Наличие свойства $m_5)$ обеспечивает тесную связь между заданной на X основной нормой $\|\cdot\|_X$ и нормой, порождаемой модулем $\mathfrak{m}$ согласно формуле

$$|x|_{\mathfrak{m}} := \|\mathfrak{m}(x)\|_E \quad \forall x \in X. \tag{7}$$

Условие $m_5)$ выполнено, например, если $X = E$, конус $X_+ = E_+$ нормален, а отображение $\mathfrak{m} : X \to X_+$ таково, что $\mathfrak{m}(x) \succcurlyeq_X \delta x$ для всех $x \in X$ и некоторого $\delta \in (0, +\infty)$.

М. Г. Крейн показал [7, с. 10], что аддитивный функционал, положительный на ЧУНП с телесным конусом, всегда непрерывен. В работе [13] этот результат был распространен на случай положительного аддитивного оператора в пространстве с двумя конусами. Здесь мы укажем несколько более общий вариант теоремы 2 из [13] для случая нормированного пространства с одной частичной упорядоченностью, который пригоден для рассматриваемых в настоящей работе приложений.

Теорема 2. *Пусть заданы два ЧУНП* $\langle X, \preccurlyeq_X, \|\cdot\|_X \rangle$ *и* $\langle E, \preccurlyeq_E, \|\cdot\|_E \rangle$. *Предположим, что положительный конус* X_+ *в* X *— воспроизводящий, а* E_+ *— нормальный относительно нормы* $\|\cdot\|_E$. *Пусть, наконец, некоторое конусозначное отображение* $\mathcal{A} : X \to E_+$ *удовлетворяет таким условиям:*

1) $\mathcal{A}(x_1 + x_2) \preccurlyeq_E \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)$ *для любых* $\{x_1, x_2\} \subset X$;

2) *из соотношения* $0 \preccurlyeq_X x_1 \preccurlyeq_X x_2$ *всегда следует, что* $\mathcal{A}(x_1) \preccurlyeq_E \preccurlyeq_E \mathcal{A}(x_2)$;

3) $\mathcal{A}(x/n) \preccurlyeq_E (1/n)\mathcal{A}(x)$ *для всех* $x \in X_+$ *и* $n \in N$.

Тогда $\mathcal{A}$ *непрерывно в* 0.

Доказательство. Доказательство аналогично рассуждению, приведенному в [13, с. 158, 159].

Допустим противное. Тогда найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset X$, что $\|x_n\|_X \to 0$, когда $n \to \infty$, причем $\inf_{n \in N} \|\mathcal{A}(x_n)\|_E > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Эта последовательность, очевидно, может быть выбрана так, что $\|x_n\|_X < \delta_n \ \forall n \geq 1$, где $\sum_{n=1}^{\infty} n\delta_n < \infty$. Поскольку конус X_+ — воспроизводящий, то для любого $n \geq 1$ вектор x_n имеет положительную мажоранту $x_n^+ \succcurlyeq_X x_n$, и поэтому $x_n^- := x_n^+ - x_n \succcurlyeq_X 0$. Воспользовавшись теоремой Крейна – Шмульяна (теорема 1), разложение $x_n = x_n^+ + x_n^-$ можно выбрать так, чтобы для всех $n \geq 1$ выполнялось неравенство $\max\{\|x_n^-\|_X, \|x_n^+\|_X\} \leq \leq k\|x_n\|_X$, где число $k > 0$ не зависит от n.

Положим $\xi^+ := \sum_{n=1}^{\infty} n x_n^+$. (Выписанный ряд сходится по норме $\|\cdot\|_X$ в силу оценки $\sum_{n=1}^{\infty} n\|x_n^+\|_X \leq k \sum_{n=1}^{\infty} n\delta_n < +\infty$.) Из определения видно, что $0 \preccurlyeq_X \preccurlyeq_X n x_n^+ \preccurlyeq_X \xi^+$ для любого $n \geq 1$. Условие 2 означает, что $\mathcal{A}|_{X_+}$ изотонно, а из условий 1 и 3 следует, что $n\mathcal{A}(x_n^+/n) = \mathcal{A}(x_n^+)$ для любого $n \geq 1$. Отсюда $0 \preccurlyeq_E \mathcal{A}(x_n^+) \preccurlyeq_E (1/n)\mathcal{A}(\xi^+)$ и $\|\mathcal{A}(x_n^+)\|_E \leq (1/n)\nu(E_+)\|\mathcal{A}(\xi^+)\|_E$ для всех $n \geq \geq 1$, где $\nu(E_+)$ — постоянная нормальности конуса E_+. Следовательно, $\|\mathcal{A}(x_n^+)\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогично, полагая $\xi^- := \sum_{n=1}^{\infty} n x_n^-$, находим, что $0 \preccurlyeq_X n x_n^- \preccurlyeq_X \xi^-$ и $\|\mathcal{A}(x_n^-)\|_E \leq (1/n)\nu(E_+)\|\mathcal{A}(\xi^-)\|_E$ для всех $n \geq 1$, откуда $\lim_{n \to \infty} \|\mathcal{A}(x_n^-)\|_E = 0$. Наконец, используя соотношение $x_n = x_n^+ - x_n^-$, полуаддитивность оператора $\mathcal{A}$ и неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|_E$, получаем равенство $\lim_{n \to \infty} \|\mathcal{A}(x_n)\|_E = 0$, которое противоречит предположению.

***Замечание* 3.** Из условий 1 и 3 теоремы 2 следует, что $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\mathcal{A}(x)$ при всех $x \in X_+$ и $\lambda \in Q$. Поскольку в условиях теоремы отображение $\mathcal{A}$ непрерывно в 0, отсюда следует, что $\mathcal{A}$ положительно однородно на X_+.

***Замечание* 4.** Очевидно, что условие 3 в теореме 2 можно заменить следующим: существует такое положительное β, что при любых $x \in X_+$ и $n \in N$ справедливо порядковое соотношение $\mathcal{A}(1/n) \preccurlyeq_E (\beta/n)\mathcal{A}(x)$.

***Замечание* 5.** Аналогично замечанию в [8, с. 65], пространства X и E в теореме 2 могут не быть полными. В этой теореме можно также предполагать, что множество X_+ не является конусом, образуя, однако, линейную полугруппу в X (ср. с [17]).

***Следствие* 1.** *Пусть* $\mathfrak{m} : X \to E_+$ *— некоторый абстрактный модуль, а для пространств* X *и* E *выполнены предположения теоремы 2. Если, кроме этого,* $\mathfrak{m}$ *удовлетворяет условию* m_4), *то* $\mathfrak{m}$ *непрерывен на* X.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $\mathfrak{m}$ непрерывен в 0. Пусть $x \in X$ — задано. В силу условия m_3) для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset X$ такой, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, имеем

$$\mathfrak{m}(x_n) - \mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(x_n - x + x) - \mathfrak{m}x \preccurlyeq_E \mathfrak{m}(x_n - x),$$

и аналогично

$$\mathfrak{m}(x) - \mathfrak{m}(x_n) = \mathfrak{m}(x - x_n + x_n) - \mathfrak{m}(x_n) \preccurlyeq_E \mathfrak{m}(x - x_n),$$

откуда

$$-\mathfrak{m}(x - x_n) \preccurlyeq_E \mathfrak{m}(x_n) - \mathfrak{m}(x) \preccurlyeq_E \mathfrak{m}(x_n - x).$$

Другими словами (с учетом условия m_2), для всех $n \in N$ имеем

$$-\varepsilon_n \preccurlyeq_E z_n \preccurlyeq_E \varepsilon_n, \tag{8}$$

где $\varepsilon_n := \mathfrak{m}(x_n - x)$ и $z_n := \mathfrak{m}(x_n) - \mathfrak{m}(x)$. Очевидно, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_+$ и $\lim_{n\to\infty} \|\varepsilon_n\|_E = 0$. Добавив ε_n ко всем членам неравенства (8), получим $0 \preccurlyeq_E \preccurlyeq_E z_n + \varepsilon_n \preccurlyeq_E 2\varepsilon_n$, откуда $\|z_n + \varepsilon_n\|_E \le 2\nu(E_+)\|\varepsilon_n\|_E$ при всех $n \in N$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\|z_n\|_E \equiv \lim_{n\to\infty}\|\mathfrak{m}(x_n - x)\|_E = 0$, т. е. абстрактный модуль $\mathfrak{m}$ непрерывен в точке x. Поскольку x произвольно, этим доказательствоследствия 1 закончено.

Следствие 2. *Пусть два ЧУНП* $\langle X, \preccurlyeq_X, \|\cdot\|_X\rangle$, $\langle E, \preccurlyeq_E, \|\cdot\|_E\rangle$ *и модуль* $\mathfrak{m}: X \to E_+$ *удовлетворяют условиям следствия 1. Тогда для любого* $x \in \in C([0,1], X)$ *справедливо порядковое неравенство*

$$\mathfrak{m}\left(\int_0^1 x(\tau)\,d\tau\right) \preccurlyeq_E \int_0^1 \mathfrak{m}(x(\tau))\,d\tau, \tag{9}$$

в котором символ $\int$ *означает сильный интеграл Римана.*

Доказательство. Как обычно, имеем

$$\int_0^1 x(\tau)\,d\tau = \lim_{\operatorname{diam} T\to 0} \sum_{\nu=0}^{N-1} x(\tau_\nu)[\tau_{\nu+1} - \tau_\nu],$$

где $T = \{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{N}$ ($N \in N$; $0 \le \tau_0 \le \tau_1 \le \ldots \le \tau_N \le 1$) — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$. Учитывая непрерывность $\mathfrak{m}$, замкнутость конуса E_+ и условие полуаддитивности m_3), получаем

$$\mathfrak{m}\left(\lim_{\operatorname{diam} T\to 0} \sum_{\nu=0}^{N-1} x(\tau_\nu)[\tau_{\nu+1} - \tau_\nu]\right) \preccurlyeq_E \lim_{\operatorname{diam} T\to 0} \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathfrak{m}(x(\tau_\nu))[\tau_{\nu+1} - \tau_\nu]. \tag{10}$$

Здесь и выше $\operatorname{diam} T := \max_{0\le\nu<N} |\tau_{\nu+1} - \tau_\nu|$. В силу следствия 1 можно утверждать, что для любой непрерывной функции $x: [0, 1] \to X$ композиция $\mathfrak{m} \circ x : [0, 1] \to E_+$ также непрерывна. Отсюда видно, что выражение в правой части (10) сходится к соответствующему интегралу (9), когда $\operatorname{diam} T \to 0$. Таким образом, в принятых предположениях оценка (9) действительно имеет место.

Введем теперь понятие, аналогичное условию Липшица для нелинейного оператора в нормированном пространстве. Пусть заданы два ЧУНП X и E; пусть $\mathfrak{m} : X \to E_+$ — абстрактный модуль на X, а $\mathcal{T}: X \to X$ — некоторое отображение.

Определение 5. *Будем говорить, что оператор* $\mathcal{T}: X \to X$ *удовлетворяет условию Липшица (относительно упорядочения* $\preccurlyeq_E$ *и модуля* $\mathfrak{m}$), *если найдется такой аддитивный, положительно однородный и непрерывный оператор* $L: E_+ \to E_+$, *что при всех* $\{x_1, x_2\} \subset X$ *выполнено порядковое соотношение*

$$\mathfrak{m}(\mathcal{T}x_1 - \mathcal{T}x_2) \preccurlyeq_E L\mathfrak{m}(x_1 - x_2). \tag{11}$$

Отображение $\mathcal{T}: X \to X$ назовем *обобщенным сжатием*, если оно удовлетворяет условию Липшица (11) с оператором L, для которого имеет место неравенство $r_{E_+}(L) < 1$.

Поясним значение символа $r_{E_+}(L)$ в определении 5. Для каждого непрерывного отображения $L: E_+ \to E_+$, удовлетворяющего условиям аддитивности и положительной однородности (т. е. $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ при всех $x \in E_+$, $\lambda \in [0, +\infty)$), полагаем

$$r_{E_+}(L) := \lim_{N \to \infty} \left\{ \sup_{x \in E_+, \|x\|_E = 1} \left\| L^N x \right\|_E \right\}^{\frac{1}{N}}. \tag{12}$$

и называем величину $r_{E_+}(L)$ *частичным спектральным радиусом* оператора L (см. [16, с. 400; 17, с. 1132]). Использование этого понятия обосновано тем обстоятельством, что оператор Липшица L в (11) задан на конусе E_+ и, вообще говоря, может не допускать линейного продолжения на E. Если такое продолжение возможно, то число $r_{E_+}(L)$ в приведенном определении можно заменить обычным спектральным радиусом $r(L)$, и тогда (12) превратится в формулу Гельфанда [9, 10]. Это, однако, не всегда целесообразно, поскольку $r(L) \geq r_{E_+}(L)$.

Лемма 1. *Пусть конус X_+ является воспроизводящим, E_+ — нормальным и, кроме того, относительно модуля $\mathfrak{m}: X \to E_+$ выполнено предположение $\mathfrak{m}_4$. Тогда всякое отображение $\mathcal{T}: X \to X$, удовлетворяющее условию Липшица вида* (11), *непрерывно по норме* (7).

Доказательство. Из непрерывности оператора L следует, что в условиях леммы 1 композиция $L \circ \mathfrak{m}$ непрерывно преобразует конус E_+ в себя (так как, согласно следствию 1, отображение $\mathfrak{m}$ непрерывно). Поскольку конус E_+ нормален, из (11) следует, что для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ такой, что $\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_{\mathfrak{m}} = 0$ при некотором $x \in X$, разность $\mathcal{T}x_n - \mathcal{T}x$ для всех $n \geq 1$ допускает оценку

$$|\mathcal{T}x_n - \mathcal{T}x|_{\mathfrak{m}} \leq \nu(E_+) \| L\mathfrak{m}(x_n - x) \|_E.$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{T}x_n - \mathcal{T}x|_{\mathfrak{m}} = 0$, т. е. отображение $\mathcal{T}$ непрерывно в точке x относительно заданной формулой (7) нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{m}}$ на X.

Ниже используется естественное обобщение теоремы Банаха о неподвижной точке в случае ЧУНП с модулем. Приводимое утверждение, в сущности, является вариантом теоремы 6.2 из [14].

Теорема 3 [14]. *Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X, \preccurlyeq_X, \mathfrak{m} \rangle$ — ЧУНП с модулем $\mathfrak{m}: X \to E_+$, полное относительно порождаемой этим модулем нормы* (7). *Если E_+ — нормальный конус другого ЧУНП $\langle E, \|\cdot\|_E, \preccurlyeq_E \rangle$, а отображение $\mathcal{T}: X \to X$ удовлетворяет условию Липшица* (11), *где для оператора L выполнено неравенство $r_{E_+}(L) < 1$, то $\mathcal{T}$ имеет в X единственную неподвижную точку, которая может быть найдена с помощью сходящегося по норме* (7) *метода последовательных приближений.*

Подобно [14, с. 95], утверждение теоремы 3 вытекает из следующей легко доказываемой леммы.

Лемма 2. *Пусть непрерывный оператор $L: E_+ \to E_+$ аддитивен и положительно однороден. Тогда при $\lambda \geq r_{E_+}(L)$ существует непрерывный обратный* *оператор* $(\lambda \mathbf{1}_{E_+} - L)^{-1}\colon E_+ \to E_+$ *и для любого* $x \in E_+$ *справедливо соотношение*

$$(\lambda \mathbf{1}_{E_+} - L)^{-1} x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{\lambda^{\nu+1}} L^{\nu} x,$$

в котором $\mathbf{1}_{E_+} := \mathbf{1}|_{E_+}$, *а предел понимается в смысле нормы* $\|\cdot\|_E$.

В заключение пункта установим такое утверждение.

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения следствия* 1 *и, кроме того, модуль* $\mathfrak{m}\colon X \to E_+$ *удовлетворяет условию* m_5). *Тогда нормы* (7) *и* $\|\cdot\|_X$ *эквивалентны.*

Доказательство. В силу условия m_4), из утверждения следствия 1 вытекает непрерывность модуля $\mathfrak{m}$. Поэтому достаточно показать, что если для некоторой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ имеем $\lim_{n\to\infty} \|\mathfrak{m}(x_n)\|_E = 0$, то $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = 0$. Однако, согласно условию m_5), найдется такое $\alpha \in (0, +\infty)$, что $\|x_n\|_X \le \alpha \|\mathfrak{m}(x_n)\|_E$ для всех $n \ge 1$, откуда $\|x_n\|_X \to 0$ при $n \to \infty$.

4. Обобщение оценки Базенберга – Фишера – Мартелли. Пересмотр доказательства теоремы 1.3 из [5] позволяет утверждать, что оно может быть модифицировано для получения подобного результата для динамической системы (2), в которой оператор $f\colon X \to X$ удовлетворяет конусному условию Липшица вида

$$\mathfrak{m}(f(x_1) - f(x_2)) \preccurlyeq_E L\,\mathfrak{m}(x_1 - x_2) \quad \text{для всех} \quad \{x_1, x_2\} \subset X \tag{13}$$

по отношению к абстрактному модулю $\mathfrak{m}\colon X \to E_+$, заданному на полном ЧУНП $X = \langle X, \|\cdot\|, \preccurlyeq_X \rangle$ и принимающему значения в некотором другом ЧУНП $E = \langle E, \|\cdot\|_E, \preccurlyeq_E \rangle$.

Лемма 4 (ср. с [5]). *Пусть конус* X_+ *является воспроизводящим,* E_+ — *нормальным, а модуль* $\mathfrak{m}$ *удовлетворяет условию* m_4) *п.* 3. *Пусть* k *раз сильно дифференцируемая* ω*-периодическая абстрактная функция* $x\colon \boldsymbol{R} \to X$ *такова, что композиция* $\mathfrak{m} \circ x^{(k)}$ *локально интегрируема по Риману. Тогда справедливо порядковое неравенство*

$$\int_0^{\omega}\int_0^{\omega} \mathfrak{m}(x(\tau_1) - x(\tau_2))\, d\tau_2\, d\tau_1 \preccurlyeq_E \left(\frac{\omega}{6}\right)^k \int_0^{\omega}\int_0^{\omega} \mathfrak{m}(x^k(\tau_1) - x^k(\tau_2))\, d\tau_2\, d\tau_1.$$

Доказательство. Достаточно внести соответствующие изменения в рассуждение, приведенное в [5], и провести индукцию по k. Существенное отличие состоит в том, что в данном случае следует воспользоваться свойствами m_1) – m_4) и применить следствие 2. Детали доказательства подобны изложенному в [5, с. 11] и здесь не приводятся.

Из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 4 *и отображение* $f\colon X \to X$ *удовлетворяет условию Липшица* (13), *в котором непрерывный оператор* $L\colon E \to E$ *аддитивен, положительно однороден и имеет ненулевой частичный спектральный радиус* $r_{E_+}(L)$. *Тогда период* ω *каждого периодического решения уравнения* (2), *отличного от положения равновесия, удовлетворяет неравенству*

$$\omega \ge \frac{6}{r_{E_+}(L)}.$$

Доказательство. Теорема 4 выводится из леммы 4 рассуждениями, аналогичными изложенным в [5, с. 11].

В случае уравнения k-го порядка вида

$$x^{(k)} = f(x) \tag{14}$$

справедлива аналогичная оценка (ср. с [18, с. 265]).

Теорема 5. *Если выполнены предположения леммы* 4 *и условие Липшица* (13), *то из существования непостоянного решения* (14), *удовлетворяющего соотношениям*

$$x^{(\nu)}(0) = x^{(\nu)}(\omega), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{15}$$

следует оценка

$$\omega \geq \frac{6}{r_{E_+}(L)^{1/k}}.$$

С помощью примера, аналогичного указанному в [5, с. 12], можно показать, что постоянную „6" в теоремах 4 и 5 нельзя заменить на бо́льшую.

4. Метод последовательных периодических приближений. Доказательства результатов п. 6 основываются на одной общей схеме исследования краевых задач, различные варианты которой известны в литературных источниках под названиями „метод последовательных периодических приближений" [19, 20] и „численно-аналитический метод Самойленко" [19, 21–23].

В последние годы указанный метод неоднократно применялся для изучения различных типов краевых задач для обыкновенных дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений в различных пространствах (см., например, [20, 23–26]). При этом основной принцип метода, состоящий в замене исходной задачи подходящим образом подобранным семейством операторных уравнений, часто остается неизменным, а варьируются элементы, определяемые видом конкретной задачи. В этой связи целесообразно построить алгоритм метода в некоторой достаточно общей постановке, что позволит единообразно рассматривать различного рода задачи без многократного повторения одних и тех же технических деталей.

В этом пункте описывается общая схема метода последовательных периодических приближений для периодической краевой задачи в абстрактном упорядоченном пространстве с модулем и дается обоснование ее применимости для уравнений с „липшицевыми правыми частями".

Будем использовать определения и обозначения, введенные в п. 3. В дальнейшем фиксированы два частично упорядоченных банахова пространства $\langle X, \leqslant_X, \|\cdot\|_X \rangle$ и $\langle E, \leqslant_E, \|\cdot\|_E \rangle$, и считается заданным некоторый E_+-значный абстрактный модуль $\mathfrak{m} : X \to E_+$. Относительно положительных конусов X_+ и E_+ в этом пункте предполагается, что первый из них является воспроизводящим, а второй — нормальным.

Рассмотрим ω-периодическую краевую задачу вида

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in [0, \omega], \\ x(0) &= x(\omega). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $x : [0, \omega] \to X$ — абстрактная функция, а x' означает сильную производную. Предполагаем, что отображение $x : [0, \omega] \times X \to X$ удовлетворяет условию Липшица (11) по „пространственной" переменной, а именно, что для каждого $t \in [0, \omega]$ существует такой аддитивный и положительно однородный непрерывный оператор $L(t) : E_+ \to E_+$, что при всех $\{x_1, x_2\} \subset X$ и $t \in [0, \omega]$ справедливо порядковое соотношение

$$\mathfrak{m}\big(f(t, x_1) - f(t, x_2)\big) \leqslant_E L(t)\, \mathfrak{m}(x_1 - x_2). \tag{17}$$

Будем также предполагать, что оператор-функция

$$[0, \omega] \ni t \mapsto L(t) \in \mathcal{L}(E) \tag{18}$$

удовлетворяет следующему условию:

l_1) оператор $\mathcal{M}_L$, действие которого определяется согласно формуле

$$[\mathcal{M}_L x](t) := L(t)x(t), \quad t \in [0, \omega], \tag{19}$$

непрерывно преобразует множество $C([0, \omega], E_+)$ в себя.

В условии l_1 символ $C([0, \omega], E_+)$ означает замкнутый конус непрерывных E_+-значных функций на отрезке $[0, \omega]$.

Замечание 6. Условие l_1 выполнено, если функция (18) сильно непрерывна, и при каждом $t \in [0, \omega]$ оператор $L(t)$ допускает линейное продолжение на все пространство E. Кроме того, в силу теоремы 2, условие l_1 верно, если конус E_+ — нормальный и воспроизводящий.

Пусть $\mathfrak{f}$ означает оператор Немыцкого на $C([0, \omega], X)$, порождаемый функцией $f: X \to X$:

$$(\mathfrak{f}x)(t) := f(t, x(t)), \quad t \in [0, \omega]. \tag{20}$$

Определим на пространстве[3] $C([0, \omega], X)$ отображения

$$(\mathcal{J}x)(t) := \int\limits_0^t x(s)\,ds, \quad t \in [0, \omega], \tag{21}$$

$$(\mathcal{P}_\omega x)(t) := x(t) - t\omega^{-1}[x(\omega) - x(0)], \quad t \in [0, \omega]. \tag{22}$$

Положим также $\mathcal{Q}_\omega := \mathbf{1} - \mathcal{P}_\omega$.

Легко проверить, что таким образом заданные операторы $\mathcal{P}_\omega$ и $\mathcal{Q}_\omega$ образуют пару взаимно дополняющих проекторов, причем ядро $\mathcal{Q}_\omega$ состоит из непрерывных функций $x: [0, \omega] \to X$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(\omega)$. Заметим, что в связи с методом последовательных периодических приближений эти операторы в неявном виде применялись А. М. Самойленко [21, 22] (см. также [19, 25]).

Теорема 6. *Периодическая краевая задача*

$$x' = \mathfrak{f}x, \tag{23}$$

$$x(0) = x(\omega) \tag{24}$$

равносильна системе уравнений

$$x = z + \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f}x, \tag{25}$$

$$\mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f}x = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Теорема 6 непосредственно следует из приводимой ниже теоремы 8.

Замечание 7. В системе (25), (26) неизвестным является пара $(x(\cdot), z)$, причем $z \in X$ в уравнении (25) рассматривается как параметр, значение которого подлежит определению. Указанные системы уравнений эквивалентны в том смысле, что функция $x: [0, \omega] \to X$ является решением задачи (23), (24) с начальным значением $x(0) = z$ тогда и только тогда, когда $(x(\cdot), z)$ удовлетворяет (25), (26).

Преимущество теоремы 6 по сравнению с обычным подходом Коши – Пикара состоит в том, что оператор, определяемый выражением в правой части (25), может рассматриваться в сужении на линейное многообразие ω-периодических функций. Отметим, что это преимущество не всегда носит только формальный характер.

Лемма 5. *Пусть, в дополнение к перечисленным выше предположениям, мо-*

[3] Напомним, что символом $C([0, \omega], X)$ здесь обозначается банахово пространство непрерывных функций $[0, \omega] \to X$ с обычными линейными операциями и равномерной нормой, частично упорядоченное конусом функций со значениями в X_+.

дуль $\mathfrak{m}$ *удовлетворяет условию изотонности* m_4). *Тогда для любой функции* $x \in C([0, \omega], X)$ *имеет место порядковая оценка*

$$\mathfrak{m}(\mathcal{P}_\omega \mathcal{J} x) \leqslant_E A_\omega \mathfrak{m}(x), \tag{27}$$

где операторы $\mathcal{P}_\omega$ *и* $\mathcal{J}$ *заданы согласно* (22) *и* (21), *а* A_ω — *линейное преобразование* $C([0, \omega], E)$ *в себя, действие которого для любой непрерывной функции* $y : [0, \omega] \to E$ *определено формулой*

$$[A_\omega y](t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t y(s)\,ds + \frac{t}{\omega} \int_t^\omega y(s)\,ds, \quad t \in [0, \omega]. \tag{28}$$

Доказательство. Легко видеть, что для любого $x \in C([0, \omega], X)$

$$[\mathcal{P}_\omega \mathcal{J} x](t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t x(s)\,ds + \frac{t}{\omega} \int_t^\omega x(s)\,ds, \quad t \in [0, \omega],$$

откуда, в силу свойств m_2) и m_3) модуля $\mathfrak{m}$, имеем

$$[\mathfrak{m} \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} x](t) \leqslant_E \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \mathfrak{m}\left(\int_0^t x(s)\,ds\right) + \frac{t}{\omega} \mathfrak{m}\left(\int_t^\omega x(s)\,ds\right)$$

для всех $t \in [0, \omega]$. Применив следствие 2 к слагаемым в правой части последнего неравенства, получим требуемое соотношение (27).

В приводимой ниже теореме 7 утверждается, что при выполнении некоторых количественных ограничений, налагаемых на оператор Липшица $L : [0, \omega] \to \to \mathcal{L}(E)$ в условии (17), уравнение (25) может быть однозначно разрешено методом последовательных приближений.

Теорема 7 (ср. с [20]). *Пусть величина* $r_{C([0,\omega], E_+)}(A_\omega \circ \mathcal{M}_L)$ *меньше единицы*[4]. *Тогда уравнение* (25) *при каждом* $z \in X$ *имеет единственное решение* $[0, \omega] \ni t \mapsto x(t, z)$, *и это решение может быть получено как равномерный предел рекуррентной последовательности*

$$x_m(t, z) = z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s, z))\,ds - t\omega^{-1} \int_0^\omega f(s, x_{m-1}(s, z))\,ds, \tag{29}$$

где $z \in X$, $t \in [0, \omega]$, $m \in N$, *а начальное приближение* $x_0(\cdot, z) \in C([0,\omega], X)$ *задано произвольно.*

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы отображение $\mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f}$ является обобщенным сжатием (см. пункт 3) пространства $C([0, \omega], X)$. Согласно лемме 5 для произвольных $\{x_1, x_2\} \subset C([0, \omega], X)$ имеем

$$\mathfrak{m}(\mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f} x_1 - \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f} x_2) \leqslant_E A_\omega \mathcal{M}_L \mathfrak{m}(x_1 - x_2), \tag{30}$$

где линейный оператор A_ω задан формулой (28), а символ $\leqslant_E$ означает естественное (поточечное) частичное упорядочение пространства $C([0, \omega], E)$. Таким образом, поскольку A_ω положителен, комозиция $A_\omega \circ \mathcal{M}_L$ может рассматриваться как оператор Липшица в условии Липшица вида (11), записанном для отображения $\mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f}$.

В силу оценки (30) из условия теоремы вытекает, что оператор $\mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f}$ является обобщенным сжатием в пространстве $\langle C([0, \omega], X), \leqslant_X, \|\cdot\|_{C([0,\omega],X)}, \mathfrak{M} \rangle$ с равномерной нормой $\|x\|_{C([0,\omega],X)} := \max_{t \in [0,\omega]} \|x(t)\|_X$ и поточечным модулем $\mathfrak{M}$, задаваемым соотношением $x \mapsto \mathfrak{M}x := \mathfrak{m} \circ x$ для всех $x \in C([0, \omega], X)$. Требуемый результат теперь следует из теоремы 3.

[4] Напомним, что действие оператора $\mathcal{M}_L$ состоит в поточечном применении к элементам пространства $C([0, \omega], E)$ оператора $L(\cdot)$ и задается формулой (19).

***Замечание* 8.** В условиях теоремы 7 отображение $\Delta : X \to X$, действующее согласно формуле

$$\Delta(z) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}[\mathfrak{f}x(\cdot,z)](\tau)\,d\tau, \quad z \in X,$$

где $x(\cdot,z)$ — единственное решение уравнения (25), определено и является однозначным.

В важном для автономных систем частном случае, когда участвующее в условии Липшица (17) отображение (18) постоянно, т. е.

$$L(t) \equiv L \ \text{ для всех } \ t \in [0,\omega], \tag{31}$$

имеет место следующий результат.

***Следствие* 3** (ср. с [20]). *Пусть в условиях теоремы* 7 *верно соотношение* (31), *а вместо условия для частичного спектрального радиуса оператора сравнения выполняется неравенство* $r(L) < \kappa/\omega$, *где*

$$\kappa := \min\left\{\lambda > 0 : \lambda\int_0^{1/2}\exp[\lambda\tau(\tau-1)]\,d\tau = 1\right\} \approx 3{,}4161. \tag{32}$$

Тогда справедливо заключение теоремы 7.

Доказательство. Согласно лемме 8 п. 7, из неравенства $r(L) < \kappa/\omega$ вытекает, что частичный спектральный радиус оператора $A_\omega \circ \mathcal{M}_L$, где A_ω задан равенством (28), меньше единицы. Остается применить теорему 7.

Следующее утверждение является аналогом теоремы 6 и относится к случаю периодической краевой задачи для уравнения порядка $k \geq 1$ вида

$$x^{(k)} = \mathfrak{f}x, \tag{33}$$

$$x^{(\nu)}(0) = x^{(\nu)}(\omega), \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{34}$$

Теорема 8. *Задача* (33), (34) *равносильна системе уравнений*

$$x = z + (\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^k\,\mathfrak{f}x, \tag{35}$$

$$\mathcal{Q}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x = 0. \tag{36}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x(\cdot)$ — решение (33), (34). Тогда $x^{(k-1)} = z_{k-1} + \mathcal{P}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x + \mathcal{Q}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x$ с $z_{k-1} := x^{(k-1)}(0)$. Так как $x^{(k-1)}(0) = x^{(k-1)}(\omega)$, а $\operatorname{im}\mathcal{P}_\omega$ состоит из функций с равными значениями в точках 0 и ω, отсюда имеем $\mathcal{Q}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x = 0$. Действительно, в противном случае

$$[\mathcal{Q}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x](\omega) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}[\mathfrak{f}x](s)\,ds \neq 0$$

и $[\mathcal{Q}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x](0) = 0$, тогда как функция в левой части тождества $x^{(k-1)} - \mathcal{P}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x - z_{k-1} = \mathcal{Q}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x$ принимает одно и то же значение в точках 0 и ω. Поскольку это противоречит предыдущему положению, на самом деле имеем

$$x^{(k-1)} = z_{k-1} + \mathcal{P}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x.$$

Аналогично

$$x^{(k-2)} = z_{k-2} + \mathcal{J}z_{k-1} + \mathcal{J}\mathcal{P}_\omega\mathcal{J}\,\mathfrak{f}x,$$

где $z_{k-2} := x^{(k-2)}(0)$. В силу леммы 6 последнее соотношение можно записать в виде

$$x^{(k-2)} = z_{k-2} + \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} z_{k-1} + \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f} x + \mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} z_{k-1} + \mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f} x =$$
$$= z_{k-2} + (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^2 \mathfrak{f} x + \mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} z_{k-1} + \mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f} x.$$

Поскольку, по предположению, верно тождество $x^{(k-2)}(0) = x^{(k-2)}(\omega)$, то $\mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J} z_{k-1} + \mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \mathfrak{f} x = 0$ и, следовательно,

$$x^{(k-2)} = z_{k-2} + (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^2 \mathfrak{f} x.$$

Продолжая подобным образом, получаем $x = z_0 + (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^k \mathfrak{f} x$, где $z_0 := x(0)$, т. е. уравнение (35) удовлетворяется при $z = z_0$. Справедливость условия (36) уже была доказана.

Достаточность. Пусть для пары $(x(\cdot), z)$ выполнены равенства (35) и (36). Тогда

$$x = z + \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-1} \mathfrak{f} x = z + \mathcal{J} (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-1} \mathfrak{f} x - \mathcal{Q}_\omega \mathcal{J} (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-1} \mathfrak{f} x, \qquad (37)$$

откуда

$$x' = (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-1} \mathfrak{f} x - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega [(\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-1} \mathfrak{f} x](s)\, ds.$$

Аналогично

$$x'' = (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-2} \mathfrak{f} x - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega [(\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-2} \mathfrak{f} x](s)\, ds,$$

и на k-м шаге имеем

$$x^{(k)} = \mathfrak{f} x - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega [\mathfrak{f} x](s)\, ds.$$

В силу (36) это означает, что на самом деле $x^{(k)} = \mathfrak{f} x$, т. е. функция x — решение уравнения (33). Условие $x^{(\nu)}(0) = x^{(\nu)}(\omega)$ для $0 \le \nu \le k-1$ следует из определения проектора $\mathcal{P}_\omega$. Поэтому x является решением задачи (33), (34).

***Замечание* 9.** Равносильность систем (33), (34) и (35), (36) понимается так же, как и соответствующее утверждение теоремы 6 (см. замечание 7).

***Замечание* 10.** В теоремах 6 и 8 вместо оператора Немыцкого $\mathfrak{f}$, заданного формулой вида (19), может фигурировать любое другое преобразование $C^k([0, \omega], X)$ в $C([0, \omega], X)$. Природа оператора $\mathfrak{f}$ важна при анализе разрешимости уравнения (35).

Установим теперь основную лемму, которая используется при доказательстве результатов пп. 6 и 7.

Лемма 6. *Для любого $k \in N$ справедливо равенство* $\ker (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^k = X$.

***Замечание* 11.** Совпадение множеств в утверждении леммы 6 понимается в смысле изоморфизма, согласно которому постоянные функции из $C([0, \omega], X)$ отождествляются с соответствующими точками пространства X.

Доказательство. Пусть сначала $k = 1$. Легко проверить, что $x \in \ker \mathcal{P}_\omega \mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда $(\mathcal{J} x)(t) = (t\omega^{-1})(\mathcal{J} x)(t)$ при всех $t \in [0, \omega]$. Это означает, что для $x \in \ker \mathcal{P}_\omega \mathcal{J}$ имеем $x(t) \equiv \omega^{-1} (\mathcal{J} x)(\omega)$, т. е. функция x постоянна. Поэтому $\ker \mathcal{P}_\omega \mathcal{J} \subset X$. Обратное включение очевидно.

При $k \ge 2$, очевидно, $\ker (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^k \supset \ker \mathcal{P}_\omega \mathcal{J}$. Предположим, что справедливо соотношение $\ker (\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^{k-1} = X$, понимаемое в указанном выше смысле. Тогда из равенства $(\mathcal{P}_\omega \mathcal{J})^k x = 0$ следует, что для всех $t \in [0, \omega]$

$$[\mathcal{J}(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^{k-1}x](t) = \frac{t}{\omega}\int_0^\omega [(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^{k-1}x](s)\,ds.$$

Отсюда

$$(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^{k-1}x = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega [(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^{k-1}x](s)\,ds,$$

т. е. функция $(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^{k-1}x$ постоянна и поэтому принадлежит $\ker\mathcal{P}_\omega\mathcal{J}$. Рассуждая аналогично, получаем, что все функции $(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^{k-2}x$, $(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^{k-3}x, \ldots$ $\ldots, \mathcal{P}_\omega\mathcal{J}x$ постоянны. Следовательно,

$$\int_0^t x(s)\,ds = x(0) + \frac{t}{\omega}\int_0^\omega x(s)\,ds,$$

откуда $x(t) = \omega^{-1}\int_0^\omega x(s)\,ds$ для всех $t \in [0, \omega]$, т. е. функция x также тождественно равна константе. Таким образом, множество $\ker(\mathcal{P}_\omega\mathcal{J})^k$ содержит все постоянные функции пространства $C([0,\omega], X)$ и не содержит никаких других.

Завершая этот пункт, сформулируем в виде гипотезы нерешенную задачу, касающуюся вопроса о сходимости метода последовательных периодических приближений. Эта гипотеза мотивирована результатами работ [1, 5, 20], а также утверждениями п. 4. Напомним, что используются указанные выше обозначения и определения.

Гипотеза. *Метод последовательных периодических приближений* (29) *для* ω*-периодической задачи* (16) *сходится, если оператор* f *удовлетворяет условию Липшица* (17), *в котором верны соотношения* (31) *и*

$$r_{E_+}(L) < \frac{6}{\omega}. \tag{38}$$

Из изложенного в [5] и пп. 4, 6 настоящей работы следует, что предполагаемая оценка (38), содержащая постоянную „6", не может быть улучшена в рамках принятой в п. 3 формализации условия Липшица.

Аналогичную гипотезу можно высказать относительно периодической задачи (16) в гильбертовом пространстве; в ней будет использоваться постоянная 2π. Естественно, однако, что при этом следует указать подходящий способ записи условия Липшица. Это можно сделать достаточно „правдоподобно" в случае, когда основное и вспомогательное пространства X и E конечномерны, а абстрактный модуль $\mathfrak{m}$ задан покомпонентно. В общем случае, когда E выбирается бесконечномерным, ситуация, по-видимому, значительно усложняется.

6. Нижняя оценка для периода автономной системы. Пусть заданы полное ЧУНП $X = \langle X, \|\cdot\|_X, \preccurlyeq_X\rangle$ с воспроизводящим конусом X_+ и ЧУНП $\langle E, \|\cdot\|_E, \preccurlyeq_E\rangle$ с нормальным конусом E_+, а также некоторый абстрактный модуль $\mathfrak{m}: X \to E_+$. Предполагаем выполненными условия m_4), m_5) п. 3 и l_1) п. 5.

Пусть отображение $f: X \to X$ удовлетворяет условию Липшица вида

$$\mathfrak{m}(f(x_1) - f(x_2)) \preccurlyeq_E L\,\mathfrak{m}(x_1 - x_2) \quad \text{для всех } \{x_1, x_2\} \subset X \tag{39}$$

с некоторым линейным[5] оператором $L: E \to E$, оставляющим инвариантным конус E_+. Предполагается, что спектр L содержит ненулевые точки (в противном случае, как можно заметить, искомая оценка тривиальна).

Рассмотрим порождаемую функцией f динамическую систему (2).

[5] Для упрощения формулировок здесь и далее предполагаем, что в отличие от указанного в определении 5 оператор Липшица задан на всем пространстве E.

Теорема 9. *Пусть уравнение (2) имеет некоторое решение, периодическое с периодом* ω *и отличное от положения равновесия. Тогда необходимо*

$$\omega \geq \frac{\kappa}{r(L)},$$

где κ *— наименьшее из положительных чисел, удовлетворяющих уравнению*[6]

$$1/\kappa = \int_0^{1/2} e^{\tau(\tau-1)\kappa}\, d\tau. \tag{40}$$

Для одного класса автономных уравнений порядка $k \geq 1$ из леммы 8 вытекает следующий аналог теоремы 9.

Теорема 10. *Если* ω*-периодическая задача* (14), (15) *имеет непостоянное решение, то* ω *удовлетворяет неравенству* $\omega \geq \kappa / r(L)^{1/k}$.

Следует отметить, что оценки теорем 9 и 10 не являются оптимальными. Этот факт объясняется не столько использованием в исходных предположениях двусторонних неравенств, сколько выбором оператора сравнения при исследовании сходимости метода последовательных периодических приближений. Способ их получения, однако, имеет то, на наш взгляд важное преимущество, что он позволяет достаточно легко установить аналогичные результаты для ряда дифференциально-функциональных уравнений. При этом, за счет многомерности оператора Липшица, эти оценки в некоторых случаях могут быть точнее полученных в [5] (но не точнее указанного в п. 4 обобщения теоремы 1.3 из [5], поскольку участвующая в соответствующей оценке постоянная „6" неулучшаема).

7. Доказательство результатов п. 6. Используем обозначения и условия, принятые в п. 6.

Лемма 7 [20, 27]. *Спектральный радиус* $r(A_1)$ *линейного положительного отображения* A_1 *пространства* $C([0,1],E)$ *в себя, заданного формулой*

$$[A_1 x](t) := (1-t)\int_0^t x(s)\,ds + t\int_t^1 x(s)\,ds, \quad t \in [0,1], \tag{41}$$

есть величина, обратная числу (32).

Иными словами (см. замечание 12), число $\rho := r(A_1)$ является наибольшим из корней трансцендентного уравнения

$$\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 \exp\frac{\tau(\tau-1)}{\rho}\, d\tau.$$

Из леммы 7 легко получается такое утверждение.

Лемма 1. *Спектральный радиус линейного оператора* A_ω, *заданного на пространстве* $C([0,\omega],E)$ *с помощью соотношения* (28), *вычисляется по формуле* $r(A_\omega) = \omega/\kappa$, *в которой постоянная* κ *определена равенством* (32).

Доказательство. Действительно, для заданного ω введем „оператор замены переменной" $\sigma_\omega : C([0,\omega],E) \to C([0,1],E)$, положив

$$(\sigma_\omega x)(\tau) := x(\tau\omega), \quad t \in [0,1].$$

Легко проверить, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C([0,\omega],E) \arrow[r, "\sigma_\omega"] & C([0,1],E) \\ C([0,\omega],E) \arrow[u, "A_\omega"] \arrow[r, "\sigma_\omega"] & C([0,1],E) \arrow[u, "\omega A_1"'] \end{tikzcd}$$

[6] Другими словами, значение постоянной κ, приближенно равное 3,4161306 (см. [6, 20, 25]), задается формулой (32).

коммутативна или, что то же самое, $(1/\omega)A_\omega = \sigma_\omega^{-1} \circ A_1 \circ \sigma_\omega$. Отсюда следует такое соотношение для спектров операторов A_ω и A_1:

$$\sigma(A_\omega) = \omega\sigma(A_1).$$

Поэтому $r(A_\omega) = \omega r(A_1)$. В силу леммы 7 имеем $r(A_1) = 1/\kappa$ и, с учетом полученного выше соотношения, $r(A_\omega) = \omega/\kappa$.

Замечание 12. Введением нового положительного переменного $\mu := 1/\kappa$ уравнение (40) может быть записано следующим образом:

$$\mu = H(\mu), \tag{42}$$

где

$$H(\mu) = \int_0^{\frac{1}{2}} \exp\frac{\tau(\tau-1)}{\mu}d\tau = \frac{1}{2}\int_0^1 \exp\frac{\tau(\tau-1)}{\mu}d\tau = \int_0^1 \tau\exp\frac{\tau(\tau-1)}{\mu}d\tau. \tag{43}$$

В работе [20] уравнение (40) было выведено в виде (42), где H определяется согласно (43).

Доказательство теоремы 9. Допустим противное, т. е. что уравнение (2) имеет непостоянное периодическое решение $x = \phi$, однако для периода ω этого решения оценка теоремы не выполняется:

$$\omega < \frac{\kappa}{r(L)}. \tag{44}$$

В силу условия Липшица (39) к ω-периодической краевой задаче для уравнения (2) можно применять итеративную процедуру (29) метода последовательных периодических приближений. Согласно лемме 8 из неравенства (44) следует, что выполнены условия теоремы 7. Последняя теорема, в свою очередь, гарантирует, что соответствующее данной задаче уравнение (25) при любом значении параметра $z \in X$ имеет единственное решение $x(\cdot, z)$ и что *определяющая функция*

$$\Delta : X \ni z \mapsto \int_0^\omega [\mathfrak{f}x(\cdot, z)](s)ds$$

однозначна (см. замечание 8). При этом $x(\cdot, z) = \lim_{m\to\infty} x_m(\cdot, z)$, где

$$x_m(\cdot, z) := z + \mathcal{P}_\omega \mathcal{J}\mathfrak{f}x_{m-1}(\cdot, z),$$

$m \in N$, а $x_0(t, z) := z$ для всех $t \in [0, \omega]$.

Согласно лемме 6 имеем $\mathcal{P}_\omega \mathcal{J}\mathfrak{f}x_0(\cdot, z) = 0$. Кроме того, ясно, что,

$$\mathcal{P}_\omega \mathcal{J}\mathfrak{f}x_1(\cdot, z) = \mathcal{P}_\omega \mathcal{J}\mathfrak{f}(z + \mathcal{P}_\omega \mathcal{J}\mathfrak{f}x_0(\cdot, z)) = 0,$$

и, точно так же, $\mathcal{P}_\omega \mathcal{J}\mathfrak{f}x_m(\cdot, z) = 0$ для каждого $m \in N$. (Действительно, функция в левой части соотношения $f(z + \mathcal{P}_\omega \mathcal{J}\mathfrak{f}x_0(\cdot, z)) = f(z)$ постоянна, и то же самое верно для последующих итераций.) Это означает, что все *приближенные определяющие функции*

$$\Delta_m : X \ni z \mapsto \int_0^\omega [\mathfrak{f}x_m(\cdot, z)](s)ds$$

на самом деле совпадают. Следовательно, для всех $z \in X$ и $m \in N$ имеем $\Delta(z) = \Delta_m(z) = f(z)$, откуда вытекает, что $\Delta(z) = 0$ в том и только в том случае, когда

$$f(z) = 0. \tag{45}$$

В силу теоремы 6 последнее замечание позволяет утверждать, что начальное значение $z = x(0)$ каждого периодического решения x системы (2) определяется уравнением (45).

Используя двустороннее условие Липшица (39), несложно показать, что задача Коши $x' = f(x)$, $x(0) = z$ в принятых предположениях имеет единственное решение x при любом z. Так как, по доказанному, начальное значение $z := \phi(0)$ заданного периодического решения ϕ удовлетворяет уравнению (45), отсюда следует, что решение ϕ должно быть постоянным, а это противоречит исходному предположению. Таким образом, при выполнении условия (44) уравнение (2) не имеет периодических решений, отличных от положений равновесия. Этим утверждение теоремы 9 доказано.

Теорема 10 для уравнения (14) порядка $k \geq 1$ выводится аналогично теореме 9. Для ее доказательства следует, последовательно применяя лемму 5, получить аналог оценки (30) для случая, когда $k > 1$, и воспользоваться формулой для спектрального радиуса оператора (28) подобно тому, как это было сделано выше.

8. Примечания. Лемма 5 и теоремы 6 – 8 обобщают некоторые результаты теории метода последовательных периодических приближений [21 – 23, 27].

Теорема 8 представляет собой общую формулировку метода А. М. Самойленко [21, 22], предназначенного для исследования периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Равносильное утверждение для скалярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеется в § 10 работы [19].

Трансцендентное уравнение, на основании которого выводится используемая в ряде приведенных выше утверждений формула для спектрального радиуса оператора сравнения (28) (см. леммы 7, 8 и определение (32) постоянной κ), было независимо получено в [20, 28, 29] (см. также [25, 27]).

Теоремы 9, 4, 10 и 5 предоставляют оценки периодов решений автономных систем, аналогичные установленным в [2, 3, 5].

Постоянная $\kappa \approx 3{,}4161$ в указанных в пп. 6, 7 неравенствах, к сожалению, не является наибольшей из возможных. В частности, в этом состоит одна из причин, по которой желательно доказать (или опровергнуть) гипотезу, сформулированную в п. 5. Кроме того, было бы тем более заманчиво получить доказательство этой гипотезы, так как тогда оценка теоремы 4, которая является оптимальной при рассматриваемой постановке задачи, следовала бы уже из соответствующих усилений результатов пп. 5, 7. Помимо вызываемого им значительного теоретического интереса, этот результат был бы важен еще тем, что предоставил бы некоторую практически осуществимую рекуррентную процедуру для исследования периодических движений достататочно широкого класса дифференциальных систем, условия применимости которой были бы неулучшаемы в рамках принятой формализации условия Липшица.

1. *Yorke J. A.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **22**. – P. 509 – 512.
2. *Lasota A., Yorke J.* Bounds for periodic solutions of differential equations in Banach spaces // J. Different. Equat. – 1971. – **10**. – P. 83 – 91.
3. *Busenberg S., Fisher D., Martelli M.* Better bounds for periodic orbits of differential equations in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **86**. – P. 376 – 378.
4. *Busenberg S., Martelli M.* Bounds for the period of periodic orbits of dynamical systems // J. Different. Equat. – 1987. – **67**. – P. 359 – 371.
5. *Busenberg S., Fisher D., Martelli M.* Minimal periods of discrete and smooth orbits // Amer. Math. Mon. – 1989. – **96**. – P. 5 – 17.
6. *Rontó M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach spaces, and some applications. – Miskolc, 1996. – 34 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; 96–02).

7. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1 (23). – С. 3 – 95.
8. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
10. *Martin R. H., Jr.* Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces. – New York: John Wiley & Sons, 1976. – 440 p.
11. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 359 с.
12. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.
13. *Бахтин И. А., Красносельский М. А., Стеценко В. Я.* О непрерывности линейных положительных операторов. // Сиб. мат. журн. – 1962. – **3**, № 1. – С. 1156 – 160.
14. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
15. *Бахтин И. А.* О существовании общего собственного вектора у коммутативной совокупности линейных положительных операторов // Мат. сб. – 1965. – **67**, № 2. – С. 267 – 278.
16. *Функциональний* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
17. *Bonsall F. F.* Positive operators compact in an auxiliary topology // Pacif. J. Math. – 1960. – **10**, № 4. – P. 1131 – 1138.
18. *Medveď M.* On minimal periods of functional differential equations and difference inclusions // Ann. Pol. Math. – 1991. – **3**. – P. 263 – 270.
19. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
20. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелин. механика. – 1990. – Вып. 13 (47). – С. 31 – 36.
21. *Самойленко А. М.* Численно-аналитеческий метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82 – 93.
22. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Там же. – 1966. – **18**, № 2. – С. 50 – 59.
23. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
24. *Kwapisz M.* On modification of the integral equation of Samojlenko's numerical-analytic method // Math. Nachr. – 1992. – **157**. – P. 125 – 135.
25. *Evhuta N. A., Zabreiko P. P.* The Poincaré method and Samojlenko method for the construction of periodic solutioms to ordinary differential equations // Ibid. – 1991. – **153**. – P. 85 – 99.
26. *Ronto A.* On the boundary value problems with linear multipoint restrictions // Publ. Univ. Miskolc. Ser. D. Natur. Sci. Math. – 1995. – **36**, № 1. – P. 81 – 89.
27. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 2. – С. 162 – 168.
28. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н.* Об оценках периодических решений дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 1. – С. 30 – 32.
29. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О сходимости метода последовательных приближений А. М. Самойленко отыскания периодических решений // Докл. АН БССР. – 1985. – **29**, № 1. – С. 15 – 18.

Получено 02.06.99