УДК: 519.217.4, 517.955.4, 517.956.4, 517.958: 536.2

О. Вал. Антонюк, О. Вікт. Антонюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ФОРМУЛИ ВИСОКИХ ПОРЯДКІВ ДЛЯ ПОХІДНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФУЗІЙНИХ НАПІВГРУП

The purpose of this article is to point out that a special choice of the Cameron–Martin direction in characterization of the Wiener measure by integration by parts formula leads to the set of natural representations for derivatives of heat semigroups. In particular, we find the final solution of the non-Lipschitz singularities in the Malliavin calculus.

Мета роботи — показати, що спеціальний вибір напряму Камерона–Мартіна в характеризації міри Вінера через формулу інтегрування частинами приводить до множини природних зображень для похідних напівгруп нелінійних дифузій. Зокрема, знайдено остаточний розв'язок неліпшицевих сингулярностей числення Маллявена.

1. Вступ. Точні зображення похідних напівгруп, породжених диференціальними операторами другого порядку, відіграють ключову роль для розуміння гладких властивостей розв'язків асоційованих параболічних рівнянь [1–6].

Так, наступне зображення, яке є стандартним у підході числення Маллявена до регулярних властивостей дифузійних напівгруп,

$$\frac{\partial}{\partial x} P_t f(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^0) \left\{ \frac{\xi_t^1}{D_u \xi_t^0} \int_0^t u_s \, dW_s - D_u \left(\frac{\xi_t^1}{D_u \xi_t^0} \right) \right\} \tag{1}$$

дозволяє зробити висновок, що дифузійна напівгрупа $P_t f(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^0(x))$ підвищує гладкість початкової функції, тобто з $f \in C_b$ випливає, що для кожного $t > 0$ $P_t f \in C^1$ при достатній регулярності виразу $\{\ldots\}$ у правій частині (1). Вище $D_u \xi_t^0$ — стохастична похідна на просторі Вінера, а $\xi_t^1 = \frac{\partial}{\partial x} \xi_t^0$ — перша варіація процесу,

$$\xi_t^0(x) = x + \int_0^t B(\xi_s^0(x)) dW_s - \int_0^t F(\xi_s^0(x)) ds, \tag{2}$$

де $B \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ з рівномірно невиродженим B.

Зображення (1) безпосередньо випливає з базової формули інтегрування частинами на вінерівському просторі [5–9]

$$\mathbf{E} D_u G = \mathbf{E} G \int_0^\infty \langle u_t, dW_t \rangle_{\mathbb{R}^d}, \quad u \in \mathcal{J}. \tag{3}$$

Тут $\mathbf{E}$ — математичне сподівання відносно вінерівської міри $\mathbf{P}$ на метричному просторі $\Omega = C_0([0, \infty), \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{J}$ — множина адаптованих відносно канонічної фільтрації $\mathcal{F}_t$ неперервних інтегровних процесів $u_t(\omega)$ таких, що $\mathbf{E} \int_0^T \|u_t\|^{p+1} dt < \infty$ для будь-яких $T, p > 0$ і $D_u G$ є сильною стохастичною похідною. Вінерівський функціонал $G = G(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $G \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$ називається *сильно стохастично диференційовним* [5, 6], якщо для будь-якого $u \in \mathcal{J}$ існує сильна стохастична похідна $D_u G \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$ така, що

$$\forall p \geq 1 \quad \exists \lim_{|\varepsilon| \to 0} \mathbf{E} \left| \frac{G(\omega^\varepsilon) - G(\omega)}{\varepsilon} - D_u G(\omega) \right|^p = 0,$$

де ω^ε позначає збурену траєкторію, $\omega^\varepsilon = \{\omega_t + \varepsilon \int_0^t u_s\, ds\}_{t\geq 0}$, у напрямку інфінітезимального приросту вздовж процесу u. Відповідно вінерівський функціонал $G \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$ є *стохастично диференційовним*, якщо для G існують сильні стохастичні похідні у напрямках обмежених процесів $u \in \mathcal{J}$ і лінійний по u функціонал $D_u G$ задовольняє властивість: із збіжності обмежених $u_n \in \mathcal{J}$ до інтегровного $u \in \mathcal{J}$: $\forall p, T > 0$ $\mathbf{E}\int_0^T \|u_n - u\|^{1+p}\, dt \to 0,\ m, n \to \infty$, випливає фундаментальність сильних стохастичних похідних для кожних p, $T > 0$ $\mathbf{E}\,|D_{u_n} G - D_{u_m} G|^{1+p} \to 0,\ n, m \to \infty$. Границя $\lim\limits_{n\to\infty} D_{u_n} G = D_u G$ — єдина і надалі називається *стохастичною похідною функціоналу* G. Зауважимо, що формула (3) легко переноситься на клас $\mathcal{F}_t$-вимірних стохастично диференційовних вінерівських функціоналів для будь-якого $s > 0$.

Можна безпосередньо побачити, що рівняння на першу варіацію ξ_t^1 і обернену стохастичну похідну $1/D_u\xi_t^0$ мають коерцитивні і дисипативні коефіцієнти в головних частинах лише у випадку ліпшицевих припущень на дифузію і зсув $\{B, F\}$. Тому попередні дослідження властивостей підвищення гладкості були сконцентровані на дифузіях з глобально ліпшицевими коефіцієнтами, що природно виникають, наприклад, на компактних C^∞ ріманових і спінових багатовидах [3 – 8, 10]. Фактично, для істотно нелінійних дифузій стає неможливим отримати навіть оцінки на моменти і сингулярність процесу $1/D_u\xi_t^0$ руйнує співвідношення (1) [11].

2. Основні припущення і допоміжні твердження. Нижче ми запропонуємо множину формул для будь-якого порядку похідних напівгруп теплопровідності, що дозволяють працювати з принципово нелінійними дифузіями і не містять сингулярних членів таких, як обернений детермінант Маллявена або обернена стохастична похідна.

Надалі мають місце наступні припущення на коефіцієнти B, F рівняння (2).

А. Коерцитивність та дисипативність: $\forall M\ \exists K_M, K_1, K_2$

$$\langle x-y, F(x)-F(y)\rangle_{\mathbb{R}^d} - M\|B(x)-B(y)\|_{HS}^2 \geq K_M\|x-y\|^2, \tag{4}$$

$$\langle x, F(x)\rangle_{\mathbb{R}^d} - M\|B(x)\|_{HS}^2 \geq -K_1\|x\|^2 - K_2.$$

В. Параметри неліпшицевості: Відображення F є квазімонотонним і $\exists\, \mathbf{k}_F, \mathbf{k}_B \geq -1$ з $2\mathbf{k}_B \leq \mathbf{k}_F$ такі, що $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists C_n\ \forall i = 1, \ldots, n\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\|F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y)\|_i \leq C_n\|x-y\|(1+\|x\|+\|y\|)^{\mathbf{k}_F},$$

$$\|B^{(i)}(x) - B^{(i)}(y)\|_i \leq C_n\|x-y\|(1+\|x\|+\|y\|)^{\mathbf{k}_B}.$$

Вище $\|\cdot\|_{HS}$ позначає норму Гільберта – Шмідта матриці в $\mathbb{R}^d$. Під $\|\cdot\|_i$ розуміємо норму i-ї похідної Фреше відповідного відображення.

Лема 1. *Для* $u \in \mathcal{J}$ *стохастична похідна* $D_u\xi_t^0$ *задовольняє рівняння*

$$D_u\xi_t^0 = \int_0^t B(\xi_s^0)u_s\, ds + \int_0^t B'(\xi_s^0(x))[D_u\xi_s^0]dW_s - \int_0^t F'(\xi_s^0(x))[D_u\xi_s^0]ds, \tag{5}$$

де $G'(x)[v]$ — *похідна Гато відображення* G *в точці* x *у напрямку* v.

Доведення. Перш за все зауважимо, що (5) є наслідком (2) і загальних властивостей стохастичної похідної D_u [3 – 7, 10]

$$D_u f(\xi^1, \dots, \xi^n) = \sum_{i=1}^n \partial^i f(\xi^1, \dots, \xi^n) D_u \xi^i, \qquad D_u \int_0^t f_s\, ds = \int_0^t D_u f_s\, ds, \tag{6}$$

$$D_u \int_0^t g_s\, dW_s = \int_0^t D_u g_s\, dW_s + \int_0^t u_s g_s\, ds.$$

I. *Побудова збуреного процесу* $\xi_t^\varepsilon(x, u)$. Щоб довести лему, потрібно розглянути для обмеженого $u \in \mathcal{J}$ процес $\xi_t^\varepsilon(x, u, \omega) = \xi_t^0\left(x, \omega_\cdot + \varepsilon \int_0 u_s\, ds\right)$, $\omega \in \in \Omega$, який є розв'язком рівняння

$$\xi_t^\varepsilon(x, u) = x + \varepsilon \int_0^t B(\xi_t^\varepsilon(x, u)) u_s\, ds + \int_0^t B(\xi_t^\varepsilon(x, u))\, dW_s - \int_0^t F(\xi_t^\varepsilon(x, u))\, ds. \tag{7}$$

Оскільки $\varepsilon \| B(\cdot) u \| \le \frac{1}{2} \varepsilon^2 \| u \|^2 + \frac{1}{2} \| B(\cdot) \|_{HS}^2$, то при обмежених $u \in \mathcal{J}$ для рівняння (5) виконані умови коерцитивності і дисипативності. Тому, згідно з [12–14], рівняння (7) має єдиний сильний розв'язок, неперервний відносно початкової умови x.

II. *Побудова стохастичної похідної* $D_u \xi_t^0(x)$. Аналогічно, після підстановки $x = y + \alpha h$ в умову коерцитивності (4), домноження на $1/\alpha^2$ і переходу до границі $\alpha \to 0$ отримаємо $\forall M \ \exists K_M \ \forall x, h \in \mathbb{R}^d$

$$\langle h, F'(x) h \rangle - M \| B'(x)[h] \|_{HS}^2 \ge K_M \| h \|^2, \tag{8}$$

тобто коерцитивність і дисипативність лінійного неоднорідного рівняння (5). З критеріїв [12–14] випливає розв'язність рівняння (5). Більш того, як наслідок формули Іто і оцінок на моменти процесу $\xi_t^0(x)$ можна отримати нерівність, у певному сенсі аналогічну (5.7) із [11]:

$$\mathbf{E} \left\| D_u \xi_t^0(x) \right\|^p \le K e^{pMt} (1 + \| x \|)^{p(\mathbf{k}_B + 1)} \int_0^t \sqrt{\mathbf{E} \| u_t \|^{2p}}\, dt, \tag{9}$$

де параметр неліпшицевості $\mathbf{k}_B$ виникає при оцінці неоднорідного члена в (5). Вище також використано коерцитивність і дисипативність рівняння (5) і властивість $D_u \xi_t^0(x)|_{t=0} = D_u x = 0$.

III. *Існування сильних стохастичних похідних процесу* $\xi_t^0(x)$ випливає із збіжності

$$\forall p, T > 0 \quad \exists \lim_{|\varepsilon| \to 0} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\xi_t^\varepsilon(x, u) - \xi_t^0(x)}{\varepsilon} - D_u \xi_t^0(x) \right\|^p = 0 \tag{10}$$

для обмежених процесів $u \in \mathcal{J}$. Це твердження може бути доведено з використанням формули Іто і припущення B на неліпшицеву поведінку коефіцієнтів дифузії і зсуву. Перший крок полягає в отриманні оцінки виразу

$$\Delta_\varepsilon(t) = \frac{\xi_t^\varepsilon(x, u) - \xi_t^0(x)}{\varepsilon} - D_u \xi_t^0(x):$$

$$h_t = \mathbf{E} \| \Delta_\varepsilon(t) \|^p \le K_p \int_0^t h_s\, ds + \varepsilon^p C_p (1 + \| x \|)^{p(2\mathbf{k}_F + 1)} e^{pM(\sup_{s \in [0, t]} \| u_s \|) t}, \tag{11}$$

де потрібно використати $\Delta_\varepsilon(0) = 0$ і формулу

$$G(x) - G(y) = G'(y)[x-y] + \int_0^1 \{G'(y+l(x-y)) - G'(y)\}[x-y]\,d\ell$$

для виділення коерцитивної частини $B'(\xi^0)[\Delta_\varepsilon]$, $F'(\xi^0)[\Delta_\varepsilon]$ в диференціалі $d\Delta_\varepsilon(t)$, а також параметрів нелінійності $\mathbf{k}_F$, $\mathbf{k}_B$ що виникають у члені з $\int_0^1 \ldots d\ell$.

На другому кроці, використовуючи (11) і нерівність Дуба ([15], гл. 7, § 3, (3.7′)), потрібно отримати збіжність (10), тобто прокомутувати $\mathbf{E}$ і $\sup\limits_{t\in[0,T]}$.

IV. Нарешті, стохастична диференційовність процесу $\xi_t^0(x)$ випливає із сильної стохастичної диференційовності (див. I – III), лінійності $D_{u^1-u^2}\xi_t^0(x) = D_{u^1}\xi_t^0(x) - D_{u^2}\xi_t^0(x)$ і нерівності (9). Повторне використання (9) дозволяє перейти до границі в рівнянні (5) і отримати його вже для інтегровного процесу $u \in \mathcal{J}$. Лему доведено.

Позначимо через $\xi_t^1(x) = \left\{\dfrac{\partial^i \xi_t^0(x)}{\partial x^j}\right\}_{i,j=1}^d$ матрицю першої варіації процесу $\xi_t^0(x)$ відносно початкової умови x. Вона задовольняє рівняння

$$\forall v \in \mathbb{R}^d \quad \xi_t^1(x)v = v + \int_0^t B'(\xi_s^0(x))[\xi_s^1(x)v]\,dW_s - \int_0^t F'(\xi_s^0(x))[\xi_s^1(x)v]\,ds, \tag{12}$$

яке за умови (8) має єдиний розв'язок згідно з [12 – 14].

У наступній теоремі підраховано стохастичну похідну у певних напрямках у термінах першої варіації. Введемо позначення

$$\Psi_t v = B^{-1}(\xi_t^0(x))\xi_t^1(x)v \in \mathcal{J}, \qquad v \in \mathbb{R}^d. \tag{13}$$

Теорема 2. *Стохастична похідна у напрямку* $\Psi_t v$ *дорівнює*

$$D_{\Psi_v}\xi_t^0(x) = t\xi_t^1(x)v. \tag{14}$$

Доведення. Зображення для $D_u\xi_t^0$ в термінах першої варіації ξ_t^1 можна вгадати, використовуючи метод варіації сталої. Написавши диференціал для $[\xi_t^1]^{-1}D_u\xi_t^0$, маємо, що розв'язок (5) допускає формальне зображення

$$\forall u \in \mathcal{J} \quad D_u\xi_t^0(x) = \xi_t^1(x)\int_0^t [\xi_s^1]^{-1}B(\xi_s^0(x))u_s\,ds, \tag{15}$$

коли, наприклад, рівняння (2) має ліпшицеві коефіцієнти і $[\xi_t^1]^{-1}$ добре визначено. Підставляючи вибір (13), задовольняємо властивість (14).

Коректне доведення зображення (14) проводиться порівнянням диференціалів. За лемою 1 процес $D_{\Psi_v}\xi_t^0(x)$ задовольняє рівняння

$$D_{\Psi_v}\xi_t^0(x) = \int_0^t B(\xi_s^0)\Psi_s v\,ds + \int_0^t B'(\xi_s^0)[D_{\Psi_v}\xi_s^0]\,dW_s - \int_0^t F'(\xi_s^0)[D_{\Psi_v}\xi_s^0]\,ds. \tag{16}$$

Підставляючи (13) та $D_{\Psi_v}\xi_t^0(x) = t\xi_t^1(x)v$ в (16) і використовуючи зображення (12) стохастичного диференціала для $\xi_t^1(x)$, отримуємо, що рівняння (16) виконується тотожно. З єдиності розв'язків випливає твердження.

3. Основний результат. Наступна теорема дає формулу для похідних високого порядку дифузійної напівгрупи $P_t f(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^0(x))$ через підхід числення Маллявена. Зауважимо, що внаслідок властивості (14) ми фактично можемо скоротити сингулярний дріб в (1) і уникнути неліпшицевої сингулярності оберненої стохастичної похідної, яка звичайно виникала у численні Маллявена [3 – 11].

Введемо оператор Υ_v, що діє за правилом

$$\Upsilon_v K(t, x, \omega) = t < v, \quad \partial_x > K + K \int_0^1 \; < \Psi_s v, \quad dW_s > - D_{\Psi_v} K$$

на гладкі функціонали, задані на декартовому добутку $\mathbb{R}^d$ і вінерівського простору. Надалі через $\partial_x^n f = \left\{ \dfrac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} \right\}_{j_1, \ldots, j_n = 1}^d$ позначимо n-ту похідну функції $f \in C^\infty_{\text{pol}}(\mathbb{R}^d)$, де $C^\infty_{\text{pol}}(\mathbb{R}^d)$ позначає клас неперервно диференційовних функцій з похідними не більш ніж поліноміального росту.

Теорема 3. *Похідна n-го порядку* $\partial^n P_t f(x)$ *напівгрупи* P_t *допускає зображення:* $\forall\, t > 0 \;\; \forall f \in C^\infty_{\text{pol}}(\mathbb{R}^d) \;\; v_l \in \mathbb{R}^d$

$$\langle v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, \partial^n P_t f(x) \rangle = \frac{1}{t^n} \mathbf{E} f(\xi_t^0(x)) \Upsilon_{v_n} \ldots \Upsilon_{v_1} 1. \tag{17}$$

Зауваження. Твердження теореми при $n = 1$ дає формулу Елворсі

$$\forall\, t > 0 \quad \langle v, \partial P_t f(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} = \frac{1}{t} \mathbf{E} f(\xi_t^0(x)) \int_0^t \langle \Psi_s v, dW_s \rangle_{\mathbb{R}^d},$$

вперше запропоновану в [16] і використану в [17 – 19]. У порівнянні з підходом обернених параболічних рівнянь, застосованим в [16 – 19], ми розробляємо нижче неліпшиців підхід в численні Маллявена і отримуємо формулу Елворсі як частинний випадок зображення будь-якого порядку.

Доведення. Твердження доводиться індукцією по $n \geq 0$. Початкове зображення виконане за класичною формулою $(P_t f)(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^0(x))$.

Розглянемо просту модифікацію (3): для $\mathcal{F}_t$-вимірного диференційовного функціоналу G

$$\mathbf{E} G f(\xi_t^0) \int_0^t \langle u_s, dW_s \rangle = \mathbf{E} D_u [G f(\xi_t^0)] = \mathbf{E} \{ f(\xi_t^0) D_u G + G \langle \partial f(\xi_t^0), D_u \xi_t^0 \rangle \}$$

або

$$\mathbf{E} G \langle \partial f(\xi_t^0), D_u \xi_t^0 \rangle = \mathbf{E} f(\xi_t^0) \left\{ G \int_0^t \langle u_s, dW_s \rangle - D_u G \right\}. \tag{18}$$

Застосовуючи (14) та ланцюжкове правило (6), отримуємо

$$\langle v_{n+1}, \partial_x \rangle f(\xi_t^0(x)) = \langle \partial f(\xi_t^0(x)), \xi_t^1(x) v_{n+1} \rangle =$$

$$= \frac{1}{t} \langle \partial f(\xi_t^0(x)), D_{\Psi v_{n+1}} \xi_t^0(x) \rangle = \frac{1}{t} D_{\Psi v_{n+1}} f(\xi_t^0(x)). \tag{19}$$

Використовуючи інтегрування частинами (18), індуктивне припущення (17) та властивість (19) стохастичної похідної, отримуємо

$$\langle v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, \partial^{n+1} P_t f(x) \rangle = \langle v_{n+1}, \partial_x \rangle \frac{1}{t^n} \mathbf{E} f(\xi_t^0(x)) \Upsilon_{v_n} \ldots \Upsilon_{v_1} 1 =$$

$$= \frac{1}{t^n}\,\mathbf{E}[\langle v_{n+1}, \partial_x\rangle f(\xi_t^0)]\Upsilon_{v_n}\ldots\Upsilon_{v_1}1 + \frac{1}{t^n}\,\mathbf{E}f(\xi_t^0)\langle v_{n+1}, \partial_x\rangle\Upsilon_{v_n}\ldots\Upsilon_{v_1}1 =$$

$$= \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathbf{E}[D_{\Psi v_{n+1}} f(\xi_t^0)]\Upsilon_{v_n}\ldots\Upsilon_{v_1}1 + \frac{1}{t^n}\,\mathbf{E}f(\xi_t^0)\langle v_{n+1}, \partial_x\rangle\Upsilon_{v_n}\ldots\Upsilon_{v_1}1 =$$

$$= \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathbf{E}f(\xi_t^0)\left\{\left(t\langle v_{n+1}, \partial_x\rangle + \int_0^t \langle \Psi_s v_{n+1}, dW_s\rangle - D_{\Psi v_{n+1}}\right)\Upsilon_{v_n}\ldots\Upsilon_{v_1}1\right\},$$

тобто твердження індуктивного кроку.

Стохастичні похідні $D_{\Psi v_1}\ldots D_{\Psi v_n}\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}\xi_t^1(x,\omega)$, що виникають у зображенні ядра $\Upsilon_{v_n}\ldots\Upsilon_{v_1}1$, є розв'язками коерцитивних систем з коефіцієнтами, які, за припущенням на $\{B, F\}$, зростають не швидше ніж поліноми. Застосування техніки робіт [11, 20] показує, що процеси $\Upsilon_{v_n}\ldots\Upsilon_{v_1}1$ добре визначені.

1. *Daletskii Yu. L.* Infinite-dimensional elliptic operators and parabolic equations connected with them // Russian Math. Surveys. – 1967. – **22**, № 4. – P. 1–53.
2. *Elworthy K. D.* Stochastic differential equations on manifolds. – London: Cambridge Univ. Pres., Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., 1975. – **70**. – 326 p.
3. *Malliavin P.* Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators // Int. Symp. SDE: Proc. – Kyoto, 1976. – P. 195–263.
4. *Malliavin P.* C^k-hypoellipticity with degeneracy // Stochastic Anal. (A. Friedman and M. Pinsky, Eds.). – Willey Inst., 1978. – P. 199–214.
5. *Malliavin P.* Stochastic Analysis. – Paris: Springer-Verlag, 1997. – 343 p.
6. *Nualart D.* The Malliavin calculus and related topics. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 266 p.
7. *Bismut J.-M.* Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander conditions // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und. vew. Geb. – 1981. – **56**. – P. 468–505.
8. *Bismut J.-M.* Large deviations and the Malliavin calculus. – Basel: Birkhäuser, 1984. – 216 p.
9. *Ocone D.* Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes // Stochastics. – 1984. – **12**. – P. 161–185.
10. *Stroock D.* The Malliavian calculus, a functional analytic approach // J. Funct. Anal. – 1981. – **44**. – P. 212–257.
11. *Antoniouk A. Val., Antoniouk A. Vict.* Non-Lipschitz Singularities in the Malliavin Calculus: Raise of Smoothness for Infinite Dimensional Semigroups. – Kiev, 1996. – 37 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukkraine. Inst. Math.; № 96.23).
12. *Krylov N. V., Rosovskii B. L.* Cauchy problem for linear stochastic PDE // Izvestia Acad. Nauk UdSSR. – 1977. – **6**. – P. 1329–1347.
13. *Krylov N. V., Rozovskii B. L.* On the evolutionary stochastic equations. – Moscow: VINITI Ser. Contemporary problems of Mathematics, 1979. – **14**. – P. 71–146.
14. *Pardoux E.* Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes // Stochastics. – 1979. – **3**. – P. 127–167.
15. *Doob J. L.* Stochastic processes. – New York: Willey, 1953. – 605 p.
16. *Elworthy K. D.* Stochastic flows on Riemannian manifolds // Diffusion Processes Related Problems in Analysis (M. A. Pinsky, V. Wihstutz, Eds.). – Basel: Birkhäuser, 1992. – V. II. – P. 37–72.
17. *DaPrato G., Elworthy K. D., Zabczyk J.* Strong Feller property for stochastic semilinear equations // Stochastic Anal. and Appl. – 1995. – **13**. – P. 35–45.
18. *DaPrato G., Nualart D., Zabczyk J.* Strong Feller property for infinite dimensional stochastic equations. – Pisa, 1994. – 15 p. – (Preprint / Scuola Normale Superiore Preprints; № 33).
19. *Elworthy K. D., Li X.-M.* Formula for derivatives of heat semigroup // J. Funct. Anal. – 1994. – **125**. – P. 252–286.
20. *Antoniouk A. Val., Antoniouk A. Vict.* Quasicontractive nonlinear calculus of variations and smoothness of discontinuous semigroups, generated by non-Lipschitz stochastic differential equations. – Kiev, 1996. – 34 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; № 96.22).

Одержано 02.02.99