УДК 517.95

Г. П. Доманська (Львів. ун-т ім. І. Франка),
С. П. Лавренюк (Краків. політехніка, Польща)

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНІЄЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

We prove the existence and uniqueness of the solution of mixed problem for a system of pseudoparabolic equations in unbounded (with respect to space variables) domain.

Доведено існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для системи псевдопараболічних рівнянь в необмеженій (за просторовими змінними) області.

Задачі для псевдопараболічних рівнянь та систем неодноразово розглядалися в літературі [1 – 8]. Зокрема, W. Rundell [9] показав, що єдиність розв'язку задачі Коші для таких рівнянь зберігається лише в класі функцій, що зростають як $e^{\alpha|x|}$, де стала α залежить від коефіцієнтів рівняння. При цьому припускається, що права частина та початкові функції зростають на нескінченності не швидше, ніж вказана експонента. Аналогічні результати були отримані і в працях Г. Хількевич [10, 11].

У запропонованій роботі розглянуто мішану задачу для системи псевдопараболічних рівнянь у необмеженій (за просторовими змінними) області в припущенні, що права частина та початкові функції мають швидкість зростання меншу від експоненціальної. Отримано, що класи коректності цієї задачі не залежать від коефіцієнтів системи.

Нехай Ω — необмежена область в R^n з межею Γ; $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T < \infty$. Щодо геометрії області Ω зробимо припущення: будемо вважати, що існує послідовність обмежених підобластей $\{\Omega^\tau\}$ області Ω, залежних від параметра $\tau \in N$, які мають такі властивості:

1) $\Omega = \bigcup\limits_{\tau\in T} \Omega^\tau$; $\tau \leq \tau' \to \Omega^\tau \subset \Omega^{\tau'}$;

2) $\partial\Omega^\tau = \Gamma_1^\tau \cup \Gamma_2^\tau$, де Γ_1^τ, Γ_2^τ — кусково-гладкі гіперповерхні; $\operatorname{mes}\{\Gamma_1^\tau \cap \Gamma_2^\tau\} = 0$, $\Gamma_1^\tau \neq \varnothing$, $\Gamma_1^\tau \cap \Gamma \neq \varnothing$ $\forall \tau \in N$; $\Gamma = \bigcup\limits_{\tau\in N} \Gamma_1^\tau$.

Введемо необхідні для подальшого дослідження простори. Говоритимемо, що деяка функція належить до $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, якщо дана функція належить до простору $L^2(\Omega^\tau)$ для довільного $\tau \in N$; вважатимемо, що $L^2_{\mathrm{loc}}(Q_T) := L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega))$.

Нехай $h(x)$, $d(x)$, $\psi(x)$ — деякі додатні функції з простору $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Позначимо через $V_{h,d,\psi}(Q_T)$ та $W_\psi(Q_T)$ замикання множини функцій $C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$ відповідно за нормами

$$\|u\|_{V_{h,d,\psi}(Q_T)} = \left(\int\limits_{Q_T}\left[h(x)|u_t|^2 + d(x)|u|^2 + \sum_{i=1}^n \left(|u_{x_i}|^2 + |u_{x_it}|^2\right)\right]\psi(x)\,dxdt\right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{W_\psi(Q_T)} = \left(\int\limits_{Q_T}|u|^2\psi(x)\,dxdt\right)^{1/2},$$

а через $U_{h,d,\psi}(\Omega)$ — замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$\hat{A}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \left\| A_{ij}(x) \right\|^2, \quad \hat{B}(x) = \sup_{t\in[0,T]} \sum_{i,j=1}^{n} \left\| B_{ij}(x,t) \right\|^2,$$

$$\hat{C}(x) = \sup_{t\in[0,T]} \sum_{i=1}^{n} \| C_i(x,t) \|^2.$$

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи* (1) *виконуються умови* A), B), D), H); *нехай функція* $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ *така, що для довільного* $x \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)} < \frac{a_0 h(x)}{2n^2 \hat{A}(x)\left(\hat{A}(x) + \hat{B}(x)\right)}. \tag{5}$$

Тоді задача (1) – (3) *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай u_1, u_2 — розв'язки задачі (1) – (3). Для кожного з них запишемо інтегральну рівність (4), віднімемо ці рівності та покладемо $u = u_1 - u_2$, $v = (u_t + u)\psi(x)e^{-\mu t}$, $\mu > 0$. Враховуючи умови теореми та оцінки

$$I_1 = \int_{Q_T} (H(x)u_t + D(x,t)u, u_t + u)\psi(x)e^{-\mu t} dxdt \geq$$

$$\geq \int_{Q_T} \left[h(x)|u_t|^2 + \left(d(x) - \frac{d^1(x)}{2} + \frac{\mu}{2}(h(x) + d(x)) \right) |u|^2 \right] \psi(x)e^{-\mu t} dxdt;$$

$$I_2 = \int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x)u_{x_i t} + B_{ij}(x,t)u_{x_i}, ((u_t + u)\psi(x))_{x_j} \right) e^{-\mu t} dxdt \geq$$

$$\geq \int_{Q_T} \left[\left(a_0 - n\hat{A}(x)\delta_0\right) \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i t} \right|^2 + \left(b_0 - \frac{b^1}{2} + \frac{\mu}{2}(a_0 + b_0) - n\hat{B}(x)\delta_0 \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i} \right|^2 - \frac{n\left(\hat{A}(x) + \hat{B}(x)\right)}{2\delta_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)} \left(|u_t|^2 + |u|^2 \right) \right] \psi(x)e^{-\mu t} dxdt;$$

$$I_3 = -\int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \left(C_i(x,t)u_{x_i}, u_t + u \right) \psi(x)e^{-\mu t} dxdt \geq$$

$$\geq -\int_{Q_T} \left[\delta_1 \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i} \right|^2 + \frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_1} \left(|u_t|^2 + |u|^2 \right) \right] \psi(x)e^{-\mu t} dxdt$$

отримуємо

$$\int_{Q_T} \left[\left(a_0 - n\hat{A}(x)\delta_0\right) \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i t} \right|^2 + \left(b_0 - \frac{b^1}{2} + \frac{\mu}{2}(a_0 + b_0) - n\hat{B}(x)\delta_0 - \delta_1 \right) \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i} \right|^2 + \right.$$

$$+ \left(d(x) - \frac{d^1(x)}{2} + \frac{\mu}{2}(h(x) + d(x)) - \frac{n\left(\hat{A}(x) + \hat{B}(x)\right)}{2\delta_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)} - \frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_1} \right) |u|^2 +$$

$$\left. + \left(h(x) - \frac{n\left(\hat{A}(x) + \hat{B}(x)\right)}{2\delta_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)} - \frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_1} \right) |u_t|^2 \right] \psi(x)e^{-\mu t} dxdt \leq 0, \tag{6}$$

де коефіцієнт b^1 залежить від $\left\| B_{ijt}(x,t) \right\|$, а $d^1(x)$ — від $\| D_t(x,t) \|$. Виберемо δ_0 з умови

$$\frac{n\big(\hat{A}(x)+\hat{B}(x)\big)\sum_{i=1}^{n}\psi_{x_i}^2(x)}{h(x)\psi^2(x)} < \delta_0 < \frac{a_0}{2n\hat{A}(x)},$$

а μ і δ_1 виберемо такими, щоб виконувались нерівності

$$h(x)-\frac{n\big(\hat{A}(x)+\hat{B}(x)\big)}{\delta_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)}-\frac{n\hat{C}(x)}{\delta_1} \ge 0,$$

$$d(x)-d^1(x)+\mu(h(x)+d(x))-\frac{n\big(\hat{A}(x)+\hat{B}(x)\big)}{\delta_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)}-\frac{n\hat{C}(x)}{\delta_1} \ge 0,$$

$$b_0-b^1+\mu(a_0+b_0)-2n\delta_0\hat{B}(x)-2\delta_1 \ge 0.$$

Таким чином, із (6) маємо оцінку $\|u\|_{V_{h,d,\psi}(Q_T)} \le 0$, тобто $u=0$ майже скрізь. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів системи* (1) *виконуються умови теореми* 1; $F \in W_\psi(Q_T)$, $u_0 \in U_{h,d,\psi}(\Omega)$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1) – (3).

Доведення. Розглянемо в області $Q_T^* = \Omega^* \times (0,T)$ (де $\Omega^* \in \{\Omega^\tau\}$, Γ^* — межа Ω^*) задачу

$$H(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x)u_{x_it})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}C_i(x,t)u_{x_i} + D(x,t)u = F^*(x,t), \tag{7}$$

$$u|_{\Gamma^*\times[0,T]} = 0, \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = u_0^*(x). \tag{9}$$

Тут

$$F^*(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & (x,t)\in Q_T^*, \\ 0, & (x,t)\in Q_T\setminus Q_T^*; \end{cases}$$

$$u_0^*(x) = \begin{cases} u_0(x), & x\in\Omega^*, \\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega^*. \end{cases}$$

Розв'язком задачі (7) – (9) називатимемо функцію u^* з простору $H^1((0,T);H^1(\Omega^*))$, яка задовольняє інтегральну рівність

$$\int\limits_{Q_T^*}\Big[(H(x)u_t,v)+\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x)u_{x_it},v_{x_j})+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u_{x_i},v_{x_j})-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(C_i(x,t)u_{x_i},v)+(D(x,t)u,v)\Big]dx\,dt = \int\limits_{Q_T^*}(F^*(x,t),v)\,dx\,dt$$

для довільної функції $v \in C_0^\infty(Q_T^*)$ та майже скрізь в Ω^* справджує умову (9). Шукатимемо цей розв'язок методом Гальоркіна. Нехай $\{\varphi^{*,k}(x)\}$ — база в $H^1(\Omega^*)$. Ортонормуємо її стосовно скалярного добутку

$$(u,v) = \int_{\Omega^*} \left[(H(x)u, v) + \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x) u_{x_i}, v_{x_j}) \right] dx.$$

Будемо вважати, що $u^{*,N} = \sum_{s=1}^{N} c_k^N(t) \varphi^{*,k}(x)$, де $c_k^N(t)$, $k = 1, \ldots, N$, визначаються з системи рівнянь

$$\int_{\Omega^*} \left[\left(H(x) u_t^{*,N}, \varphi^{*,k}(x)\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x) u_{x_i t}^{*,N}, \varphi_{x_j}^{*,k}(x)\right) + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{ij}(x,t) u_{x_i}^{*,N}, \varphi_{x_j}^{*,k}(x)\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(C_i(x,t) u_{x_i}^{*,N}, \varphi^{*,k}(x)\right) +$$

$$\left. + \left(D(x,t) u^{*,N}, \varphi^{*,k}(x)\right) \right] dx = \int_{\Omega^*} \left[\left(F^*(x,t), \varphi^{*,k}(x)\right)\right] dx, \quad k = \overline{1,N}, \tag{10}$$

або

$$\sum_{s=1}^{N} \left(c_s^N(t)\right)' \left\{ \int_{\Omega^*} \left[\left(H(x) \varphi^{*,s}(x), \varphi^{*,k}(x)\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x) \varphi_{x_i}^{*,s}, \varphi_{x_j}^{*,k}(x)\right) \right] dx \right\} =$$

$$= \Phi\left(c_1^N(t), \ldots, c_N^N(t)\right), \quad k = \overline{1,N},$$

та умов

$$c_k^N(0) = \int_{\Omega^*} \left[\left(H(x) u_0^*, \varphi^{*,k}(x)\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x) u_{0x_i}^*, \varphi_{x_j}^{*,k}(x)\right) \right] dx.$$

Домножимо кожне з рівнянь системи (10) на $\left(c_k^N(t) + \left(c_k^N\right)'(t)\right) e^{-\mu t}$, $\mu > 0$, підсумуємо ці рівняння по k та проінтегруємо по відрізку $[0, T]$. Отримаємо

$$\int_{Q_T^*} \left[\left(H(x) u_t^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x) u_{x_i t}^{*,N}, u_{x_j t}^{*,N} + u_{x_j}^{*,N}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{ij}(x,t) u_{x_i}^{*,N}, u_{x_j t}^{*,N} + u_{x_j}^{*,N}\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(C_i(x,t) u_{x_i}^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) +$$

$$\left. + \left(D(x,t) u^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) \right] e^{-\mu t} dx\,dt = \int_{Q_T^*} \left(F^*(x,t), u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) e^{-\mu t} dx\,dt. \tag{11}$$

З оцінок

$$I_4 = -\int_{Q_T^*} \sum_{i=1}^{n} \left(C_i(x,t) u_{x_i}^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) e^{-\mu t} dx\,dt \geq$$

$$\geq -\int_{Q_T^*} \left[\delta_2 \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}^{*,N}\right|^2 + \frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_2} \left(\left|u_t^{*,N}\right|^2 + \left|u^{*,N}\right|^2\right) \right] e^{-\mu t} dx\,dt,$$

$$I_5 = \int_{Q_T^*} \left(F^*(x,t), u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) e^{-\mu t} dx\,dt \leq$$

$$\leq \int_{Q_T^*} \left[\frac{\left|F^*(x,t)\right|^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\left|u_t^{*,N}\right|^2 + \left|u^{*,N}\right|^2\right) \right] e^{-\mu t} dx\,dt$$

та рівності (11) маємо

$$\int\limits_{\Omega_T^*}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(A_{ij}(x)+B_{ij}(x,T)\right)u_{x_i}^{*,N},\ u_{x_j}^{*,N}\right)+\left(\left(H(x)+D(x,T)\right)u^{*,N},\ u^{*,N}\right)\right]\frac{e^{-\mu t}}{2}dx\ -$$

$$-\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^*}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(A_{ij}(x)+B_{ij}(x,0)\right)u_{x_i}^{*,N},\ u_{x_j}^{*,N}\right)+\left(\left(H(x)+D(x,0)\right)u^{*,N},\ u^{*,N}\right)\right]dx\ +$$

$$+\int\limits_{Q_T^*}\left[\left(h(x)-\frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left|u_t^{*,N}\right|^2+a_0\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_it}^{*,N}\right|^2\ +\right.$$

$$+\left(d(x)-\frac{d^1(x)}{2}+\frac{\mu}{2}(h(x)+d(x))-\frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left|u^{*,N}\right|^2\ +$$

$$\left.+\left(b_0+\frac{\mu}{2}(a_0+b_0)-\delta_2\right)\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{*,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}\,dx\,dt\ \le\ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_T^*}\left|F^*(x,t)\right|^2e^{-\mu t}\,dx\,dt,$$

звідки випливає оцінка

$$\left\|u^{*,N}\right\|_{H^1\left((0,T);\,H^1(\Omega^*)\right)}\ \le\ M.$$

Тобто існують такі послідовність $\{u^{*,N_k}\}$ і функція u^*, що $u^{*,N_k}\to u^*$ — слабко в $H^1\left((0,T);H^1(\Omega^*)\right)$. Легко бачити, що ця функція u^* і є розв'язком задачі (7) – (9).

Розглянемо тепер послідовність $Q_T^\tau = \Omega^T\times(0,T)$, $\tau\in N$. В кожній з них існує розв'язок u^τ. Продовжимо його нулем на Q_T. Тоді для довільної функції $v\in C_0^\infty(Q_T)$ та для функції $\psi(x)$, яка задовольняє умови теореми, правильною є така рівність:

$$\int\limits_{Q_T}\left[\left(H(x)u_t^\tau,v\psi\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)u_{x_i,t}^\tau,(v\psi)_{x_j}\right)\ +\right.$$

$$+\ \sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,t)u_{x_i}^\tau,(v\psi)_{x_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(C_i(x,t)u_{x_i}^\tau,v\psi\right)\ +$$

$$\left.+\ \left(D(x,t)u^\tau,v\psi\right)\right]e^{-\mu t}dxdt\ =\ \int\limits_{Q_T}\left(F^\tau(x,t),v\psi\right)e^{-\mu t}dxdt.$$

Нехай $v = u_t^\tau + u^\tau$. З оцінок, аналогічних до наведених в попередній теоремі, випливає

$$\int\limits_{\Omega_T}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(A_{ij}(x)+B(x,T)\right)u_{x_i}^\tau,u_{x_j}^\tau\right)+\left(\left(H(x)+D(x,T)\right)u^\tau,u^\tau\right)\right]\psi(x)\frac{e^{-\mu T}}{2}dx\ -$$

$$-\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left[\left(a^0+b^0\right)\sum_{i=1}^{n}\left|u_{0x_i}^\tau\right|^2+\theta(h(x)+d(x))\left|u_0^\tau\right|^2\right]\psi(x)dx\ +$$

$$+\int\limits_{Q_T}\left[\left(a_0-n\hat{A}(x)\delta_3\right)\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_it}^\tau\right|^2+\left(b_0-\frac{b^1}{2}+\frac{\mu}{2}(a_0+b_0)-n\hat{B}(x)\delta_3-\delta_4\right)\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^\tau\right|^2+\right.$$

$$+\left(d(x)-\frac{d^1(x)}{2}+\frac{\mu}{2}(h(x)+d(x))-\frac{n\left(\hat{A}(x)+\hat{B}(x)\right)}{2\delta_3}\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)}-\frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left|u^\tau\right|^2+$$

$$+\left(h(x)-\frac{n\left(\hat{A}(x)+\hat{B}(x)\right)}{2\delta_3}\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_{x_i}^2(x)}{\psi^2(x)}-\frac{n\hat{C}(x)}{2\delta_4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left|u_t^\tau\right|^2\Bigg]\psi(x)e^{-\mu t}dxdt \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_T}\left|F^\tau(x,t)\right|^2\psi(x)e^{-\mu t}dxdt,$$

де сталі a^0 та b^0 визначаються матрицями A_{ij} та B_{ij}. Враховуючи умови теореми, що накладаються на функції F та u_0, отримуємо, що послідовність $\{u^\tau\}$ обмежена за нормою простору $V_{h,d,\psi}(Q_T)$. Вибираємо з цієї послідовності слабко збіжну до деякої функції u в просторі $V_{h,d,\psi}(Q_T)$ підпослідовність $\{u^{\tau_k}\}$. Знайдена функція u і є розв'язком вихідної задачі. Теорему доведено.

Зауважимо, що існують такі функції ψ, для яких умова (5) виконується автоматично. Як приклад можна навести функцію

$$\psi(x) = \begin{cases}\alpha = \mathrm{const} > 0 & \text{при } |x| \le \alpha^{1/\gamma};\\ |x|^\gamma & \text{при } |x| > \alpha^{1/\gamma},\end{cases}$$

де $\gamma \in R$.

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
2. *Showalter R. E.* Pseudoparabolic partial differential equations: Doct. diss. Univ. Ill. – 1968. – 75 p. // Dissert. Abstrs. – 1969. – **B29**, № 8. – P. 2994.
3. *Showalter R. E.* Partial differential equations of Sobolew – Galperin type // Pacif. J. Math. – 1969. – **31**, № 3. – P. 787 – 793.
4. *Ляшко С. І.* Аналог методу Гальоркіна для розв'язання псевдопараболічних рівнянь // Допов. АН УРСР. – 1991. – № 8. – С. 54 – 55.
5. *Ляшко И. И., Ляшко С. И., Томашевская Т. В.* Приближенный метод решения псевдопараболических уравнений // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 9. – С. 56 – 58.
6. *Колінько М. О., Лавренюк С. П.* Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 71 – 77.
7. *Бас М. О., Лавренюк С. П.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва – Гальперіна // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 124 – 128.
8. *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* Псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Там же. – 1998. – **50**, № 7. – С. 919 – 929.
9. *Rundell W.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – **76**, № 2. – P. 253 – 257.
10. *Хилькевич Г. И.* Аналог принципа Сен-Венана, задача Коши и первая краевая задача в неограниченной области для псевдопараболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 3. – С. 229 – 230.
11. *Хилькевич Г. И.* О поведении решений псевдопараболических уравнений в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности // Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – С. 170 – 175.

Одержано 06.03.2000