УДК 512.946

И. М. Колодий, И. И. Верба (Львов. ун-т)

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

We study parabolic equations of the divergent form with degeneration $\lambda(x)$ with respect to a space variable. We establish a priori estimate of the Hölder norm of generalized solutions. The investigations are performed in parabolic cylinders of special dimension in time variable induced by the degeneration $\lambda(x)$.

Вивчаються параболічні рівняння дивергентного вигляду з виродженням $\lambda(x)$ за просторовою змінною. Встановлено апріорну оцінку норми Гельдера узагальнених розв'язків. Дослідження проводяться в параболічних циліндрах, які мають спеціальну розмірність за часовою змінною, індуковану виродженням $\lambda(x)$.

В настоящей работе изучаются параболические уравнения вида

$$\begin{gathered} u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, u_x) = B(x, t, u, u_x), \\ x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}), \\ A(x, t, u, u_x) = (A_1(x, t, u, u_x), \ldots, A_n(x, t, u, u_x)), \end{gathered} \tag{1}$$

в цилиндре $Q = \Omega \times (-T; 0)$, где Ω — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E_n, $n \geq 2$, а $T > 0$. Вектор-функция $A(x, t, u, \overline{p})$ и скалярная функция $B(x, t, u, \overline{p})$ определены и измеримы для всех $(x, t) \in Q$, $u \in E_1$ и $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in E_n$. Предполагается, что $A(x, t, u, \overline{p})$ и $B(x, t, u, \overline{p})$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} A(x, t, u, \overline{p})\overline{p} \geq a_1\lambda(x)|\overline{p}|^2 - d(x, t)|u|^2 - g(x, t), \\ |A(x, t, u, \overline{p})| \leq a_2\lambda(x)|\overline{p}| + c(x, t)|u| + e(x, t), \\ |B(x, t, u, \overline{p})| \leq b_0\lambda(x)|\overline{p}|^2 + b(x, t)|\overline{p}| + h(x, t)|u| + f(x, t), \end{gathered} \tag{2}$$

где a_1, a_2, b_0 — константы, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_0 \geq 0$ (в случае $b_0 > 0$ предполагаем, что $u \in [-M_0, M_0]$, где M_0 — положительная константа), а $\lambda(x)$, $d(x, t)$, $g(x, t)$, $c(x, t)$, $e(x, t)$, $b(x, t)$, $h(x, t)$, $f(x, t)$ — неотрицательные функции.

Всюду в данной работе будем считать,что неотрицательная функция $\lambda(x)$, характеризующая вырождение уравнения, такова, что

$$\lambda^{-1}(x) \in L_t(\Omega), \qquad \lambda(x) \in L_s(\Omega), \qquad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} < \frac{2}{n}, \tag{3}$$

а функции

$$\begin{gathered} \left(\frac{d(x, t)}{\lambda(x)}\right)^{p'} \lambda(x), \ \left(\frac{g(x, t)}{\lambda(x)}\right)^{p'} \lambda(x), \ \left(\frac{c^2(x, t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'} \lambda(x), \\ \left(\frac{e^2(x, t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'} \lambda(x), \ \left(\frac{b^2(x, t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'} \lambda(x), \ \left(\frac{h(x, t)}{\lambda(x)}\right)^{p'} \lambda(x), \ \left(\frac{f(x, t)}{\lambda(x)}\right)^{p'} \lambda(x) \end{gathered} \tag{4}$$

принадлежат $L_1(Q)$, где число p' (сопряженное с числом p) удовлетворяет неравенству

$$p' > 1 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right)^{-1}.$$

При этих предположениях установлена локальная оценка максимума модуля обобщенного решения, а также непрерывность по Гельдеру обобщенных решений. Исследования проводятся в параболических цилиндрах, имеющих специальную размерность по временной переменной, связанную с вырождением $\lambda(x)$.

При доказательстве используется известная методика Ю. Мозера [1, 2], развитая впоследствии в работах С. Н. Кружкова [3 – 5], Д. Аронсона и Дж. Серрина [6], Н. Трудингера [7, 8], Ф. Чиарензы и Р. Серапиони [9, 10]. В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в работах [11 – 14]. Заметим, что условие (3) впервые приведено в работах С. Н. Кружкова [3, 4].

1. Функциональные пространства. Основные определения и предложения. Обозначим через Ω ограниченную область в n-мерном евклидовом пространстве E_n векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$, через Ω^δ множество точек Ω, расстояние от которых до границы области Ω не меньше $\delta > 0$. Для шаров $(x \in E_n : |x| < r)$, $(x \in E_n : |x - x_0| < r)$ введем обозначения K_r и $K_r(x_0)$. В пространстве E_{n+1} векторов $(t, x_1, \ldots, x_n)$ через Q, $Q_r^{t_0, t_1}$, $Q_r^{\mathfrak{f}(r)}$, $Q_{\beta r}^{\omega\mathfrak{f}(r)}$ будем обозначать соответственно цилиндры $\Omega \times (-T, 0)$, $K_r \times (t_0, t_1)$, $K_r \times \times (-\mathfrak{f}(r), 0)$, $K_{\beta r} \times (-\omega\mathfrak{f}(r), 0)$, где $\mathfrak{f}(r)$ — неотрицательная, строго монотонно возрастающая функция, а β и ω — положительные константы (заметим, что отрицательные значения переменной t используются лишь для удобства).

Символы $C^\infty(\Omega)$, $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $W_p^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ будем употреблять в общепринятом смысле для обозначения функциональных пространств.

Символами $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\lambda, \Omega)$ и $W_2^1(\lambda, \Omega)$ будем обозначать подмножества функций $u(x)$ соответственно в $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ и $W_1^1(\Omega)$, для которых конечны соответственно величины

$$\int_\Omega \lambda(x) u_x^2\, dx, \qquad \int_\Omega \left(\lambda(x) u_x^2 + |u|\right) dx.$$

Через $W_2^{1,1}(\lambda, Q)$ обозначим подмножество функций $u(x, t) \in W_1^{1,1}(Q)$, для которых конечна величина

$$\iint_Q \left(u^2 + u_t^2 + \lambda(x) u_x^2\right) dx\, dt.$$

Через $\overset{[0]}{V}{}_2(\lambda, Q)$ и $V_2(\lambda, Q)_0$ обозначим подмножества функций $u(x, t)$, принадлежащих $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ при $t \in (-T, 0)$ и $W_1^1(\Omega)$ при $t \in (-T, 0)$ соответственно, для которых конечна величина

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in (-T, 0)} \int_\Omega u^2\, dx + \iint_Q \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt.$$

Заметим, что справедлива элементарная оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in (-T, 0)} \int_\Omega u^2\, dx \leq \frac{2}{T} \iint_Q u^2\, dx\, dt + 2T \iint_Q u_t^2\, dx\, dt.$$

Следовательно, $W_2^{1,1}(\lambda, Q) \subset V_2(\lambda, Q)$.

Определение. *Обобщенным решением уравнения* (1) *при условиях* (2) – (4) *в цилиндре* Q *называется функция* $u(x, t) \in W_2^{1,1}(\lambda, Q)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\iint\limits_{Q} (\varphi u_t + A\varphi_x - B\varphi)\,dx\,dt = 0 \tag{5}$$

при любой (ограниченной, если $b_0 > 0$*) функции* $\varphi(x,t) \in \overset{|0|}{V_2}(\lambda, Q)$ *с компактным носителем по* $t \in (-T, 0)$.

Отметим, что условия (2) – (4) вместе с приведенной ниже леммой 2 обеспечивают существование интегралов в интегральном тождестве (5).

Через C будем обозначать различные константы, зависящие лишь от структуры уравнения (1), т. е. от n, a_1, a_2, b_0, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, p, норм функций $\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)$, $\lambda^{\mathfrak{s}}(x)$ в $L_1(\Omega)$ и норм функций

$$\left(\frac{d(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{p'}\lambda(x),\ \left(\frac{g(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{p'}\lambda(x),\ \left(\frac{c^2(x,t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'}\lambda(x),$$

$$\left(\frac{e^2(x,t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'}\lambda(x),\ \left(\frac{b^2(x,t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'}\lambda(x),\ \left(\frac{h(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{p'}\lambda(x),\ \left(\frac{f(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{p'}\lambda(x) \text{ в } L_1(Q),$$

но не зависящие от $u(x,t)$.

Положим

$$H(r) = M(r)P(r) = \left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda^{\mathfrak{s}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{s}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{t}}.$$

Отметим,что функция $H(r)$ ограничена снизу константой $C = (\operatorname{mes} K_1)^{1/\mathfrak{s}+1/\mathfrak{t}}$, так как согласно неравенству Гельдера

$$H(r) = \left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda^{\mathfrak{s}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{s}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{t}} \geq$$

$$\geq (\operatorname{mes} K_1)^{1/\mathfrak{s}-1}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda(x)\,dx\right)(\operatorname{mes} K_1)^{1/\mathfrak{t}+1}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda(x)\,dx\right)^{-1} =$$

$$= (\operatorname{mes} K_1)^{1/\mathfrak{s}+1/\mathfrak{t}}.$$

Нам понадобится следующая лемма [4, с. 553, 554].

Лемма 1. *Пусть в шаре* K_r *функция* $\lambda(x) \geq 0$, $\lambda(x) \in L_{\mathfrak{s}}(K_r)$, $\lambda^{-1}(x) \in L_{\mathfrak{t}}(K_r)$, $1/\mathfrak{s} + 1/\mathfrak{t} < 2/n$. *Пусть, далее,* $u(x) \in W_2^1(\lambda, K_r)$, *множество* $N \subseteq K_r$ *и* $\operatorname{mes} N \geq C_0 r^n$, *где константа* $C_0 > 0$.

Тогда

$$\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda(x)u^{2k}\,dx\right)^{1/k} \leq CM^{1/k}(r)\left(P(r)r^{-2n}\int\limits_{K_r}\lambda(x)u_x^2\,dx + \left(r^{-n}\int\limits_{N}|u|\,dx\right)^2\right), \tag{6}$$

где

$$1 \leq k \leq 1 + \frac{2/n - 1/\mathfrak{s} - 1/\mathfrak{t}}{1 + 1/\mathfrak{t} - 2/n},\quad C = C(C_0, n),\quad \text{если } n \geq 3;$$

$$1 \leq k \leq 1 + \frac{2/n - 1/\mathfrak{s} - 1/\mathfrak{t}}{1 + 1/\mathfrak{t} - 2/n},\quad C = C(C_0, \mathfrak{t}),\quad \text{если } n = 2 \text{ и } 1 \leq \mathfrak{t} < \infty;$$

k — *любое число* ≥ 1, $C(C_0, k, \mathfrak{s})$, *если* $n = 2$ *и* $\mathfrak{t} = \infty$,

$$\left(r^{-n} \int\limits_{K_r} u^{2\tilde{k}}\, dx\right)^{1/\tilde{k}} \leq C\left(P(r) r^{2-n} \int\limits_{K_r} \lambda(x) u_x^2\, dx + \left(r^{-n} \int\limits_{N} |u|\, dx\right)^2\right), \tag{7}$$

где

$$1 \leq \tilde{k} \leq 1 + \frac{2/n - 1/\mathfrak{t}}{1 + 1/\mathfrak{t} - 2/n}, \quad C = C(C_0, n), \quad \text{если } n \geq 3;$$

$$1 \leq \tilde{k} \leq 1 + \frac{2/n - 1/\mathfrak{t}}{1 + 1/\mathfrak{t} - 2/n}, \quad C = C(C_0, \mathfrak{t}), \quad \text{если } n = 2 \text{ и } 1 \leq \mathfrak{t} < \infty;$$

$\tilde{k}$ — *любое число* ≥ 1, $C(C_0, \tilde{k})$, *если* $n = 2$ *и* $\mathfrak{t} = \infty$,

Если $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_1^2(\lambda, K_r)$, *то интегралы по множеству* N *в правых частях* (6) *и* (7) *следует опустить.*

Из леммы вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть в шаре* K_r *функция* $\lambda(x) \geq 0$, $\lambda(x) \in L_{\mathfrak{s}}(K_r)$, $\lambda^{-1}(x) \in L_{\mathfrak{t}}(K_r)$, $1/\mathfrak{s} + 1/\mathfrak{t} < 2/n$. *Пусть, далее,* $u(x,t) \in V_2\left(\lambda, Q_r^{t_0, t_1}\right)$, *множество* $N \subseteq K_r$ *и* $\operatorname{mes} N \geq C_0 r^n$, *где константа* $C_0 > 0$.

Тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{r^n (t_1 - t_0) M(r)} \iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} \lambda(x) u^{2q}\, dx\, dt \leq C\left(H(r) \frac{r^2}{r^n (t_1 - t_0) M(r)} \iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (t_0, t_1)} \frac{1}{r^n} \int\limits_{N} u^2\, dx\right)\left(\operatorname*{vrai\,max}_{t \in (t_0, t_1)} \frac{1}{r^n} \int\limits_{K_r} u^2\, dx\right)^{q-1}, \tag{8}$$

где

$$1 \leq q \leq 1 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{\mathfrak{s}} - \frac{1}{\mathfrak{t}}\right), \quad C = C(C_0, n), \quad \text{если } n \geq 3;$$

$$1 \leq q \leq 1 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{\mathfrak{s}} - \frac{1}{\mathfrak{t}}\right), \quad C = C(C_0, \mathfrak{t}), \quad \text{если } n = 2 \text{ и } 1 \leq \mathfrak{t} < \infty;$$

$$1 \leq q < 2 - \frac{1}{\mathfrak{s}}, \quad C = C(C_0, q, \mathfrak{s}), \quad \text{если } n = 2 \text{ и } \mathfrak{t} = \infty,$$

$$\frac{1}{r^n (t_1 - t_0)} \iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} u^{2l}\, dx\, dt \leq C\left(H(r) \frac{r^2}{r^n (t_1 - t_0) M(r)} \iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (t_0, t_1)} \frac{1}{r^n} \int\limits_{N} u^2\, dx\right)\left(\operatorname*{vrai\,max}_{t \in (t_0, t_1)} \frac{1}{r^n} \int\limits_{K_r} u^2\, dx\right)^{l-1}, \tag{9}$$

где

$$1 \leq l \leq 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{\mathfrak{t}}, \quad C = C(C_0, n), \quad \text{если } n \geq 3;$$

$$1 \leq l \leq 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{\mathfrak{t}}, \quad C = C(C_0, \mathfrak{t}), \quad \text{если } n = 2 \text{ и } 1 \leq \mathfrak{t} < \infty;$$

$$1 \leq l < 2, \quad C = C(C_0, l), \quad \text{если } n = 2 \text{ и } \mathfrak{t} = \infty.$$

Если $u(x,t) \in \overset{|0|}{V}_2\left(\lambda, Q_r^{t_0,t_1}\right)$, *то в оценках* (8) *и* (9) *следует опустить интегралы по множеству* N.

Доказательство. Докажем неравенство (8). Согласно неравенству Гельдера

$$r^{-n}\int_{K_r}\lambda(x)u^{2q}\,dx = r^{-n}\int_{K_r}\lambda^{1/k}(x)u^2u^{2q-2}\lambda^{(k-1)/k}(x)\,dx \le$$

$$\le \left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda(x)u^{2k}\,dx\right)^{1/k}\left(r^{-n}\int_{K_r}u^{2(q-1)k/(k-1)}\lambda(x)\,dx\right)^{(k-1)/k} \le$$

$$\le \left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda(x)u^{2k}\,dx\right)^{1/k}\left(r^{-n}\int_{K_r}u^{2(q-1)k\mathfrak{s}/(k-1)(\mathfrak{s}-1)}\,dx\right)^{(k-1)(\mathfrak{s}-1)/k\mathfrak{s}} \times$$

$$\times\left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda^{\mathfrak{s}}(x)\,dx\right)^{(k-1)/\mathfrak{s}k}.$$

Выберем число q так, чтобы $(q-1)k\mathfrak{s}/(k-1)(\mathfrak{s}-1) = 1$. Следовательно, $q = 1 + (k-1)(\mathfrak{s}-1)/k\mathfrak{s}$, где число k взято из леммы 1. Учитывая выбор k и условие $1/\mathfrak{s} + 1/\mathfrak{t} < 2/n$, имеем $1 \le q \le 1 + (2/n - 1/\mathfrak{s} - 1/\mathfrak{t})$. Итак,

$$r^{-n}\int_{K_r}\lambda(x)u^{2q}\,dx \le \left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda(x)u^{2k}\,dx\right)^{1/k}\left(r^{-n}\int_{K_r}u^2\,dx\right)^{q-1} M^{(k-1)/k}(r).$$

В правой части этого неравенства воспользуемся оценкой (6). Тогда получим

$$r^{-n}\int_{K_r}\lambda(x)u^{2q}\,dx \le CM^{1/k}(r)\left(P(r)r^{2-n}\int_{K_r}\lambda(x)u_x^2\,dx + r^{-n}\int_N u^2\,dx\right)\times$$

$$\times\left(r^{-n}\int_{K_r}u^2\,dx\right)^{q-1} M^{(k-1)/k}(r) =$$

$$= CM(r)\left(P(r)r^{2-n}\int_{K_r}\lambda(x)u_x^2\,dx + r^{-n}\int_N u^2\,dx\right)\left(r^{-n}\int_{K_r}u^2\,dx\right)^{q-1} \le$$

$$\le C\left(H(r)r^{2-n}\int_{K_r}\lambda(x)u_x^2\,dx + M(r)\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(t_0,t_1)} r^{-n}\int_N u^2\,dx\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(t_0,t_1)} r^{-n}\int_{K_r}u^2\,dx\right)^{q-1}.$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства по t от t_0 до t_1 и разделив полученное неравенство на $(t_1-t_0)M(r)$, получим (8).

Докажем теперь неравенство (9). В силу неравенства Гельдера имеем

$$r^{-n}\int\limits_{K_r} u^{2l}\,dx = r^{-n}\int\limits_{K_r} u^2 u^{2(l-1)}\,dx \le$$

$$\le \left(r^{-n}\int\limits_{K_r} u^{2\tilde{k}}\,dx\right)^{1/\tilde{k}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r} u^{2(l-1)\tilde{k}/(\tilde{k}-1)}\,dx\right)^{(\tilde{k}-1)/\tilde{k}}.$$

Выберем число l так, чтобы $(l-1)\tilde{k}/(\tilde{k}-1) = 1$, где число $\tilde{k}$ берется из леммы 1. Учитывая выбор $\tilde{k}$ и условие $1/\mathfrak{s} + 1/\mathfrak{t} < 2/n$, имеем $1 \le l \le 1 + 2/n - 1/\mathfrak{t}$. Итак,

$$r^{-n}\int\limits_{K_r} u^{2l}\,dx \le \left(r^{-n}\int\limits_{K_r} u^{2\tilde{k}}\,dx\right)^{1/\tilde{k}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r} u^2\,dx\right)^{l-1}.$$

В правой части этого неравенства воспользуемся оценкой (7). Тогда получим

$$r^{-n}\int\limits_{K_r} u^{2l}\,dx \le C\left(P(r)r^{2-n}\int\limits_{K_r}\lambda(x)u_x^2\,dx + r^{-n}\int\limits_{N} u^2\,dx\right)\left(r^{-n}\int\limits_{K_r} u^2\,dx\right)^{l-1} \le$$

$$\le C\left(H(r)\frac{1}{M(r)}r^{2-n}\int\limits_{K_r}\lambda(x)u_x^2\,dx + \operatorname*{vrai\,max}_{t\in(t_0,t_1)} r^{-n}\int\limits_{N} u^2\,dx\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(t_0,t_1)} r^{-n}\int\limits_{K_r} u^2\,dx\right)^{l-1}.$$

Проинтегрировав это неравенство по t от t_0 до t_1 и разделив полученное неравенство на $t_1 - t_0$, получим (9).

Вместо цилиндров $Q_r^{t_0,t_1} = K_r\times(t_0,t_1)$ далее будем рассматривать цилиндры $Q_r^{\mathfrak{f}(r)} = K_r\times(-\mathfrak{f}(r),0)$, где $\mathfrak{f}(r)$ — неотрицательная, строго монотонно возрастающая функция, которая выбирается следующим образом:

$$\mathfrak{f}(r) = r^{2-n/\mathfrak{t}}\left(\int\limits_{K_r}\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{t}} = r^2\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{t}} = r^2P(r). \tag{10}$$

Нам понадобятся свойства этой функции, которые следуют из (10) и неравенства Гельдера.

Свойство 1. Существуют постоянные

$$C_1 = (\operatorname{mes} K_1)^{1/\mathfrak{s}+1/\mathfrak{t}}\left(\int\limits_{\Omega}\lambda^{\mathfrak{s}}(x)\,dx\right)^{-1/\mathfrak{s}},$$

$$C_2 = \left(\int\limits_{\Omega}\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{t}}$$

такие, что

$$C_1 r^{2+n/\mathfrak{s}} \le \mathfrak{f}(r) \le C_2 r^{2-n/\mathfrak{t}}. \tag{11}$$

Свойство 2. Существуют постоянные

$$C_3 = \left(\operatorname{mes} K_1\right)^{(\mathfrak{t}+1)/\mathfrak{t}}, \quad C_4 = \left(\operatorname{mes} K_1\right)^{(\mathfrak{s}-1)/\mathfrak{s}}$$

такие, что

$$C_3 r^{n+2} \le \lambda\left(Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right) \le C_4 H(r) r^{n+2}, \tag{12}$$

где

$$\lambda\left(Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right) = \int_{-\mathfrak{f}(r)}^{0} \int_{K_r} \lambda(x)\,dx\,dt = \mathfrak{f}(r) \int_{K_r} \lambda(x)\,dx.$$

Свойство 3. Для любого числа $\theta \in (0, 1)$ существует константа $C = \left(\operatorname{mes} K_1\right)^{1/\mathfrak{s}+1/\mathfrak{t}}$ такая, что

$$\frac{C}{H(r)} \theta^{2+n/\mathfrak{s}} \le \frac{\mathfrak{f}(\theta r)}{\mathfrak{f}(r)} \le \theta^{2-n/\mathfrak{t}}. \tag{13}$$

***Замечание* 1.** Если в неравенстве (13) положить $\theta r = \rho$, $r = \rho + \sigma$, $\sigma > 0$, $\rho > 0$, то оно примет вид

$$\frac{C}{H(\rho+\sigma)} \left(\frac{\rho}{\rho+\sigma}\right)^{2+n/\mathfrak{s}} \le \frac{\mathfrak{f}(\rho)}{\mathfrak{f}(\rho+\sigma)} \le \left(\frac{\rho}{\rho+\sigma}\right)^{2-n/\mathfrak{t}}. \tag{14}$$

Свойство 4. Существует постоянная $C = (2 - n/\mathfrak{t}) / 2^{|n/\mathfrak{t}-1|} > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in [0; 1]$ справедлива оценка

$$\mathfrak{f}((1+\varepsilon)r) - \mathfrak{f}(r) \ge C\varepsilon \mathfrak{f}(r). \tag{15}$$

***Замечание* 2.** Если в (15) положить $(1+\varepsilon)r = \rho + \sigma$, $r = \rho$, $\rho > 0$, $\sigma > 0$, то с учетом (14) получим неравенство

$$\frac{1}{\mathfrak{f}(\rho+\sigma) - \mathfrak{f}(\rho)} \le C H(\rho+\sigma) \left(1 + \frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{\rho}\right)^{2+n/\mathfrak{s}} \frac{1}{\mathfrak{f}(\rho+\sigma)}. \tag{16}$$

Отметим теперь ряд следствий из леммы 2.

***Следствие* 1.** *Неравенство* (8) *для* $u(x,t) \in \overset{|0|}{V_2}\left(\lambda, Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right)$ *с учетом неравенства Юнга имеет вид*

$$\left(r^{-n-2} \iint_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u^{2q}\,dx\,dt\right)^{1/q} \le C H^{1/q}(r) \left(r^{-n} \iint_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u_x^2\,dx\,dt + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (-\mathfrak{f}(r), 0)} r^{-n} \int_{K_r} u^2\,dx\right). \tag{17}$$

***Следствие* 2.** *Поскольку* $\min(q, l) = q$, *то неравенства* (8) *и* (9) *имеют место с минимальным показателем* q. *Положим также в* (8) *и* (9) $t_0 = -\mathfrak{f}(r) = -r^2 P(r)$, $t_1 = 0$, $t_1 - t_0 = \mathfrak{f}(r) = r^2 P(r)$, $N = K_r$. *Тогда, принимая во внимание неравенство Юнга, получаем два неравенства*

$$\left(\frac{1}{r^{n+2} H(r)} \iint_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u^{2q}\,dx\,dt\right)^{1/q} \le C\left(\frac{1}{r^n} \iint_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u_x^2\,dx\,dt + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (-\mathfrak{f}(r), 0)} \frac{1}{r^n} \int_{K_r} u^2\,dx\right), \tag{18}$$

$$\left(\frac{1}{r^n \mathfrak{f}(r)} \iint\limits_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} u^{2q}\, dx\, dt\right)^{1/q} \le C\left(\frac{1}{r^n} \iint\limits_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (-\mathfrak{f}(r),\, 0)} \frac{1}{r^n} \int\limits_{K_r} u^2\, dx\right). \tag{19}$$

В неравенстве (18) величину $H^{1/q}(r)$ перенесем вправо, а в левой части воспользуемся оценкой (12); заметим, что в неравенстве (19) $Cr^n \mathfrak{f}(r) = \left|Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right|$. Тогда в результате сложения этих неравенств получаем оценку

$$\left(\frac{1}{\lambda\left(Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right)} \iint\limits_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u^{2q}\, dx\, dt\right)^{1/q} + \left(\frac{1}{\left|Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right|} \iint\limits_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} u^{2q}\, dx\, dt\right)^{1/q} \le$$

$$\le C(1 + H(r))\left(\frac{1}{r^n} \iint\limits_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt + \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (-\mathfrak{f}(r),\, 0)} \frac{1}{r^n} \int\limits_{K_r} u^2\, dx\right). \tag{20}$$

Здесь учтено также то, что $H^{1/q}(r) \le (1 + H(r))^{1/q} \le 1 + H(r)$.

***Следствие* 3.** *Пусть в неравенствах* (8) *и* (9) $q = l = 1$, $\int_N u^2\, dx = 0$. *Тогда*

$$\iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} \lambda(x) u^2\, dx\, dt \le CH(r) r^2 \iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt,$$

$$\iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} u^2 dx\, dt \le CH(r) \frac{r^2}{M(r)} \iint\limits_{Q_r^{t_0, t_1}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt.$$

Заменим основание цилиндра K_r на $K_{\beta r}$ и затем положим $t_0 = -\omega \mathfrak{f}(r)$, $t_1 = 0$, где β и ω — положительные константы. Тогда последние неравенства примут вид

$$\iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega \mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u^2\, dx\, dt \le CH(\beta r)(\beta r)^2 \iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega \mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt,$$

$$\iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega \mathfrak{f}(r)}} u^2 dx\, dt \le CH(\beta r) \frac{(\beta r)^2}{M(\beta r)} \iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega \mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) u_x^2\, dx\, dt.$$

Первое из этих неравенств разделим на $\lambda\left(Q_{\beta r}^{\omega \mathfrak{f}(r)}\right)$, а второе — на $\left|Q_{\beta r}^{\omega \mathfrak{f}(r)}\right|$ и во втором неравенстве учтем оценку

$$\omega \mathfrak{f}(r) \operatorname{mes} K_{\beta r} M(\beta r) = \omega \mathfrak{f}(r) \operatorname{mes} K_{\beta r} \left(\frac{1}{(\beta r)^n} \int\limits_{K_{\beta r}} \lambda^{\vartheta}(x) u_x^2\, dx\right)^{1/\vartheta} \ge$$

$$\ge \omega \mathfrak{f}(r) \operatorname{mes} K_{\beta r} \frac{C}{(\beta r)^n} \int\limits_{K_{\beta r}} \lambda(x)\, dx = C \int\limits_{-\omega \mathfrak{f}(r)}^{0} \int\limits_{K_{\beta r}} \lambda(x)\, dx\, dt = C \lambda\left(Q_{\beta r}^{\omega \mathfrak{f}(r)}\right).$$

Тогда, суммируя два последних неравенства, получаем

$$\frac{1}{\lambda\left(Q_{\beta r}^{\omega f(r)}\right)}\iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega f(r)}}\lambda(x)u^2\,dx\,dt+\frac{1}{\left|Q_{\beta r}^{\omega f(r)}\right|}\iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega f(r)}}u^2\,dx\,dt\le$$

$$\le CH(\beta r)\frac{(\beta r)^2}{\lambda\left(Q_{\beta r}^{\omega f(r)}\right)}\iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega f(r)}}\lambda(x)u_x^2\,dx\,dt. \tag{21}$$

Нам также понадобится в дальнейшем локальная оценка максимума модуля обобщенного решения уравнения (1) при условиях (2), в которых $b_0=0$. Положим

$$F(r)=r^{2-(n/\mathfrak{s}+n/\mathfrak{t})/p-(n+2)/p'}\left(\left(\int\limits_{K_{3r}}\lambda^{\mathfrak{s}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{s}}\left(\int\limits_{K_{3r}}\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{t}}\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\left(\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\left(\frac{b^2(x,t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'}\lambda(x)\,dx\,dt\right)^{1/p'}+\left(\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\left(\frac{c^2(x,t)}{\lambda^2(x)}\right)^{p'}\lambda(x)\,dx\,dt\right)^{1/p'}+\right.$$

$$\left.+\left(\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\left(\frac{h(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{p'}\lambda(x)\,dx\,dt\right)^{1/p'}+\left(\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\left(\frac{d(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{p'}\lambda(x)\,dx\,dt\right)^{1/p'}+1\right),$$

$$\kappa(r)=r^2\left(r^{-n-2}\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\left(\frac{f(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{p'}\lambda(x)\,dx\,dt\right)^{1/p'}+$$

$$+\left(r^2\left(r^{-n-2}\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\left(\frac{g(x,t)}{\lambda(x)}\right)^{1/p'}\lambda(x)\,dx\,dt\right)^{1/p'}\right)^{1/2}+$$

$$+\left(r^2\left(r^{-n-2}\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\left(\frac{e^2(x,t)}{\lambda^2(x)}\right)^{1/p'}\lambda(x)\,dx\,dt\right)^{1/p'}\right)^{1/2}.$$

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t)$ — *обобщенное решение* (1) – (3) *с* $b_0=0$ *в* $Q_{3r}^{f(3r)}\subset Q$ *и* r — *достаточно мало, т. е. таково, что при* $r\le r_1$ $F(r)<\varepsilon$, *где* $\varepsilon>0$ — *наперед заданное число. Тогда имеет место оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_r^{f(r)}}u^2(x,t)\le C(1+H(r))^{2q/(q-p)}\left(\frac{1}{\lambda\left(Q_{3r}^{f(3r)}\right)}\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}\lambda(x)u^2\,dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left|Q_{3r}^{f(3r)}\right|}\iint\limits_{Q_{3r}^{f(3r)}}u^2\,dx\,dt+\kappa^2(r)\right), \tag{22}$$

где $q=1+2/n-1/\mathfrak{s}-1/\mathfrak{t}>p$.

Доказательство теоремы 1 повторяет доказательство аналогичных теорем из [4, 6, 12] с использованием оценок (12) – (16), (20) и итерирования, следуя Ю. Мозеру, неравенства

$$\Theta_\nu \le C^{(\nu+1)/(q/p)^\nu}(1+H(2r))^{2/(q/p)^\nu}\Theta_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\Theta_\nu = \left(\frac{1}{\lambda\left(Q_{\rho_\nu}^{\mathfrak{f}(\rho_\nu)}\right)}\iint\limits_{Q_{\rho_\nu}^{\mathfrak{f}(\rho_\nu)}} \lambda(x)\overline{u}^{2(q/p)^\nu q}\,dx\,dt\right)^{1/(q/p)^\nu q} +$$

$$+\left(\frac{1}{\left|Q_{\rho_\nu}^{\mathfrak{f}(\rho_\nu)}\right|}\iint\limits_{Q_{\rho_\nu}^{\mathfrak{f}(\rho_\nu)}} \overline{u}^{2(q/p)^\nu q}\,dx\,dt\right)^{1/(q/p)^\nu q}.$$

2. Непрерывность по Гельдеру обобщенных решений. Рассмотрим обобщенные решения (1), (2) с $b_0 > 0$. В этом случае предполагаем, что $|u| \le M_0$ в Q. Вводя обозначения

$$\hat{A}(x,t,u_x) = A(x,t,u,u_x), \qquad \hat{B}(x,t,u_x) = B(x,t,u,u_x),$$

$$\hat{g}(x,t) = g(x,t) + M_0^2 d(x,t), \qquad \hat{e}(x,t) = e(x,t) + M_0 c(x,t),$$

$$\hat{f}(x,t) = \frac{b^2(x,t)}{\lambda(x)} + f(x,t) + M_0 h(x,t), \qquad \hat{b}_0 = b_0 + 1$$

и используя неравенство Юнга, можем считать, что $u(x,t)$ — обобщенное решение уравнения

$$u_t = \operatorname{div}\hat{A}(x,t,u_x) + \hat{B}(x,t,u_x) \tag{23}$$

с условиями

$$\begin{aligned} &\hat{A}(x,t,\overline{p})\overline{p} \ge a_1\lambda(x)|\overline{p}|^2 - \hat{g}(x,t), \\ &\left|\hat{A}(x,t,\overline{p})\right| \le a_2\lambda(x)|\overline{p}| + \hat{e}(x,t), \\ &\left|\hat{B}(x,t,\overline{p})\right| \le \hat{b}_0\lambda(x)|\overline{p}|^2 + \hat{f}(x,t). \end{aligned} \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t)$ *— обобщенное решение уравнения* (23) *с условиями* (24) *в* $Q_{r_0}^{\mathfrak{f}(r_0)} \subset Q$ *и существует такая положительная константа* $\mathcal{K}$, *что для любого* K_r, $r \le r_0$,

$$H(r) = M(r)P(r) = \left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda^{\mathfrak{s}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{s}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda^{-\mathfrak{t}}(x)\,dx\right)^{1/\mathfrak{t}} \le \mathcal{K}.$$

Тогда найдутся такие константы θ *и* ζ, *принадлежащие интервалу* $(0,1)$ *и зависящие от* n, a_1, a_2, b_0, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, p, M_0, $\mathcal{K}$, *что:*

или

1) $\operatorname{osc}\left(u, Q_{\theta r}^{\mathfrak{f}(\theta r)}\right) \le Cr^\gamma$, *где* $\gamma = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{n+2}{p'}\right) > 0$, $C = C(n, a_1, a_2, b_0, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, p, M_0, \mathcal{K})$,

или

2) $\operatorname{osc}\left(u, Q_{\theta r}^{\mathfrak{f}(\theta r)}\right) \le \zeta \operatorname{osc}\left(u, Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right)$.

Доказательство. Поскольку после прибавления к функции $u(x, t)$ какой-либо постоянной новая функция является обобщенным решением уравнения, аналогичного (23), (24), а ее колебания (osc) на любом множестве совпадают с колебаниями функции $u(x, t)$, то, не нарушая общности, можно считать, что $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_r^{\mathfrak{f}(r)}} (\pm u(x, t)) = M$.

Существуют две возможности:

$$M < r^\gamma \quad \text{или} \quad M \geq r^\gamma.$$

В первом случае при любом $\theta \in (0, 1)$

$$\operatorname{osc}\left(u, Q_{\theta r}^{\mathfrak{f}(\theta r)}\right) \leq \operatorname{osc}\left(u, Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right) \leq 2M \leq 2r^\gamma,$$

во втором случае при $r^\gamma \leq r_1$, где r_1 — достаточно мало, будет доказано существование таких констант θ и ζ, принадлежащих интервалу $(0, 1)$, что

$$\operatorname{osc}\left(u, Q_{\theta r}^{\mathfrak{f}(\theta r)}\right) \leq \zeta \operatorname{osc}\left(u, Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right).$$

Если же $r^\gamma > r_1$, то

$$\operatorname{osc}\left(u, Q_{\theta r}^{\mathfrak{f}(\theta r)}\right) \leq \operatorname{osc}\left(u, Q_{r_0}^{\mathfrak{f}(r_0)}\right) \leq 2M_0 \leq \frac{2M_0}{r_1} r^\gamma.$$

Итак, достаточно рассмотреть случай $M \geq r^\gamma$, где $r^\gamma \leq r_1$ и r_1 — достаточно мало. Обозначим через $v(x, t)$ ту из функций $1 \pm u/M$, которая не меньше единицы на множестве, мера которого не меньше $\operatorname{mes} Q_r^{\mathfrak{f}(r)}/2$ (заметим, что функция $u(x, t)$ неотрицательна или неположительна на множестве меры не меньше $\operatorname{mes} Q_r^{\mathfrak{f}(r)}/2$). Поскольку $u(x, t)$ — обобщенное решение уравнения (23) с условиями (24), то неотрицательная функция $v(x, t)$ является обобщенным решением уравнения

$$v_t = \operatorname{div} \tilde{A}(x, t, v_x) + \tilde{B}(x, t, v_x), \tag{25}$$

$$\tilde{A}(x, t, v_x) = \pm\frac{1}{M}\hat{A}(x, t, \pm M v_x), \qquad \tilde{B}(x, t, v_x) = \pm\frac{1}{M}\hat{B}(x, t, \pm M v_x),$$

с условиями

$$\begin{gathered}
\tilde{A}(x, t, v_x) v_x \geq a_1 \lambda(x) |v_x|^2 - \tilde{g}(x, t), \\
\left|\tilde{A}(x, t, v_x)\right| \leq a_2 \lambda(x) |v_x| + \tilde{e}(x, t), \\
\left|\tilde{B}(x, t, v_x)\right| \leq \tilde{b}_0 \lambda(x) |v_x|^2 + \tilde{f}(x, t),
\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\tilde{g}(x, t) = \frac{\hat{g}(x, t)}{M^2}, \qquad \tilde{e}(x, t) = \frac{\hat{e}(x, t)}{M}, \qquad \tilde{f}(x, t) = \frac{\hat{f}(x, t)}{M}, \qquad \tilde{b}_0 = \hat{b}_0 M_0.$$

Для обобщенного решения $v(x, t)$ имеет место следующее вспомогательное предложение.

Лемма 3. *Пусть числа* ω *и* β *удовлетворяют соотношениям* $0 < \omega < 1/2$, $0 < \beta < 1$, *и* $H(r) \leq \mathcal{H}$ *при любом* $r \leq r_0$.

Тогда найдется число $h \in (0, 1)$, зависящее от n, $\bar{b}_0$, a_1, a_2, M_0, $\mathcal{K}$, такое, что если обозначить множество

$$\left\{ x \in K_{\beta r} : v(x, t) \geq h \right\}$$

через N_t, то для почти всех $t \in \left(-\omega r^2, 0\right)$

$$\operatorname{mes} N_t \geq \frac{1}{4} \operatorname{mes} K_{\beta r}.$$

Доказательство леммы 3 является повторением доказательства аналогичного утверждения из работы [4, с. 547, 548] с заменой r^2 на $\mathfrak{f}(r)$ и учетом свойств функций $\mathfrak{f}(r)$, $\lambda\left(Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right)$, а также условия $H(r) \leq \mathcal{K}$ при любом $r \leq r_0$.

Далее, следуя работе [4, с. 549] (см. также [15, с. 60 – 70]), для функции $z = z(v) = G((v+\varepsilon)/h)$, где функция $G(v)$ берется из леммы 5.1 [15, с. 57], устанавливаем оценку

$$\int\limits_{-\omega\mathfrak{f}(r)}^{0} \int\limits_{K_{\beta r}} \lambda(x) z_x^2 \, dx\, dt \leq C\left(1 + G\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) r^n, \tag{27}$$

аналогичную оценке (4.15) из работы [4, с. 550].

Поскольку $z = G((v+\varepsilon)/h) = 0$ для п. в. $t \in (-\omega\mathfrak{f}(r), 0)$ на множествах $N_t = \left\{ x \in K_{\beta r} : v(x, t) \geq h \right\}$ и согласно лемме 3 $\operatorname{mes} N_t \geq \frac{1}{4} \operatorname{mes} K_{\beta r}$, то можно воспользоваться оценкой (21), которая вместе с (27) дает неравенство

$$\frac{1}{\left|Q_{\beta r}^{\omega\mathfrak{f}(r)}\right|} \iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega\mathfrak{f}(r)}} z^2 dx\, dt + \frac{1}{\lambda\left(Q_{\beta r}^{\omega\mathfrak{f}(r)}\right)} \iint\limits_{Q_{\beta r}^{\omega\mathfrak{f}(r)}} \lambda(x) z^2 dx\, dt \leq$$

$$\leq CH(\beta r) \frac{(\beta r)^2}{\lambda\left(Q_{\beta r}^{\omega\mathfrak{f}(r)}\right)} \left(1 + G\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) r^n \leq C\mathcal{K} \frac{r^2}{r^{n+2}} \left(1 + G\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) r^n \leq C\left(1 + G\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right).$$

Отсюда, используя свойства функций $\mathfrak{f}(r)$ и $\lambda\left(Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right)$, получаем

$$\frac{1}{\left|Q_{3\theta r}^{\mathfrak{f}(3\theta r)}\right|} \iint\limits_{Q_{3\theta r}^{\mathfrak{f}(3\theta r)}} z^2 dx\, dt + \frac{1}{\lambda\left(Q_{3\theta r}^{\mathfrak{f}(3\theta r)}\right)} \iint\limits_{Q_{3\theta r}^{\mathfrak{f}(3\theta r)}} \lambda(x) z^2 dx\, dt \leq C\left(1 + G\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right), \tag{28}$$

где $\theta = \min\left(\omega^{1/(2 - n/t)}, \beta\right)/3$.

Теперь осталось доказать, что для $z = z(v)$ справедлива локальная оценка максимума модуля (22),что делается так же, как в работе [4, с. 548]. Объединяя оценки (22) и (28), получаем

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_{\theta r}^{\mathfrak{f}(\theta r)}} z^2 \leq C\left(1 + G\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right). \tag{29}$$

Оценка (29) аналогична оценке (4.16) из работы [4, с. 50], и из нее непосредственно следует оценка для осцилляций

$$\operatorname{osc}\left(u, Q_{\theta r}^{\mathfrak{f}(\theta r)}\right) \leq \zeta \operatorname{osc}\left(u, Q_r^{\mathfrak{f}(r)}\right),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение уравнения* (23) *с услови-*

ями (24) в цилиндре $Q_{r_0}^{f(r_0)} \subset Q$ *и существует такая положительная константа* $\mathcal{K}$, *что для любого* K_ρ, $\rho \leq r_0$,

$$H(\rho) = M(\rho)P(\rho) = s\left(\rho^{-n}\int_{K_\rho}\lambda^{s}(x)\,dx\right)^{1/s}\left(\rho^{-n}\int_{K_\rho}\lambda^{-t}(x)\,dx\right)^{1/t} \leq \mathcal{K}.$$

Тогда существуют такие константы α *и* C, $\alpha \in (0, 1)$, $C > 0$, *зависящие только от* n, a_1, a_2, t, s, p, $\hat{b}_0$, M_0, $\mathcal{K}$, *что для любого* $\rho \leq r_0$

$$\operatorname{osc}\left(u, Q_\rho^{f(\rho)}\right) \leq C\left(1 + r_0^{\gamma}\right)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\alpha},$$

где число γ *определено в теореме 2, т. е.* $u(x, t)$ *удовлетворяет условию Гельдера в начале координат.*

Доказательство теоремы 3, являющейся следствием теоремы 2, можно найти в работах [15, с. 61, 69; 4, с. 538, 539].

1. *Mozer J.* A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**, № 3. – P. 457 – 468.
2. *Mozer J.* On a pointwise estimate for parabolic differential eqautions // Ibid. – 1971. – **24**, № 5. – P. 727 – 740.
3. *Кружков С. Н.* Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, № 4. – С. 748 – 751.
4. *Кружков С. Н.* Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 4. – С. 522 – 570.
5. *Кружков С. Н.* Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Там же. – 1968. – **77**, № 3. – С. 299 – 334.
6. *Aronson D. G., Serrin J.* Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1967. – **25**. – P. 81 – 122.
7. *Trudinger N.* On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations // Ibid. – 1971. – **42**, № 1. – P. 50 – 62.
8. *Trudinger N.* Pointwise estimates and quasilinear parabolic eqautions // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**. – P. 205 – 226.
9. *Chiarenza F. M., Serapioni R. P.* A Harnack inequality for degenerate parabolic equations // Communs Part. Different. Equat. – 1984. – **9(8)**. – P. 719 – 749.
10. *Chiarenza F. M., Serapioni R. P.* Pointwise estimates for degenerate parabolic equations // Appl. Anal. – 1987. – **23**. – P. 287 – 299.
11. *Колодий И. М.* Об ограниченности обобщенных решений параболических дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. – 1971. – № 5. – С. 25 – 31.
12. *Кружков С. Н., Колодий И. М.* Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 3. – С.608 – 628.
13. *Колодий И. М.* Теорема Лиувилля для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 5. – С. 841 – 854.
14. *Колодий И. М.* Оценка максимума модуля обобщенных решений первой краевой задачи для вырождающихся параболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 12. – С. 1624 – 1637.
15. *Кружков С. Н.* Нелинейные уравнения с частными производными Ч. 1. – М., 1969. – 108 с. – (Препринт / ВЦ МГУ).

Получено 26.02.99