УДК 512.64

М. І. Кучма (Львів. ун-т)

СИМЕТРИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ І ВИДІЛЕННЯ СПІЛЬНОГО УНІТАЛЬНОГО ДІЛЬНИКА ІЗ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

We find necessary and sufficient conditions for the existence of common unital divisors with the given Smith forms of nonsingular matrix manifolds and common factorization of symmetric matrices over rings of polynomials with involution. We obtain conditions of symmetric equivalence of the matrices of this sort.

Знайдено необхідні та достатні умови існування спільних унітальних дільників із заданими формами Сміта неособливих матричних многочленів, спільної факторизації симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією. Отримано умови симетричної еквівалентності таких матриць.

Задача про симетричну еквівалентність симетричних матричних многочленів і їх факторизацію вивчалась у працях [1 – 5].

У цій роботі розглядаються факторизації симетричної многочленної матриці $A(x)$ з кільця $M_n(\mathbb{C}[x])$ вигляду

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla},$$

де $C(x) = C(x)^{\nabla}$ — неособлива матриця, ∇ — інволюція в кільці $\mathbb{C}[x]$, які у випадку $C(x) = C$ охоплюють факторизації із робіт [2, 5].

У роботах [6, 7] показано, що для побудови синтезованого локально оптимального керування та інтегровних систем класичної механіки застосовують факторизації матричного многочлена $A(x)$, в яких матриця $B(x)$ є регулярною, зокрема унітальною, що зумовлює вивчення вказаної факторизації.

Метою даної роботи є отримання умов, за яких симетричні матриці є симетрично еквівалентними до їх форм Сміта, і факторизації таких матриць. Відправним пунктом дослідження цієї алгебраїчної задачі є задача про спільні унітальні дільники матричних многочленів, яка у роботі [8] розв'язана лише у випадку, коли форма Сміта матриці дорівнює добутку форм Сміта її співмножників.

У роботі це питання розв'язується повністю і знаходить застосування у задачах про спільні факторизації та симетричну еквівалентність симетрично еквівалентних матричних многочленів над кільцем з інволюцією.

1. Про виділення спільного унітального дільника із заданою формою Сміта з матричних многочленів. Нехай $\mathbb{C}[x]$ — кільце многочленів над $\mathbb{C}$. Розглянемо неособливі матричні многочлени

$$A(x) = \sum_{i=0}^{p} A_i x^{p-i}, \qquad B(x) = \sum_{j=0}^{q} B_j x^{q-j}, \tag{1}$$

де $A_i, B_j \in M_n(\mathbb{C})$, $i = 0, 1, \ldots, p$, $j = 0, 1, \ldots, q$. Нагадаємо, що матричний многочлен $A(x)$ називається регулярним (унітальним), якщо $|A_0| \neq 0$, ($A_0 = E$ — одинична матриця). Говорять, що матричні многочлени (1) мають спільний лівий дільник, якщо вони зображуються у вигляді

$$A(x) = N(x)G(x), \qquad B(x) = N(x)M(x),$$

де $N(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ і $\deg \det N(x) \geq 1$.

Далі позначатимемо через S_A і S_B форми Сміта матриць $A(x)$ і $B(x)$ відповідно:

$$S_A = P_A(x)A(x)Q_A(x) = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1^A(x),\ldots,\varepsilon_n^A(x)\right) \tag{2}$$

і

$$S_B = P_B(x)B(x)Q_B(x) = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1^B(x),\ldots,\varepsilon_n^B(x)\right), \tag{3}$$

де $P_A(x)$, $Q_A(x)$, $P_B(x)$, $Q_B(x)$ — оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці.

Теорема 1. *Нехай форми Сміта матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$ зображуються у вигляді*

$$S_A = \Phi(x)\Psi(x), \qquad S_B = \Phi(x)\Lambda(x), \tag{4}$$

де $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$ — d-матриця, тобто $\varphi_i(x)$ — унітарні многочлени і $\varphi_i(x)|\varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний унітальний дільник $N(x)$ степеня s, тобто

$$A(x) = N(x)\overline{A}(x), \qquad B(x) = N(x)\overline{B}(x), \tag{5}$$

причому $S_N = \Phi(x)$, тоді і тільки тоді, коли трикутні форми Ерміта матриць

$$F_A = P_A(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x) \quad \text{і} \quad F_B = P_B(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)$$

збігаються, тобто $T^{F_A}(x) = T^{F_B}(x) = T(x)$ при деяких значеннях параметрів матриць $V(\Phi)$ і $V_1(\Phi)$, які визначені в роботі [9], *і* $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$, *де*

$$M_T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & \ldots & 0 \\ T_1 & T_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_s & T_{s-1} & \ldots & T_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_l & T_{l-1} & \ldots & T_{l-s} \end{pmatrix},$$

$$T(x) = T_0x^l + T_1x^{l-1} + \ldots + T_l, \qquad T_i \in M_n(\mathbb{C}).$$

Доведення. Необхідність. Для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існують оборотні матриці $P_A(x)$, $Q_A(x)$, $P_B(x)$, $Q_B(x)$ такі, що мають місце співвідношення (2) і (3).

Оскільки є виділення спільного лівого унітального дільника $N(x)$ із формою Сміта $\Phi(x)$ матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$, то це означає, що матриці

$$F_A = P_A(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x) \quad \text{і} \quad F_B = P_B(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)$$

регуляризуються справа, тобто правоеквівалентні унітальному матричному многочлену $N(x)$ степеня s. Згідно з лемою 2 [8] трикутні форми Ерміта матриць F_A і F_B збігаються при деяких значеннях параметрів в матрицях $V(\Phi)$ і $V_1(\Phi)$ відповідно, тобто $T^{F_A}(x) = T^{F_B}(x) = T(x)$ і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.

Достатність. Врахувавши співвідношення (2) – (4), зобразимо матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ у вигляді

$$A(x) = P_A(x)^{-1}\Phi(x)Y^{-1}Y\Psi(x)Q_A(x)^{-1}, \tag{6}$$

$$B(x) = P_B(x)^{-1}\Phi(x)Y_1^{-1}Y_1\Lambda(x)Q_B(x)^{-1}, \tag{7}$$

де матриці Y, Y_1 визначені в роботі [9]. З огляду на рівності

$$\Phi(x)Y^{-1} = V(\Phi)^{-1}\Phi(x), \qquad \Phi(x)Y_1^{-1} = V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)$$

із співвідношень (6), (7) отримаємо

$$A(x) = P_A(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x)G(x), \tag{8}$$

$$B(x) = P_B(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)M(x), \tag{9}$$

де матриці $G(x) = Y\Psi(x)Q_A(x)^{-1}$, $M(x) = Y_1\Lambda(x)Q_B(x)^{-1}$. На підставі леми 2 з [8] маємо, що матриці F_A і F_B правоеквівалентні унітальному матричному многочлену $N(x)$ степеня s, тобто існують матриці $R(x)$, $R_1(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що $F_A = N(x)R(x)$, $F_B = N(x)R_1(x)$. Тоді з (8) і (9) одержуємо

$$A(x) = N(x)\overline{A}(x), \qquad B(x) = N(x)\overline{B}(x),$$

де $\overline{A}(x) = R(x)^{-1}G(x)$, $\overline{B}(x) = R_1(x)^{-1}M(x)$.

Теорему доведено.

Як наслідок, із теореми 1 випливають умови існування спільного лівого унітального дільника $N(x)$ матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$, для яких у співвідношенні (4) матриці $\Psi(x)$ і $\Lambda(x)$ є d-матрицями такими, що $S_{\overline{A}} = \Psi(x)$, $S_{\overline{B}} = \Lambda(x)$.

Справді, оскільки з матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$ виділяється спільний унітальний дільник $N(x)$ то це означає, що матриці $F_A = P_A(x)^{-1} \times$ $\times V(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ і $F_B = P_B(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ є правоеквівалентними до матриці $N(x)$, тобто існують матриці $R(x)$, $R_1(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$P_A(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x)R(x) = N(x), \tag{10}$$

$$P_B(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_1(x) = N(x). \tag{11}$$

З огляду на співвідношення (2), (3) і (5) існують оборотні матриці $W(x)$ і $W_1(x)$ над $\mathbb{C}[x]$ такі, що

$$S_A = P_A(x)N(x)W(x)W(x)^{-1}\overline{A}(x)Q_A(x),$$

$$S_B = P_B(x)N(x)W_1(x)W_1(x)^{-1}\overline{B}(x)Q_B(x).$$

Оскільки матриці $A(x)$ і $B(x)$ мають властивість мультиплікативності форм Сміта, то з останніх рівностей маємо

$$P_A(x)N(x)W(x) = \Phi(x), \tag{12}$$

$$P_B(x)N(x)W_1(x) = \Phi(x). \tag{13}$$

Із співвідношень (10) і (12), (11) і (13) випливає, що $V(\Phi) = E$, $V_1(\Phi) = E$ — одиничні матриці. Із рівностей (10) і (11) отримуємо

$$P_A(x)^{-1}\Phi(x) = P_B(x)^{-1}\Phi(x)V(x), \tag{14}$$

де $V(x) = R_1(x)R(x)^{-1}$ — оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця. Згідно з [9] існує матриця $C \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ така, що

$$P_A(x) = T_A(x)^{-1}C, \qquad P_B(x) = T_B(x)^{-1}C, \tag{15}$$

де $T_A(x)$, $T_B(x)$ — нижні трикутні оборотні многочленні матриці. Домножаючи (14) зліва на матрицю C і позначаючи $T_A(x)\Phi(x) = F_1(x)$, $T_B(x)\Phi(x) =$ $= F_2(x)$, одержуємо

$$F_1(x) = F_2(x)V(x).$$

Оскільки матриці $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є правоеквівалентними, то це означає, що форми Ерміта цих матриць збігаються.

2. Спільна факторизація симетричних матричних многочленів. Нехай $\mathbb{C}[x]$ — кільце многочленів з інволюцією ∇, визначеною у роботі [5] і перенесеною на кільце матриць $M_n(\mathbb{C}[x])$ таким чином:

$$A(x)^{\nabla} = \left\| a_{ij}(x) \right\|^{\nabla} = \left\| a_{ji}(x)^{\nabla} \right\|.$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$. Спільною факторизацією матричних многочленів $A_1(x)$ і $A_2(x)$ з кільця $M_n(\mathbb{C}[x])$ називатимемо їхні зображення у вигляді

$$A_1(x) = B(x)C_1(x)B(x)^{\nabla}, \quad A_2(x) = B(x)C_2(x)B(x)^{\nabla}, \tag{16}$$

де $B(x)$ — регулярна (унітальна), $C_1(x)$, $C_2(x)$ — симетричні неособливі матриці.

Позначимо через S_{A_1}, S_{A_2} форми Сміта матричних многочленів $A_1(x)$, $A_2(x)$ відповідно:

$$S_{A_1} = P_1(x)A_1(x)Q_1(x), \quad S_{A_2} = P_2(x)A_2(x)Q_2(x), \tag{17}$$

де $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $P_2(x)$ і $Q_2(x)$ — оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці.

Теорема 2. *Нехай* $\Phi(x)$ — *d-матриця,* $\deg\det\Phi(x) = ns$, *є дільником форм Сміта* S_{A_1} *і* S_{A_2} *відповідно матриць* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$. *Для симетричних матриць* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *існує спільна факторизація* (16), *в якій* $B(x)$ — *унітальна матриця степеня* s *з формою Сміта* $\Phi(x)$, *тоді і тільки тоді, коли симетричні матриці*

$$V_1(\Phi)P_1(x)A_1(x)P_1(x)^{\nabla}V_1(\Phi)^{\nabla}, \quad V_2(\Phi)P_2(x)A_2(x)P_2(x)^{\nabla}V_2(\Phi)^{\nabla}$$

діляться одночасно зліва на $\Phi(x)$ *і справа на* $\Phi(x)^{\nabla}$, *а трикутні форми Ерміта матриць* $F_{A_1} = P_1(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ *і* $F_{A_2} = P_2(x)^{-1}V_2(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ *збігаються, тобто* $T^{F_{A_1}}(x) = T^{F_{A_2}}(x) = T(x)$ *і* $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$ *при деяких значеннях параметрів матриць* $V_1(\Phi)$ *і* $V_2(\Phi)$, *які визначені в* [9].

Доведення. Необхідність. Нехай для матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$, має місце факторизація (16). Із результатів роботи [9] випливає, що існують матриці $C \in GL_n(\mathbb{C})$ *і* $Q_B(x)$, $Q_i(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, $i = 1, 2$, такі, що

$$CA_i(x)Q_i(x) =$$

$$= CB(x)Q_B(x)Q_B(x)^{-1}C_i(x)Q_B(x)^{\nabla -1}Q_B(x)^{\nabla}B(x)^{\nabla}C^{\nabla}C^{\nabla -1}Q_i(x), \tag{18}$$

де

$$CA_i(x)Q_i(x) = T_i(x)S_{A_i}, \quad CB(x)Q_B(x) = T_B(x)\Phi(x), \tag{19}$$

а $T_B(x)$, $T_i(x)$, $i = 1, 2$, є нижніми трикутними оборотними над $\mathbb{C}[x]$ матрицями.

Співвідношення (18) фактично має вигляд

$$CA_i(x)C^{\nabla} = T_B(x)\Phi(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}T_B(x)^{\nabla}, \tag{20}$$

де $Q_B(x)^{-1}C_i(x)Q_B(x)^{\nabla -1} = D_i(x)$, $i = 1, 2$, — симетричні матриці. Домножаючи рівність (20) зліва і справа на оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $T_i(x)^{-1}$ і $T_i(x)^{\nabla -1}$, $i = 1, 2$, відповідно, отримуємо

$$T_i(x)^{-1}CA_i(x)C^{\nabla}T_i(x)^{\nabla-1} = T_i(x)^{-1}T_B(x)\Phi(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}T_B(x)^{\nabla}T_i(x)^{\nabla-1}. \quad (21)$$

Легко бачити, що $P_i(x) = T_i(x)^{-1}C$, $i = 1, 2$, є лівими перетворюючими матрицями до форм Сміта S_{A_i} матриць S_{A_i}.

Оскільки для матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$, існує спільна факторизація, то це означає, що є виділення з $A_i(x)$, $i = 1, 2$, спільного унітального множника $B(x)$, тобто матриці $P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)$, $i = 1, 2$, правоеквівалентні матриці $B(x)$. Тому існують оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $R_i(x)$, $i = 1, 2$, такі, що

$$P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x) = B(x), \qquad i = 1, 2. \quad (22)$$

Із співвідношень (19) і (22) маємо

$$C^{-1}T_B(x)\Phi(x)Q_B(x)^{-1} = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x), \qquad i = 1, 2. \quad (23)$$

Домножаючи рівність (23) зліва на $P_i(x) = T_i(x)^{-1}C$, $i = 1, 2$, і справа на $Q_B(x)$, одержуємо

$$T_i(x)^{-1}T_B(x)\Phi(x) = V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x)Q_B(x), \qquad i = 1, 2. \quad (24)$$

З огляду на (24) співвідношення (21) набирає вигляду

$$P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla} = V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x)Q_B(x)D_i(x)Q_B(x)^{\nabla}R_i(x)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla-1} =$$
$$= V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x)C_i(x)R_i(x)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla-1} =$$
$$= V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)W_i(x)\Phi(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla-1},$$

де симетричні матриці $W_i(x) = R_i(x)C_i(x)R_i(x)^{\nabla}$, $i = 1, 2$, є многочленними. Звідси

$$W_i(x) = \Phi(x)^{-1}V_i(\Phi)P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla-1}, \qquad i = 1, 2.$$

Достатність. Нехай матриці $V_i(\Phi)P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla}$, $i = 1, 2$, діляться одночасно зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$, тобто

$$V_i(\Phi)P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla} = \Phi(x)W_i(x)\Phi(x)^{\nabla}$$

при деяких симетричних матрицях $W_i(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$, $i = 1, 2$. З останніх рівностей маємо

$$A_i(x) = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)W_i(x)\Phi(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla-1}P_i(x)^{\nabla-1}, \qquad i = 1, 2. \quad (25)$$

Оскільки трикутні форми Ерміта матриць $F_{A_i} = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)$, $i = 1, 2$, збігаються, то це означає, що ці матриці правоеквівалентні до матриці $B(x)$, тобто існують такі оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $S_i(x)$, $i = 1, 2$, що $P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)S_i(x) = B(x)$, $i = 1, 2$, — унітальна многочленна матриця степеня s із формою Сміта $\Phi(x)$. Тоді із рівності (25) одержуємо

$$A_i(x) = B(x)S_i(x)^{-1}W_i(x)S_i(x)^{\nabla-1}B(x)^{\nabla}, \qquad i = 1, 2. \quad (26)$$

Позначимо $C_i(x) = S_i(x)^{-1}W_i(x)S_i(x)^{\nabla-1}$, $i = 1, 2$. Симетричні матриці $C_i(x)$, $i = 1, 2$, є многочленними. Тому з рівностей (26) отримуємо спільну факторизацію вигляду (16). Теорему доведено.

Нехай форми Сміта матричних многочленів $A_i(x)$, $i = 1, 2$, зображуються у вигляді

$$S_{A_i} = \Phi(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}, \quad (27)$$

де $D_i(x)$, $i = 1, 2,$ — d-матриці, причому $\deg\det\Phi(x) = ns$. Відомо [9], що існують оборотні матриці C над $\mathbb{C}$ і $Q_i(x)$, $i = 1, 2$, над $\mathbb{C}[x]$ такі, що

$$CA_i(x)Q_i(x) = T^{A_i}(x), \quad i = 1, 2,$$

де $T^{A_i}(x)$, $i = 1, 2,$ — нижні трикутні матриці з головними діагоналями S_{A_i}. Враховуючи (27), легко бачити, що трикутні матриці $T^{A_i}(x)$, $i = 1, 2$, можна зобразити у вигляді добутку

$$T^{A_i}(x) = F_i(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}, \tag{28}$$

де $F_i(x)$, $i = 1, 2,$ — трикутні матриці з головними діагоналями $\Phi(x)$. За допомогою правих елементарних перетворень матриці $F_i(x)$, $i = 1, 2$, зведемо до форм Ерміта:

$$T_i(x) = F_i(x)U_i(x),$$

де $U_i(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, $i = 1, 2$. Тоді (28) набере вигляду

$$T^{A_i}(x) = T_i(x)S_i(x), \tag{29}$$

де $S_i(x) = U_i(x)^{-1}D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}$.

Теорема 3. *Нехай форми Сміта матриць $A_1(x)$, $A_2(x)$ зображуються у вигляді* (27). *Для симетричних матриць $A_1(x)$, $A_2(x)$ існує спільна факторизація вигляду* (16), *в якій $B(x)$ — унітальна матриця степеня s з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C_1(x)$, $C_2(x)$ — неособливі симетричні матриці з формами Сміта $S_{C_1} = D_1(x)$, $S_{C_2} = D_2(x)$ відповідно, тоді і тільки тоді, коли в* (29) *$T_1(x) = T_2(x) = T(x)$ і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$. Для кожного із фіксованих розкладів* (27) *така спільна допустима факторизація єдина.*

Доведення. Необхідність. Оскільки для матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$, існує спільна допустима факторизація (16), то згідно з результатами роботи [10] матриці $V_i(\Phi) = E$, $i = 1, 2,$ — одиничні, а за теоремами 1, 2 маємо $T_1(x) = T_2(x) = T(x)$ і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.

Достатність. Нехай для форм Сміта матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$, маємо факторизації (27). Зважаючи на наслідок з теореми 1, переконуємось, що $V_i(\Phi) = E$, $i = 1, 2$ — одиничні матриці.

Доведемо, що матриці $P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla}$ одночасно діляться зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$, тобто

$$P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla} = \Phi(x)W_i(x)\Phi(x)^{\nabla}$$

при деяких симетричних многочленних матрицях $W_i(x)$, $i = 1, 2$.

Справді, враховуючи співвідношення (17), отримуємо

$$W_i(x) = \Phi(x)^{-1}P_i(x)A_i(x)Q_i(x)Q_i(x)^{-1}P_i(x)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla-1} =$$
$$= \Phi(x)^{-1}S_{A_i}Q_i(x)^{-1}P_i(x)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla-1}.$$

З огляду на рівності (27) і $D_i(x)\Phi(x)^{\nabla} = \Phi(x)^{\nabla}D_i(x)$ маємо

$$W_i(x) = D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}Q_i(x)^{-1}P_i(x)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla-1} = \Phi(x)^{\nabla}H_i(x)\Phi(x)^{\nabla-1},$$

де $H_i(x) = D_i(x)Q_i(x)^{-1}P_i(x)^{\nabla} = \left\| h_{kj}^i \right\|$, $k, j = 1, \ldots, n$, $i = 1, 2$.

Легко бачити, що $h_{jj}^i \in \mathbb{C}[x]$, $j = 1, \ldots, n$, і $t_{kj}^i = \varphi_k^{\nabla}h_{kj}^i / \varphi_j^{\nabla} \in \mathbb{C}[x]$ при $k > j$, $i = 1, 2$. Оскільки матриці $W_i(x) = W_i(x)^{\nabla}$, то до $\mathbb{C}[x]$ належать всі інші елементи матриці $W_i(x)$, $i = 1, 2$. Згідно з теоремою 2 для матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$, існує спільна допустима факторизація.

Єдиність спільної факторизації (16) випливає із результатів [9] і того, що ця спільна факторизація є допустимою, а спільний множник $B(x)$ в ній унітальний.

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай форма Сміта однієї з матриць, наприклад* $A_1(x)$, *зображується у вигляді* (27).

Для матричних многочленів $A_1(x) = A_1(x)^\nabla$, $A_2(x) = A_2(x)^\nabla$ *існує спільна факторизація* (16), *в якій спільний множник* $B(x)$ — *унітальна матриця степеня* s *з формою Сміта* $\Phi(x)$, *а* $C_1(x) = C_1(x)^\nabla$ — *неособлива матриця з формою Сміта* $S_{C_1} = D_1(x)$, *тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця* $V_2(\Phi)P_2(x)A_2(x)P_2(x)^\nabla V_2(\Phi)^\nabla$ *ділиться одночасно зліва на* $\Phi(x)$ *і справа на* $\Phi(x)^\nabla$ *і трикутні форми Ерміта матриць* $F_{A_1} = P_1(x)^{-1}\Phi(x)$ *і* $F_{A_2} = P_2(x)^{-1}V_2(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ *збігаються при деяких значеннях параметрів матриці* $V_2(\Phi)$, *тобто* $T^{F_{A_1}}(x) = T^{F_{A_2}}(x) = T(x)$ *і* $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.

Доведення теореми випливає із теорем 2 і 3.

3. Симетрична еквівалентність матричних многочленів. Нехай $A(x)$, $B(x)$ — матричні многочлени вигляду (1). Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ існують оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$, тобто $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, такі, що $P(x)A(x)Q(x) = B(x)$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються еквівалентними. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ називатимемо симетрично еквівалентними, якщо існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $R(x)A(x)R(x)^\nabla = B(x)$, де ∇ — інволюція в $\mathbb{C}[x]$.

Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ існують матриці $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ $(T \in GL_n(\mathbb{C}))$ такі, що $PA(x)Q = B(x)$ $(TA(x)T^\nabla = B(x))$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються строго еквівалентними (конгруентними).

Нехай $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$ — деякий многочлен (зокрема, $f(x)$ вигляду (1)). Тоді позначатимемо через $\tilde{f}(x)$ зворотний до $f(x)$ многочлен $\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ і через $\tilde{\tilde{f}}(x)$ узагальнено зворотний до $f(x)$ многочлен відносно степеня r $\tilde{\tilde{f}}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i+r}$, де $r \in \mathbb{N}$.

Легко бачити, що якщо матричний многочлен $A(x)$ оборотний над $\mathbb{C}[x]$, то $\tilde{A}(x)$ і $\tilde{\tilde{A}}(x)$ — відповідно зворотний і узагальнено зворотний до $A(x)$ многочлени — є регулярними матричними многочленами.

Нехай форма Сміта матриці $A(x)$ має вигляд

$$S_A = P(x)A(x)Q(X), \tag{30}$$

де $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$.

Теорема 5. *Для симетричної матриці* $A(x)$ *має місце рівність*

$$R(x)A(x)R(x)^\nabla = S_A, \tag{31}$$

де $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, *тоді і тільки тоді, коли для довільних оборотних матриць* $P(x)$, $Q(x)$ *над* $\mathbb{C}[x]$, *що задовольняють* (30), *виконується*

$$\tilde{\tilde{P}}(x)^\nabla = \tilde{R}(x)^\nabla \tilde{S}(x)^\nabla, \qquad \tilde{\tilde{Q}}(x) = \tilde{R}(x)^\nabla \tilde{T}(x) \tag{32}$$

і

$$S(x)S_AT(x) = S_A, \tag{33}$$

де матриці $\tilde{\tilde{P}}(x)$, $\tilde{\tilde{Q}}(x)$ *— узагальнено зворотні відповідно до матриць* $P(x)$, $Q(x)$, *а матриці* $\tilde{R}(x)$, $\tilde{S}(x)$ *і* $\tilde{T}(x)$ *— зворотні відповідно до матриць* $R(x)$, $S(x)$ *і* $T(x)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай для матриці $A(x)$ мають місце (30), (31). Для матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ існують матриці $S(x)$, $T(x) \in$ $\in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$P(x)^\nabla = R(x)^\nabla S(x)^\nabla, \qquad Q(x) = R(x)^\nabla T(x). \tag{34}$$

Підставляючи співвідношення (34) в (30) і зважаючи на (31), отримуємо

$$S_A = S(x)R(x)A(x)R(x)^\nabla T(x) = S(x)S_AT(x).$$

Розглянемо до матриць $P(x)^\nabla$, $Q(x)$ узагальнено зворотні відносно $r =$ $= \deg R(x)^\nabla + \deg S(x)^\nabla$, $m = \deg R(x)^\nabla + \deg T(x)$ відповідно. Із співвідношень (34) одержимо (32).

Достатність. Нехай мають місце співвідношення (30), (32) і (33). Розглянемо до матриць $\tilde{\tilde{P}}(x)^\nabla$ і $\tilde{\tilde{Q}}(x)$ зворотні матриці. Тоді з (32) одержимо оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)^\nabla$, $Q(x)$, підставивши які в (30), матимемо

$$S(x)R(x)A(x)R(x)^\nabla T(x) = S_A. \tag{35}$$

Домножаючи рівність (35) зліва на матрицю $S(x)^{-1}$ і справа на $T(x)^{-1}$ і враховуючи (33), отримуємо $R(x)A(x)R(x)^\nabla = S_A$.

Теорему доведено.

Теорема 6. *Для симетричного матричного многочлена* $A(x)$ *має місце*

$$RA(x)R^\nabla = S_A, \tag{36}$$

де матриця $R \in GL_n(\mathbb{C})$, *тоді і тільки тоді, коли для довільних оборотних матриць* $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ *із* (30) *мають місце співвідношення*

$$\tilde{P}(x)^\nabla = R^\nabla \tilde{S}(x)^\nabla, \qquad \tilde{Q}(x) = R^\nabla \tilde{T}(x) \tag{37}$$

і

$$S(x)S_AT(x) = S_A, \tag{38}$$

де матриці $\tilde{P}(x)$, $\tilde{Q}(x)$, $\tilde{S}(x)$ *і* $\tilde{T}(x)$ *— зворотні відповідно до матриць* $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$ *і* $T(x)$.

Доведення. *Необхідність.* Оскільки для $A(x)$ виконується (36), то для матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ існують матриці $S(x)$, $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$P(x)^\nabla = R^\nabla S(x)^\nabla, \qquad Q(x) = R^\nabla T(x).$$

Розглядаючи зворотні матричні многочлени до $P(x)^\nabla$ і $Q(x)$, легко бачити, що виконуються (37) і (38).

Достатність випливає з теореми 5.

Теорема 7. *Якщо еквівалентні симетричні матриці* $A(x)$ *і* $B(x)$ *є симетрично еквівалентними до їхніх форм Сміта* S_A *і* S_B *відповідно, то вони симетрично еквівалентні.*

Доведення. Нехай мають місце рівності

$$S_A = T(x)A(x)T(x)^\nabla, \qquad S_B = R(x)B(x)R(x)^\nabla, \tag{39}$$

де $T(x),\ R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, $A(x) = A(x)^{\nabla}$, $B(x) = B(x)^{\nabla}$.

Оскільки матриці $A(x)$ і $B(x)$ — еквівалентні, тобто $S_A = S_B$, то із співвідношень (39) маємо

$$B(x) = S(x)A(x)S(x)^{\nabla},$$

де $S(x) = R(x)^{-1}T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$.

Теорему доведено.

Теорема 8. *Нехай для симетричного матричного многочлена $A(x)$ і його форми Сміта S_A мають місце факторизації*

$$A(x) = B(x)CB(x)^{\nabla}, \qquad S_A = \Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla},$$

де матриця $B(x)$ лівоеквівалентна до форми Сміта $S_B = \Phi(x)$, а $C = C^{\nabla}$ — неособлива числова діагональна матриця з формою Сміта $S_C = I$. Тоді існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = S_A$.

Доведення. Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація, в якій $B(x)$ лівоеквівалентна до $S_B = \Phi(x)$, тобто існує матриця $S(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ така, що $B(x) = S(x)\Phi(x)$. Тоді

$$A(x) = S(x)\Phi(x)C\Phi(x)^{\nabla}S(x)^{\nabla}.$$

Відомо [5], що для матриці C маємо факторизацію вигляду $C = GIG^{\nabla}$, де G — неособлива числова матриця. Звідси, враховуючи $\Phi(x)G = G\Phi(x)$, маємо

$$A(x) = S(x)\Phi(x)GIG^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}S(x)^{\nabla} =$$
$$= S(x)G\Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla}G^{\nabla}S(x)^{\nabla} = R(x)S_AR(x)^{\nabla},$$

де матриця $R(x) = S(x)G \in GL_n(\mathbb{C}[x])$.

Теорему доведено.

1. *Любачевский Б. Д.* Одно представление симметрической многочленной матрицы // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1972. – **13**. – С. 41–45.
2. *Икрамов Х. Д.* Матричные пучки: Теория, приложения, числовые методы // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ. – М., 1991. – **29**. – С. 3–106.
3. *Зеліско В. Р.* Припустима факторизація і еквівалентність симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією // Алгебра і топологія. – Київ, 1993. – С. 53–62.
4. *Якубович В. А.* Факторизация симметричных матричных многочленов // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 3. – С. 532–535.
5. *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. Ч. I // Сиб. мат. журн. – 1973. – **14**, №2. – С.337–356.
6. *Андреев В. А., Шепелявый А. М.* Синтез оптимальных управлений для амплитудно импульсных систем в задаче минимизации среднего значения функционала квадратичного типа // Там же. – С. 250–276.
7. *Веселов А. П.* Интегрируемые лагранжевы соответствия и факторизация матричных многочленов // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – **25**, № 2. – С. 38–49.
8. *Петричкович В. М., Прокіп В. М., Прухницький Ф. А.* Про спільні унітальні дільники із заданою канонічною діагональною формою матричних многочленів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1994. – **37**. – С. 28–32.
9. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
10. *Зеліско В. Р.* Допустимі факторизації регулярних симетричних матриць над кільцями многочленів і квазімногочленів з інволюцією // Алгебра і топологія. – Львів, 1996. – С. 94–103.

Одержано 24.06.98,
після доопрацювання – 04.01.99