УДК 517.5

Ю. В. Бабенко (Днепропетров. ун-т)

ПОТОЧЕЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЛАНДАУ–КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

For arbitrary $t \in [0, 1]$, $s \in [1, \infty)$, and $A \geq 2$, we find the best possible constant B in the inequality

$$|x'(t)| \leq A\|x\|_{L_\infty[0,1]} + B\|x''\|_{L_s[0,1]}.$$

Для довільних $t \in [0, 1]$, $s \in [1, \infty)$ і $A \geq 2$ знайдено неполіпшувану константу B в нерівності

$$|x'(t)| \leq A\|x\|_{L_\infty[0,1]} + B\|x''\|_{L_s[0,1]}.$$

Пусть $L_p = L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство функций $x: [0, 1] \to \mathbf{R}$, суммируемых в p-й степени на отрезке $[0, 1]$ (существенно ограниченных при $p = \infty$), с нормой

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_0^1 |x(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}\{|x(\tau)|: \tau \in [0, 1]\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Как обычно, через $L_p^r = L_p^r[0,1]$, $r \in \mathbf{N}$, будем обозначать пространство функций $x: [0, 1] \to \mathbf{R}$, имеющих абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ и таких, что $x^{(r)} \in L_p[0, 1]$.

Как известно (см., например, [1]), для любых $1 \leq q, p, s \leq \infty$ и для любых r, $k \in \mathbf{N}$, $0 \leq k < r$, существуют константы $A > 0$ и $B > 0$ такие, что если $x \in L_p^r$, то

$$\|x^{(k)}\|_q \leq A\|x\|_p + B\|x^{(r)}\|_s. \tag{1}$$

Неравенства такого типа имеют важное значение для многих областей анализа и его приложений (см., например, [2]).

Мы будем рассматривать задачу о точных константах в неравенствах типа (1) при $q = p = \infty$ и любом $s \in [1, \infty]$, а также задачу о точных константах в неравенствах вида

$$|x^{(k)}(t)| \le A\|x\|_p + B\|x^{(r)}\|_s \tag{2}$$

при любом фиксированном $t \in [0, 1]$ и $p = \infty$.

Первые результаты о точных неравенствах вида (1) были получены Э. Ландау [3] для $q = p = s = \infty$, $k = 1$, $r = 2$. Обзор дальнейших результатов о точных неравенствах вида (1) и (2) можно найти в [4].

Известно (см., например, [1]), что точная нижняя грань констант B таких, что с некоторой константой A неравенство (1) выполняется для всех функций $x \in L_p^r$, равна нулю. Вместе с тем точная нижняя грань констант A таких, что с некоторой константой B неравенство (1) имеет место для всех функций $x \in \in L_p^r$, строго положительна. Например, эта точная нижняя грань (обозначим ее через $A(r, k; q, p, s)$) не меньше точной константы $M(r-1, k : q, p)$ в неравенстве

$$\|P^{(k)}\|_q \le M\|P\|_p$$

для производных алгебраических многочленов P степени не выше $r-1$, причем в [5] доказано, что в действительности справедливо равенство

$$A(r, k; q, p, s) = M(r-1, k : q, p).$$

В этой связи естественная постановка задачи о точных константах в неравенстве (1) состоит в следующем (см., например, [4]). Для любого $A \ge A(r, k; q, p, s)$ найти точную нижнюю грань множества чисел B таких, что неравенство (1) выполняется для любой функции $x \in L_p^r$ (значение этой точной нижней грани будем обозначать через $B(A; r, k; q, p, s)$).

Аналогично [5], точная нижняя грань констант A таких, что неравенство (2) с некоторой константой B имеет место для любой функции $x \in L_p^r$ (эту точную нижнюю грань будем обозначать через $A(t; r, k; p, s)$), совпадает с точной константой $M(t; r-1, k; p)$ в неравенстве

$$|P^{(k)}(t)| \le M\|P\|_p$$

для алгебраических полиномов степени не выше $r-1$. Поэтому естественная постановка задачи о точных константах в неравенстве (2) состоит в следующем. Для любого $A \ge A(t; r, k; p, s)$ найти точную нижнюю грань множества чисел B таких, что неравенство (2) выполняется для любой функции $x \in L_p^r$ (значение этой точной нижней грани будем обозначать через $B(t; A; r, k; p, s)$).

Отметим, что

$$M(1, 1; \infty, \infty) = M(t; 1, 1; \infty, \infty) = 2. \tag{3}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема, которая ввиду замечания (3) дает полное решение задачи о неулучшаемых неравенствах вида (1) и (2) при $r = 2$, $k = 1$, $q = p = \infty$ и любом $s \in [1, \infty)$.

Теорема. *Для любой функции* $x \in L_\infty^2$, *любых* $p \in [1, \infty]$ *и* $t \in [0, 1/2]$ *при* $0 < h/2 \le t$ *имеет место неравенство*

$$|x'(t)| \le \frac{2}{h}\|x\|_\infty + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p'+1}\right)^{1/p'}\|x''\|_p. \tag{4}$$

Если же $1/2 \ge h/2 > t$, *то*

$$|x'(t)| \le \frac{2}{h}\|x\|_\infty + \frac{1}{h(p'+1)^{1/p'}}\left(t^{p'+1} + (h-t)^{p'+1}\right)^{1/p'} \|x''\|_p . \tag{5}$$

Неравенства (4) *и* (5) *неулучшаемы в том смысле, что при* $0 < h/2 \le t$

$$B(t; 2/h; 2, 1; \infty, p) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p'+1}\right)^{1/p'},$$

а при $1/2 \ge h/2 > t$

$$B(t; 2/h; 2, 1; \infty, p) = \frac{1}{h(p'+1)^{1/p'}}\left(t^{p'+1} + (h-t)^{p'+1}\right)^{1/p'} \|x''\|_p .$$

Из теоремы 1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Для любой функции* $x \in L^2_\infty$ *и любых* $p \in [1, \infty]$ *и* $0 < h \le 1$ *имеет место неравенство*

$$\|x'\|_\infty \le \frac{2}{h}\|x\|_\infty + \left(\frac{h}{p'+1}\right)^{1/p'} \|x''\|_p . \tag{6}$$

Неравенство (6) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$B(2/h; 2, 1; \infty, p) = \left(\frac{h}{p'+1}\right)^{1/p'}.$$

Доказательство теоремы. Сопоставим функции $x(t)$ ее среднее Стеклова с шагом h:

$$s_h(x, t) := \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} x(\tau)d\tau .$$

В случае, когда $t \in [0, 1/2]$ таково, что $h/2 \le t$, имеем

$$|x'(t)| = |x'(t) + s_h(x'; t) - s_h(x', t)| \le |x'(t) - s_h(x', t)| + |s_h(x', t)|.$$

Оценивая второе слагаемое, получаем

$$|s_h(x', t)| = \frac{1}{h}\left|\int_{t-h/2}^{t+h/2} x'(\tau)\,d\tau\right| = \frac{1}{h}|x(t+h/2) - x(t-h/2)| \le \frac{2}{h}\|x\|_\infty . \tag{7}$$

Оценим теперь первое слагаемое. Имеем

$$|x'(t) - s_h(x', t)| = \left|\int_0^1 x'(\tau)\,dg_1(\tau) - \int_0^1 x'(\tau)\,dg_2(\tau)\right|,$$

где

$$g_1(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < t; \\ 1, & \text{если } \tau \ge t, \end{cases}$$

и

$$g_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < t - \dfrac{h}{2}; \\ \dfrac{1}{h}\left(\tau - \left(t - \dfrac{h}{2}\right)\right) & \text{если } \tau \in \left[t - \dfrac{h}{2}, t + \dfrac{h}{2}\right]; \\ 1, & \text{если } \tau > t + \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|x'(t) - s_h(x', t)| =$$

$$= \left| \int_0^1 x'(\tau)\, d[g_1(\tau) - g_2(\tau)] \right| = \left| \int_0^1 x'(\tau)\, d\theta(\tau) \right|, \tag{8}$$

где $\theta(\tau) = g_1(\tau) - g_2(\tau)$, т. е.

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < t - \dfrac{h}{2}; \\ -\dfrac{1}{h}\left(\tau - \left(t - \dfrac{h}{2}\right)\right), & \text{если } \tau \in \left[t - \dfrac{h}{2}, t\right]; \\ -\dfrac{1}{h}\left(\tau - \left(t + \dfrac{h}{2}\right)\right), & \text{если } \tau \in \left[t, t + \dfrac{h}{2}\right]; \\ 0, & \text{если } \tau > t + \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Выполняя в последнем интеграле в (8) интегрирование по частям, а затем применяя неравенство Гельдера, имеем

$$|x'(t) - s_h(x', t)| = \left| \int_0^1 x''(\tau)\theta(\tau)\, d\tau \right| \le$$

$$\le \|x''\|_p \|\theta\|_{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p'+1}\right)^{1/p'} \|x''\|_p . \tag{9}$$

Сопоставляя соотношения (7) и (9), получаем, что в рассматриваемом случае имеет место неравенство

$$|x'(t)| \le \frac{2}{h}\|x\|_\infty + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p'+1}\right)^{\frac{1}{p'}} \|x''\|_p$$

и соотношение (4) доказано.

Покажем, что полученное неравенство является точным. Для этого определим функцию $x_1(t)$ следующим образом. Положим последовательно

$$x_1''(\tau) = |\theta(\tau)|^{p'-1} \operatorname{sgn} \theta(\tau),$$

$$x_1'(\tau) = \int_0^\tau x''(\xi)\, d\xi$$

и

$$x_1(\tau) = \int_t^\tau x'(\xi)\, d\xi .$$

Для этой функции, как нетрудно проверить, имеем

$$|x_1'(t)| = \frac{h}{2^{p'} p'},$$

$$\| x_1 \|_\infty = \frac{1}{p'(p'+1)h^{p'-1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{p'+1}$$

и

$$\| x_1'' \|_p = \frac{1}{2^{p'-1}} \frac{h^{1/p}}{(p'+1)^{1/p}},$$

а следовательно, для функции $x_1(t)$ неравенство (4) обращается в равенство.

Теперь рассмотрим случай $h/2 > t$ (напомним, что $t \in [0, 1/2]$). Пусть в этом случае

$$s_h(x, t) := \frac{1}{h}\int_0^h x(\tau)\, d\tau .$$

Как и ранее, имеем

$$| s_h(x', t) | \le \frac{2}{h} \| x \|_\infty$$

и, кроме того,

$$| x'(t) - s_h(x', t) | = \left| \int_0^1 x'(\tau)\, d\theta(\tau) \right| = \left| \int_0^1 x''(\tau)\theta(\tau)\, d\tau \right|,$$

где

$$\theta(\tau) = \begin{cases} -\dfrac{\tau}{h}, & \text{если } \tau \in [0, t); \\ \dfrac{h-t}{h} & \text{если } \tau \in [t, h]; \\ 0, & \text{если } \tau > h . \end{cases}$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$| x'(t) - s_h(x', t) | \le \| x'' \|_p \| \theta \|_{p'} =$$

$$= \frac{1}{h(p'+1)^{1/p'}} \left(t^{p'+1} + (h-t)^{p'+1} \right)^{1/p'} \| x'' \|_p .$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$| x'(t) | \le | x'(t) - s_h(x', t) | + | s_h(x', t) | \le$$

$$\le \frac{2}{h} \| x \|_\infty + \frac{1}{h(p'+1)^{1/p'}} \left(t^{p'+1} + (h-t)^{p'+1} \right)^{1/p'} \| x'' \|_p$$

и соотношение (5) доказано.

Докажем точность полученного неравенства. Для этого определим функцию $x_2(t)$ следующим образом. Положим последовательно

$$x_2''(\tau) = | \theta(\tau) |^{p'-1} \operatorname{sgn} \theta(\tau) ,$$

$$x_2'(\tau) = \int_h^\tau x_2''(\xi)\, d\xi$$

и

$$x_2(\tau) = \int_{\xi_0}^{\tau} x_2'(\xi)\,d\xi,$$

где точка ξ_0 выбрана так, чтобы имело место равенство

$$\max_{\tau\in[0,1]} x_2(\tau) = -\min_{\tau\in[0,1]} x_2(\tau).$$

Для этой функции, как нетрудно проверить, имеем

$$|x_2'(t)| = \frac{(h-t)^{p'}}{h^{p'-1}p'},$$

$$\| x_2 \|_\infty = \frac{1}{2}\frac{1}{h^{p'-1}p'}\left[-t^{p'+1} + \frac{t^{p'+1}}{p'+1} + t(h-t)^{p'} + \frac{(h-t)^{p'+1}}{p'+1}\right]$$

и

$$\|x_2''\|_p = \frac{1}{h^{p'-1}(p'+1)^{1/p}}\left(t^{p'+1} + (h-t)^{p'+1}\right)^{1/p},$$

и, следовательно, для функции $x_2(t)$ неравенство (5) обращается в равенство.

Теорема доказана.

1. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 38–49.
2. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Multivariate Approximation and Splines, ISNM. – Basel etc.: Birkhauser Verlag, 1997. – **125**. – P. 1–12.
3. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Functionen // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43–49.
4. *Shadrin A. Yu.* To the Landau–Kolmogorov problem on a finite-interval // Open Problems in Approxim. Theory (Proc. Int. Conf. Voneshta Voda, June 18–24, 1993). – P. 192–204.
5. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, заданных на конечном интервале // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 5. – С. 619–628.

Получено 29.01.99