УДК 512.64

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО МУЛЬТИПЛІКАТИВНІСТЬ КАНОНІЧНИХ ДІАГОНАЛЬНИХ ФОРМ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ. II

We investigate the structure of matrices over a domain of principal ideals which possess the property of multiplicativity of canonical diagonal forms.

Досліджується структура матриць над областю головних ідеалів, які мають властивість мультиплікативності канонічних діагональних форм.

Нехай R — область головних ідеалів; e — одиничний, 0 — нульовий елементи кільця R; $R_{m,n}$— множина $(m \times n)$-вимірних матриць над R, $m \geq 2$; I_k — одинична матриця порядку k. Матрицю $H \in R_{m,n}$ називатимемо d-матрицею, якщо

$$H = \left\| \begin{array}{ccccccc} h_1 & 0 & \ldots & & \ldots & & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & h_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & \ldots & & \ldots & & \ldots & 0 \end{array} \right\|,$$

де $h_j \neq 0$ для всіх $1 \leq j \leq k$ і $h_1 | h_2 | \ldots | h_k$, яку надалі записуватимемо так: $H = \operatorname{diag}(h_1, h_2, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0)$. Для матриці $A \in R_{m,n}$ $(\operatorname{rang} A = k)$ введемо позначення: d_A^j — н. с. д. мінорів j-го порядку матриці A, $1 \leq j \leq k$; існують матриці $U \in GL(m, R)$, $V \in GL(n, R)$ такі, що

$$F_A = UAV = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0) \tag{1}$$

— d-матриця, яку називають канонічною діагональною формою (к. д. ф.) матриці A. Очевидно, якщо для F_A матриці $A \in R_{m,n}$ існує факторизація $F_A = F_1 F_2$, де F_1 та F_2 — d-матриці, то для A існує факторизація $A = BC$ така, що $F_B = F_1$, а $F_C = F_2$. В [1] досліджувалась будова факторизацій неособливої матриці $A \in R_{n,n}$ у вигляді добутку неособливих матриць, для яких к. д. ф. добутку дорівнює добутку к. д. ф. матриць-співмножників. Дана робота є продовженням цих досліджень для матриць з $R_{m,n}$ при умові, що один із співмножників — неособлива матриця. Зауважимо, що отримані результати справедливі для матриць над областями елементарних дільників.

Теорема 1. *Нехай к. д. ф. матриці* $A \in R_{m,n}$ $(\operatorname{rang} A = k)$ *допускає зображення у вигляді добутку* d*-матриць, тобто* $F_A = UAV = F_1 F_2$, *де* $F_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_m) \in R_{m,m}$ — *неособлива матриця порядку* m, *а* $F_2 = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_k, 0, \ldots, 0)$.

Тоді для кожного розкладу матриці $A = BC$ *такого, що* $B \in R_{m,m}$, $\det B \neq 0$ *і* $F_B = F_1$, *а* $F_C = F_2$, *існують матриця* $W \in GL(m, R)$ *та нижня трикутна матриця* B_0 *порядку* $m - k$ *з к. д. ф.* $F_{B_0} = \operatorname{diag}(b_{k+1}, \ldots, b_m)$ *такі, що* $B = U^{-1} \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k, B_0) W$ *і* $W^{-1} F_2 V^{-1}$. (*Матриці* U *та* V *беруться із співвідношення* (1).)

Доведення. Нехай матриця $A \in R_{m,n}$ зображена у вигляді $A = BC$, де $B \in R_{m,m}$ — неособлива матриця з к. д. ф. F_1, $F_C = F_2$, тобто $F_A = F_B F_C$. Зауважимо

жимо, якщо $m < n$, то для A існує матриця $T \in GL(n, R)$ така, що $AT = \|A_1, O_m^{n-m}\|$, де $A_1 \in R_{m,m}$, а O_m^{n-m} — нульова $(m \times (n-m))$-вимірна матриця. Тоді $AT = BCT = B\|C_1, O_m^{m-n}\|$, де $C_1 \in R_{m,m}$. Якщо ж $m > n$, то з рівності $A = BC$ випливає $A_1 = \|A, O_m^{m-n}\| = B\|C, O_m^{m-n}\| = BC_1$, де $A_1, C_1 \in R_{m,m}$. Отже, при $m \neq n$ $d_A^k = d_{A_1}^k$ і $d_C^k = d_{C_1}^k$ для всіх $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, а дослідження будови матриць A, B та C зводиться до дослідження матриць порядку m, які отримані з A та C.

На підставі викладеного вище дану теорему досить довести для випадку $m = n$. Оскільки $UAV = F_A = UBCV$, то матриця $B_1 = UB$ елементарними перетвореннями стовпців зводиться до спеціального трикутного вигляду, тобто існує матриця $W \in GL(m, R)$ така, що

$$UBW = H_{B_1} = \begin{Vmatrix} h_{11} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & & \dots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ h_{m1} & h_{m2} & h_{m3} & \dots & & h_{mm} \end{Vmatrix}$$

— нижня трикутна матриця, причому h_{ii}, $i = 1, 2, \dots, m$, належать множині неасоційованих елементів із R, а h_{ij}, $i > j$, $i = 2, 3, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, m-1$, належать повній системі лишків за модулем h_{ii}, в якій нульовий клас зображено нулем області R. Матрицю H_{B_1} називають формою Ерміта матриці B_1. Отже,

$$F_A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_k, 0, \dots, 0) = F_B F_C = UBWW^{-1}CV =$$

$$= H_{B_1} G = \begin{Vmatrix} h_{11} & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & \dots & & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ h_{k1} & h_{k2} & & h_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mk} & \dots & & h_{mm} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} g_{11} & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \dots & & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ g_{k1} & g_{k2} & & g_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mk} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Застосувавши тепер до останньої рівності міркування, аналогічні доведенню леми з [1], завершуємо доведення теореми.

Зауважимо, що якщо матриця $A \in R_{m,n}$ зображена у вигляді $A = BC$, де $B \in R_{m,m}$, $\det B \neq 0$, і $F_A = F_B F_C$, то з доведення теореми 1 випливає існування матриць $U, W \in GL(m, R)$ та $V \in GL(n, R)$ таких, що $UAV = F_A$, $UBW = F_B$, $W^{-1}CV = F_C$. Крім того, якщо к. д. ф. F_A матриці $A \in R_{m,n}$ зображена у вигляді добутку d-матриць, тобто $F_A = UAV = F_1 F_2$, причому $F_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_m) \in R_{m,m}$ — неособлива матриця, то всі можливіфакторизації $A = BC$ такі, що $B \in R_{m,m}$ — неособлива матриця з к. д. ф. F_1, а $F_C = F_2$, з точністю до асоційованості описуються множиною нижніх трикутних матриць $\{B_0\}$ порядку $m - k$ з к. д. ф. $F_{B_0} = \operatorname{diag}(b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_m)$, які неасоційовані справа. Дана теорема дала можливість розширити умови єдиності (в належному розумінні) розглядуваних факторизацій (див., наприклад, [1, 2]).

***Наслідок* 1.** *Нехай к. д. ф. матриці* $A \in R_{m,n}$ $(\operatorname{rang} A = k)$ *зображена у вигляді добутку* d*-матриць, тобто* $F_A = F_1 F_2$, *де* $F_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_m) \in R_{m,m}$ — *неособлива матриця порядку* m, *а* $F_2 = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \dots, c_k,$

$0, \dots, 0)$, *причому якщо* $k < m-1$, *то* $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_m$.

Тоді з точністю до асоційованості існує лише одна факторизація матриці A *вигляду* $A = BC$, *де* $B \in R_{m,m}$ — *неособлива матриця з к. д. ф.* F_1, *а* $F_C = F_2$, *тобто якщо для матриці* A *існує ще одне зображення* $A = B_1 C_1$ *таке, що* $B_1 \in R_{m,m}$ — *неособлива матриця з к. д. ф.* F_1, *а* $F_{C_1} = F_2$, *то* $B_1 = BW$ *і* $C_1 = W^{-1}C$, *де* $W \in GL(m, R)$.

Нижче наведемо застосування теореми 1 до розкладу многочленних матриць над полем P на множники з наперед заданими к. д. ф.

Наслідок 2. *Нехай к. д. ф. матриці* $A(x) \in P_{m,n}[x]$ $(\operatorname{rang} A(x) = k)$ *зображена у вигляді* $F_A(x) = U(x)A(x)V(x) = \Phi(x)\psi(x)$, $U(x) \in GL(m, P[x])$, $V(x) \in GL(n, P[x])$, $\Phi(x)$ *та* $\psi(x)$ — d*-матриці, причому* $\Phi(x) = \operatorname{diag}(b_1(x), \dots, b_k(x), b_{k+1}(x), \dots, b_m(x))$ — *неособлива матриця і* $\deg\det\Phi(x) = mr$.

Для матриці $A(x)$ *існує факторизація* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in P_{m,m}[x]$ — *унітальна многочленна матриця степеня* r *з к. д. ф.* $\Phi(x)$, *а* $\psi(x)$ — *к. д. ф. матриці* $C(x)$, *тоді і тільки тоді, коли існує нижня трикутна матриця* $T(x)$ *порядку* $m-k$ *з к. д. ф.* $\operatorname{diag}(b_{k+1}(x), \dots, b_m(x))$ *така, що матриця* $M(x) = U^{-1}(x)\operatorname{diag}(b_1(x), b_2(x), \dots, b_k(x), T(x))$ *елементарними перетвореннями стовпців зводиться до унітальної многочленної матриці, тобто існує матриця* $W(x) \in GL(m, P[x])$ *така, що* $M(x)W(x) = I_m x^r - B_1 x^{r-1} - \dots - B_r$, $B_j \in P_{m,m}$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Нижче вкажемо умови, за яких для факторизації матриці $A = BC$, де $B \in R_{m,m}$ — неособлива матриця, виконується $F_A = F_B F_C$.

Теорема 2. *Нехай матриця* $A \in R_{m,n}$ $(\operatorname{rang} A = k)$ *з к. д. ф.* $F_A = UAV = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$, $U \in GL(m, R)$, $V \in GL(n, R)$, *зображена у вигляді* $A = BC$, *де* $B \in R_{m,m}$ — *неособлива матриця.*

Рівність $F_A = F_B F_C$ *виконується тоді і тільки тоді, коли матриця* UB *перетворенням стовпців зводиться до вигляду* $UBW = \operatorname{diag}(h_1, h_2, \dots, h_k, B_0)$, *де* $h_1 | h_2 | \dots | h_k | B_0$, *а* B_0 — *нижня трикутна матриця порядку* $m-k$ *і* $(a_j h_{j+1}) | (a_{j+1} h_j)$ *для всіх* $1 \le j < k-1$.

Доведення. *Необхідність* випливає з теореми 1.

Достатність. Нехай $A = BC$, де $B \in R_{m,m}$ — неособлива матриця. Нехай, далі, $F_A = UAV = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$, $UBW = \operatorname{diag}(h_1, h_2, \dots, h_k, B_0)$, де $h_1 | h_2 | \dots | h_k | B_0$, а B_0 — нижня трикутна матриця порядку $m-k$; $U, W \in GL(m, R)$, $V \in GL(n, R)$. Очевидно, що $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ — k перших інваріантних множників матриці B. Оскільки $F_A = UBCV = UBWW^{-1}CV$ і UBW — блочно-діагональна матриця, то з даної рівності випливає $W^{-1}CV = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0)$. Отже, $a_i = h_i c_i$, $1 \le i \le k$. Оскільки $(a_j h_{j+1}) | (a_{j+1} h_j)$, $1 \le j < k-1$, то легко переконатись в тому, що $c_j \mid c_{j+1}$, $1 \le j < k-1$. Таким чином, $W^{-1}CV = F_C$ і $F_A = F_B F_C$. Теорему доведено.

Якщо неособлива матриця $B \in R_{m,m}$ — лівий дільник матриці $A \in R_{m,n}$ $(\operatorname{rang} A = k)$, тобто $A = BC$, то F_B ділить F_A: $F_A = F_B \Psi$. Закономірно виникає запитання про те, коли $\psi = F_C$. Нижче буде дано відповідь на поставлене запитання. Відзначимо, що для неособливих матриць дане питання вивчалось в [3].

Нехай $A = BC$, де $B \in R_{m,m}$, $\det B \neq 0$. На підставі [4] легко показати, що для матриць A та B існують матриці $U, W \in GL(m, R)$ та $V \in GL(n, R)$ такі, що $UAV = F_A$ і

$$UBW = B_1 = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \ldots & \\ b_{m1} & b_{m2} & & \ldots & b_m \end{matrix} \right\|,$$

де $\operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_m) = F_B$, причому b_j, $1 \leq j \leq m$, належать множині неасоційованих елементів кільця R і $b_j \mid b_{ij}$ для всіх $m \geq i > j \geq 1$, а b_{lj} належать повній системі лишків за модулем b_l для всіх $m \geq l > j \geq 1$ (тобто матриця B_1 — форма Ерміта). Нехай $\operatorname{rang} A = r$. Отже,

$$F_A = UAV = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0) = UBWW^{-1}CV = B_1 C_1, \qquad (2)$$

де $C_1 = W^{-1}CV$ — нижня трикутна матриця. Помноживши в рівності (2) матрицю B_1 на ненульовий стовпець матриці C_1 та застосувавши до отриманої системи рівностей міркування, аналогічні таким, як і при доведенні наведених вище результатів, отримуємо твердження, сформульоване у наступному зауваженні.

***Зауваження* 1.** Нехай неособлива матриця $B \in R_{m,m}$ з к. д. ф. $F_B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_m)$ — лівий дільник матриці $A \in R_{m,n}$ з к. д. ф. $F_A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$, тобто $A = BC$. Якщо для деякого $\delta \in R$ такого, що $\delta \mid d_C^1$, виконується $(a_i/\delta, b_j) = b_i$ для всіх $i < j \leq k$, то $F_A = F_B F_C$.

Відмітимо, що якщо в зауваженні 1 виконується одна з умов:

1) $\operatorname{rang} A \geq m-1$ і $(a_i, b_j) = b_i$ для всіх $i < j \leq m$;

2) $\operatorname{rang} A = k < m-1$, $b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = b_m$, а $(a_i, b_j) = b_i$ для всіх $i < j \leq k$,

то матриця B своєю к. д. ф. визначена однозначно з точністю до асоційованості.

***Зауваження* 2.** Нехай неособлива матриця $B \in R_{m,m}$ є лівим дільником матриці $A \in R_{m,n}$, тобто $A = BC$. Нехай, далі, $k = m-1$, якщо $\operatorname{rang} A \geq m-1$ і $k = \operatorname{rang} A$, коли $\operatorname{rang} A < m-1$. Якщо $(\det B, d_A^k / d_B^k) = e$, то $F_A = F_B F_C$. Якщо ж $\operatorname{rang} A \geq m-1$, то матриця B однозначно (з точністю до асоційованості) визначена елементом $\det B$.

Враховуючи зауваження 2, легко показати, що якщо матриця $A \in R_{m,n}$, $\operatorname{rang} A = k$, допускає зображення $A = BC$, де $B \in R_{m,m}$ — неособлива матриця, для якої $(\det B, d_A^k / d_B^k) = e$, то $F_A = F_B F_C$. Звідси, як наслідок, випливає, що для неособливих матриць із взаємно простими визначниками к. д. ф. добутку дорівнює добутку к. д. ф. матриць-співмножників (див. [5]).

1. *Прокіп В. М.* До питання про мультиплікативність к. д. ф. матриць над областю головних ідеалів // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1581–1585.
2. *Боревич З. И.* О факторизации матриц над кольцом главных идеалов // Тез. докл. III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей (Тарту, сент. 1976 г.). – Тарту, 1976. – С. 19.
3. *Petrychkovych V.* A generalized equivalence of pair of matrices // Мат. ст. – 1997. – **8**, № 2. – С. 147–152.
4. *Забавский Б. В., Казимирский П. С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 256–258.
5. *Newman M.* Integral matrices. – New York.: Acad. Press, 1972. – 224 p.

Одержано 12.07.99