УДК 517.911

А. Е. Зернов (Одес. политехн. ун-т)

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЯВНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

We consider the Cauchy singular problem for a first order ordinary differential equation unsolvable with respect to a derivative of unknown function. We prove the existence of continuously differentiable solutions with required asymptotic properties.

Розглядається сингулярна задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке не розв'язане відносно похідної невідомої функції. Доводиться існування неперервно диференційовних розв'язків з потрібними асимптотичними властивостями.

В этой статье предлагаются две схемы рассуждений, которые дают возможность качественным путем (см., например, [1 – 5]) изучать асимптотику решений сингулярной задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции. Из работ, посвященных неявным дифференциальным уравнениям, отметим, например, [6, 2, 7], а сингулярные задачи рассматривались, например, в [1, 2, 4, 5, 8]. Автор намеренно выбрал для рассмотрения не самый общий случай, чтобы не усложнять доказательства теорем техническими деталями.

Рассматривается задача Коши

$$\alpha(t)x' = at + bx + \varphi(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha(t) = \sigma t + \omega(t)$, σ — постоянная, $\sigma > 0$, $\omega: (0,\tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $|\omega(t)| \le K_1 t^2$, $t \in (0,\tau)$, a, b — постоянные, $b \ne \sigma$, $b \ne 2\sigma$, $\varphi: D \to R$ — непрерывная функция,

$$D = \{(t,x,y): t \in (0,\tau), |x| < rt, |y| < r\},$$

$$|a| < r|b-\sigma|, \quad |\varphi(t,x,y)| \le K_2 t^2, \quad (t,x,y) \in D.$$

Определение. *Непрерывно дифференцируемая функция* $x: (0,\rho] \to R (0 < \rho < \tau)$ *называется* ρ*-решением задачи* (1), (2), *если*: 1) $(t, x(t), x'(t)) \in D$, $t \in (0,\rho]$; 2) x *тождественно удовлетворяет* (1) *при* $t \in (0,\rho]$; 3) $x(t) \to 0$ *при* $t \to +0$.

Обозначим через $U(\rho, M)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x: (0,\rho] \to R$, каждая из которых при $t \in (0,\rho]$ удовлетворяет условиям

$$|x(t) - ct| \le Mt^2, \quad |x'(t) - c| \le qMt, \tag{3}$$

где ρ, M — постоянные, $\rho \in (0,\tau)$, $M > 0$,

$$c = \frac{a}{b-\sigma}, \quad q = \frac{|b| + |b-2\sigma|}{\sigma} + 1.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*:

$$|\varphi(t,x_1,y) - \varphi(t,x_2,y)| \le Lt^\lambda |x_1 - x_2|, \quad (t,x_i,y) \in D,$$

$$|\varphi(t,x,y_1) - \varphi(t,x,y_2)| \le Lt^\lambda |y_1 - y_2|, \quad (t,x,y_i) \in D,$$

$$i \in \{1,2\},$$

причем если $b < \sigma$ *или* $b > 2\sigma$, *то* $\lambda = 1$, $L < \dfrac{\sigma|b-\sigma|}{|b-\sigma|+|b|}$, *а если* $\sigma < b < 2\sigma$, *то* $b/\sigma < \lambda < 2$. *Тогда существуют* ρ, M *такие, что*:

а) *если* $b > 2\sigma$, *то задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество* ρ*-решений* $x: (0,\rho] \to R$, *принадлежащих множеству* $U(\rho, M)$. *При этом при любом выборе постоянной* μ, *удовлетворяющей неравенству* $|\mu - c\rho| < M\rho^2$, *существует единственное* ρ*-решение* $x_\mu \in U(\rho, M)$ *такое, что* $x_\mu(\rho) = \mu$;

б) *если* $b < 2\sigma$, *то задача* (1), (2) *имеет единственное* ρ*-решение* $x: (0,\rho] \to R$, *принадлежащее множеству* $U(\rho, M)$.

Доказательство. Вначале выберем ρ, M. Пусть

$$M > \frac{K_1 + |c| K_2}{|b - 2\sigma|}, \tag{4}$$

Условия, определяющие выбор $\rho \in (0, \tau)$, здесь не приводятся ввиду ограниченности объема работы. Отметим лишь, что ρ достаточно мало и выбор ρ гарантирует законность всех последующих вычислений. Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x: [0,\rho] \to R$ с нормой $\|x\|_B = \max_{t\in[0,\rho]}(|x(t)| + |x'(t)|)$. Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $x: [0,\rho] \to R$ которого удовлетворяет при $t \in (0,\rho]$ неравенствам (3). Рассмотрим уравнение

$$x' = (\alpha(t))^{-1}(at + bx + \varphi(t, u(t), u'(t))), \tag{5}$$

где $u \in U$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $D_0 = \{(t,x): t \in (0,\rho],\ x \in R\}$. При $(t,x) \in D_0$ для (5) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Положим

$$\Phi_1 = \{(t,x): t \in (0,\rho],\ |x - ct| = Mt^2\},$$

$$D_1 = \{(t,x): t \in (0,\rho],\ |x - ct| < Mt^2\},$$

$$H = \{(t,x): t = \rho,\ |x - c\rho| < M\rho^2\}.$$

Пусть вспомогательная функция $A_1: D_0 \to [0, +\infty)$ определена равенством $A_1(t,x) = (x-ct)^2 t^{-4}$ и пусть $a_1: D_0 \to R$ — производная функции A_1 в силу уравнения (5). Легко видеть, что $\operatorname{sign} a_1(t,x) = \operatorname{sign}(b - 2\sigma)$, $(t,x) \in \Phi_1$. Рассмотрим последовательно два случая: 1) $b > 2\sigma$, 2) $b < 2\sigma$ ($b \neq \sigma$ по условию).

1. Пусть $b > 2\sigma$. Тогда интегральная кривая уравнения (5), пересекающая Φ_1 в любой точке (t_0, x_0), при малых $|t - t_0|$ лежит в D_1 при $t < t_0$ и вне $\overline{D_1}$ при $t > t_0$. Поэтому каждая из интегральных кривых (5), пересекающих H, лежит в D_1 при всех $t \in (0,\rho]$. Пусть $G(\rho, x_G)$ — любая точка множества H, а $J_G: (t, x_{uG}(t))$ — интегральная кривая (5), проходящая через точку G. Тогда $x_{uG}(\rho) = x_G$ и нетрудно доказать, что $x_{uG} \in U$, (x_{uG}, x'_{uG} доопределяем при $t = 0$, полагая $x_{uG}(0) = 0$, $x'_{uG}(0) = c$). Определим оператор $T_G: U \to U$, полагая $(T_G u)(t) = x_{uG}(t)$. Ввиду произвольности выбора точки $G \in H$, тем самым определено семейство $\boldsymbol{T} = \{T_G: G \in H\}$ операторов $T_G: U \to U$. Докажем, что все операторы $T_G \in \boldsymbol{T}$ сжимающие. Выбираем и фиксируем точку $G(\rho, x_G) \in H$ и функции $u_i \in U$, $i \in \{1,2\}$. Пусть $T_G u_i = x_i$, $i \in \{1,2\}$. Если $u_1 = u_2$, то $x_1 = x_2$. Пусть далее $\|u_1 - u_2\|_B = h$, $h > 0$. Тогда,.на основании изложенного, $x_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, и при $t \in (0, \rho]$ имеют место тождества

$$x_i'(t) = (\alpha(t))^{-1}(at + bx_i(t) + \varphi(t, u_i(t), u_i'(t))), \quad i \in \{1, 2\}. \tag{6_i}$$

Будем исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$x' = (\alpha(t))^{-1}(at + bx + \varphi(t, u_1(t), u_1'(t))). \tag{7}$$

Пусть

$$\Phi_2 = \{(t, x)\colon t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| = \eta h t^{\lambda}\},$$

$$D_2 = \{(t, x)\colon t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| < \eta h t^{\lambda}\},$$

где η — постоянная, определяемая таким образом:

$$\begin{cases} \dfrac{L}{|\sigma - b|} < \eta < \dfrac{\sigma - L}{|b|}, & \text{если} \quad b < \sigma, \ b \neq 0 \quad \text{или} \quad b > 2\sigma; \\ \eta > \dfrac{L}{\lambda\sigma - b}, & \text{если} \quad \sigma < b < 2\sigma; \\ \eta > \dfrac{L}{\sigma}, & \text{если} \quad b = 0. \end{cases}$$

Пусть вспомогательная функция $A_2 : D_0 \to [0, +\infty)$ определена равенством $A_2(t, x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2\lambda}$ и пусть $a_2 : D_0 \to R$ — производная функции A_2 в силу уравнения (7). Легко видеть, что $a_2(t, x) > 0$ при $(t, x) \in \Phi_2$. Поэтому интегральная кривая уравнения (7), пересекающая Φ_2 в любой точке (t_0, x_0), при малых $|t - t_0|$ лежит в D_2 при $t < t_0$ и вне $\overline{D}_2$ при $t > t_0$. При этом, согласно определению оператора $T_G : U \to U$, $x_1(\rho) = x_2(\rho) = x_G$. Поэтому если t уменьшается от $t = \rho$ до $t = 0$, то интегральная кривая $(t, x_1(t))$ уравнения (7) лежит в D_2. Это означает, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| < \eta h t^{\lambda}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{8}$$

На основании (8) из тождеств (6_i), $i \in \{1, 2\}$, следует, что

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| < \left(\frac{|b|\eta + L}{\sigma} + \gamma(t)\right) t^{\lambda - 1} h, \quad t \in (0, \rho], \tag{9}$$

где $\gamma : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — некоторая непрерывная функция, $\gamma(t) \to 0$ при $t \to +0$.

Полагая

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|b|\eta + L}{\sigma} + 1\right), & \text{если} \quad b < \sigma \quad \text{или} \quad b > 2\sigma; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad \sigma < b < 2\sigma, \end{cases}$$

из (8), (9) получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leq \theta h, \quad t \in (0, \rho], \tag{10}$$

где, очевидно, $0 < \theta < 1$. Так как $x_i(0) = 0$, $x_i'(0) = c$, $i \in \{1, 2\}$, то из (10) следует

$$\| x_1 - x_2 \|_B \leq \theta h. \tag{11}$$

В итоге доказано, что $\| T_G u_1 - T_G u_2 \|_B \leq \theta \| u_1 - u_2 \|_B$, где $0 < \theta < 1$. Проведенные рассуждения не зависят ни от выбора точки $G(\rho, x_G) \in H$, ни от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, все операторы $T_G \in \boldsymbol{T}$ — сжимающие.

2. Пусть $b < 2\sigma$. Тогда интегральная кривая (5), пересекающая Φ_1 в любой точке (t_0, x_0), при малых $|t - t_0|$ лежит в D_1 при $t > t_0$ и вне $\overline{D_1}$ при $t < t_0$. Поэтому (см., например, [4, с. 758]) хотя бы одна из интегральных кривых (5), пересекающих H, лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. Обозначим эту интегральную кривую через $J_0 : (t, x_u(t))$ и докажем, что такая интегральная кривая единственна. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi_3(\nu) = \{(t, x) \colon t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| = \nu t^2(-\ln t)\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, \nu_0]$. Пусть

$$D_3(\nu) = \{(t, x) \colon t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| < \nu t^2(-\ln t)\}, \quad \nu \in (0, \nu_0].$$

Пусть вспомогательная функция $A_3 : D_0 \to [0, +\infty)$ определена равенством

$$A_3(t, x) = (x - x_u(t))^2 (t^2(-\ln t))^{-2}$$

и пусть $a_3 : D_0 \to R$ — производная функции A_3 в силу уравнения (5). Легко видеть, что $a_3(t, x) < 0$ при $(t, x) \in D_0$, $x \neq x_u(t)$. Это означает, что для каждого $\nu \in (0, \nu_0]$ интегральная кривая (5), пересекающая $\Phi_3(\nu)$ в любой точке (t_0, x_0), при малых $|t - t_0|$ лежит в $D_3(\nu)$ при $t > t_0$ и вне $\overline{D}_3(\nu)$ при $t < t_0$. Отсюда и следует единственность $J_0 : (t, x_u(t))$ (см., например, [3, с. 758, 759]). Легко доказать, что $x_u \in U$ (доопределив x_u, x_u' при $t = 0$, полагая $x_u(0) = 0$, $x_u'(0) = c$). Определим оператор $T : U \to U$, полагая $(Tu)(t) = x_u(t)$, и докажем, что T — сжимающий оператор. С этой целью рассмотрим произвольные функции $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Пусть $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть далее $\|u_1 - u_2\|_B = h$, $h > 0$. Построим те же множества Φ_2, D_2, функцию A_2, что и в случае $b > 2\sigma$, и найдем производную $a_2 : D_0 \to R$ функции A_2 в силу уравнения (7). В рассматриваемом случае $a_2(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_2$. Поэтому интегральная кривая (7), пересекающая Φ_2 в любой точке (t_0, x_0), при малых $|t - t_0|$ лежит в D_2 при $t > t_0$ и вне $\overline{D}_2$ при $t < t_0$. При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \leq 2Mt^2 < \eta h t^{\lambda} \quad \text{при} \quad t \in (0, t(h)],$$

где $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мало. Поэтому интегральная кривая $(t, x_1(t))$ уравнения (7) лежит в D_2 при $t \in (0, t(h)]$. Из изложенного следует, что при возрастании t от $t = t(h)$ до $t = \rho$ интегральная кривая $(t, x_1(t))$ уравнения (7) расположена в D_2. Далее, как и в случае $b > 2\sigma$, получаем неравенства (8), (9), а затем (10). В итоге доказано, что $\|Tu_1 - Tu_2\|_B \leq \theta \|u_1 - u_2\|_B$, где $0 < \theta < 1$. Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, T — сжимающий оператор. Для завершения доказательства теоремы 1 остается применить к каждому из построенных операторов $T_G : U \to U$, $G \in H$, $T : U \to U$ принцип Банаха сжатых отображений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

$$|\varphi(t_1, x, y) - \varphi(t_2, x, y)| \leq L_t(\mu)|t_1 - t_2|, \quad (t_i, x, y) \in D, \quad 0 < \mu \leq t_1, t_2 < \tau,$$

$$|\varphi(t, x_1, y) - \varphi(t, x_2, y)| \leq L_x(t)|x_1 - x_2|, \quad (t, x_i, y) \in D,$$

$$|\varphi(t,x,y_1)-\varphi(t,x,y_2)| \le l_y\alpha(t)|y_1-y_2|, \quad (t,x,y_i)\in D, \quad i\in\{1,2\},$$

где $L_t\colon(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — *непрерывная функция,* $0<t_1<t_2<\tau \Rightarrow L_t(t_1)\ge L_t(t_2)$, $L_x\colon(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — *непрерывно дифференцируемая функция,* $L_x'(t)\le 0$, $t\in(0,\tau)$, $\lim_{t\to+0} tL_x'(t)L_x^{-1}(t) = l_x$, $-\infty\le l_x\le 0$; *если* $b<2\sigma$, *то* $(b-2\sigma)/\sigma < l_x\le 0$; l_y — *постоянная,* $0\le l_y<1$, $0<t_1<t_2<\tau\Rightarrow\omega(t_1)\le\omega(t_2)$,

$$|\omega(t_1)-\omega(t_2)| \le \Omega(\mu)|t_1-t_2|, \quad 0<\mu\le t_1,\, t_2<\tau,$$

где $\Omega\colon(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — *непрерывная функция,* $0<t_1<t_2<\tau\Rightarrow\Omega(t_1)\ge\Omega(t_2)$. *Тогда существуют постоянные* ρ, M *такие, что:*

а) *если* $b>2\sigma$, *то задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество* ρ-*решений* $x\colon(0,\rho]\to R$, *принадлежащих множеству* $U(\rho,M)$. *При этом при любом выборе постоянной* μ, *удовлетворяющей неравенству* $|\mu-c\rho|<M\rho^2$, *найдется хотя бы одно* ρ-*решение* $x_\mu\in U(\rho,M)$ *такое, что* $x_\mu(\rho)=\mu$;

б) *если* $b<2\sigma$, *то задача* (1), (2) *имеет хотя бы одно* ρ-*решение* $x\colon(0,\rho]\to R$, *принадлежащее множеству* $U(\rho,M)$.

Доказательство. Выбираем те же ρ, M, что и при доказательстве теоремы 1. Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x\colon[0,\rho]\to R$ с нормой $\|x\|_B = \max_{t\in[0,\rho]}(|x(t)|+|x'(t)|)$. Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $x\colon[0,\rho]\to R$ которого удовлетворяет при $t\in(0,\rho]$ неравенствам (3) и, кроме того, удовлетворяет условию: при любом выборе $\mu\in(0,\rho]$ и при любом выборе $t_i\in[\mu,\rho]$, $i\in\{1,2\}$, выполнено неравенство $|x'(t_1)-x'(t_2)|\le K(\mu)|t_1-t_2|$, в котором

$$K(\mu) = ((1-l_y)\alpha(\mu))^{-1}(L_t(\mu)+(L_x(\mu)+\Omega(\mu))(|c|+1)+|a|+(|b|+\sigma)(|c|+1)+1). \tag{12}$$

Нетрудно убедиться в том, что множество U замкнуто, ограничено и выпукло. Множество U компактно на основании критерия Арцела. Рассмотрим уравнение (5), где $u\in U$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $D_0 = \{(t,x)\colon t\in(0,\rho],\ x\in R\}$. При $(t,x)\in D_0$ для уравнения (5) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Рассмотрим те же множества Φ_1, D_1, H, что и при доказательстве теоремы 1. Определим функцию $A_1\colon D_0\to[0,+\infty)$ так же, как и при доказательстве теоремы 1, и обозначим через $a_1\colon D_0\to R$ производную функции A_1 в силу уравнения (5). Точно так же, как и при доказательстве теоремы 1, докажем, что $\operatorname{sign} a_1(t,x) = \operatorname{sign}(b-2\sigma)$, $(t,x)\in\Phi_1$. Последовательно рассмотрим оба возможных случая: 1) $b>2\sigma$, 2) $b<2\sigma$ (по условию $b\ne\sigma$).

1. Пусть $b>2\sigma$. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что каждая из интегральных кривых уравнения (5), пересекающих H, лежит в D_1 при $t\in(0,\rho]$. Пусть $G(\rho,x_G)$ — любая точка множества H, а $J_G\colon(t,x_{uG}(t))$ — интегральная кривая (5), которая проходит через точку G. Тогда $x_{uG}(\rho) = x_G$ и нетрудно показать, что $|x_{uG}(t)-ct|\le Mt^2$, $|x_{uG}'(t)-c|\le qMt$, $t\in(0,\rho]$. Доопределяем x_{uG}, x_{uG}' при $t=0$, полагая $x_{uG}(0)=0$, $x_{uG}'(0)=c$. Докажем теперь, что при любом выборе $\mu\in(0,\rho]$ и при любом выборе $t_i\in[\mu,\rho]$, $i\in\{1,2\}$, справедливо неравенство $|x_{uG}'(t_1)-x_{uG}'(t_2)|\le K(\mu)|t_1-t_2|$, где постоянная $K(\mu)$ определена равенством (12). Выберем и зафиксируем $\mu\in(0,\rho]$, $t_i\in[\mu,\rho]$, $i\in\{1,2\}$. Пусть, для определенности, $t_1<t_2$. Из тождеств

$$x'_{uG}(t_i) = (\alpha(t_i))^{-1}(at_i + bx_{uG}(t_i) + \varphi(t_i, u(t_i), u'(t_i))), \quad i \in \{1, 2\},$$

следует

$$|x'_{uG}(t_1) - x'_{uG}(t_2)| = (\alpha(t_2))^{-1}|\alpha(t_2)x'_{uG}(t_1) - \alpha(t_2)x'_{uG}(t_2)| \le$$
$$\le (\alpha(t_2))^{-1}(|\alpha(t_1)x'_{uG}(t_1) - \alpha(t_2)x'_{uG}(t_2)| + |x'_{uG}(t_1)||\alpha(t_1) - \alpha(t_2)|) \le$$
$$\le (\alpha(t_2))^{-1}(|a||t_1 - t_2| + |b||x_{uG}(t_1) - x_{uG}(t_2)| +$$
$$+ \left|\varphi(t_1, u(t_1), u'(t_1)) - \varphi(t_2, u(t_2), u'(t_2))\right| + \left|x'_{uG}(t_1)\right||\alpha(t_1) - \alpha(t_2)|\big) \le$$
$$\le (\alpha(t_2))^{-1}(|a||t_1 - t_2| + |b||x_{uG}(t_1) - x_{uG}(t_2)| +$$
$$+ L_t(\mu)|t_1 - t_2| + L_x(t_1)|u(t_1) - u(t_2)| +$$
$$+ l_y\alpha(t_1)|u'(t_1) - u'(t_2)| + |x'_{uG}(t_1)||\alpha(t_1) - \alpha(t_2)|) \le$$
$$\le l_y\frac{\alpha(t_1)}{\alpha(t_2)}|u'(t_1) - u'(t_2)| + k_0(\mu)|t_1 - t_2|,$$

где $k_0(\mu) = (1 - l_y)K(\mu)$.

Поскольку $\alpha(t_1) \le \alpha(t_2)$, $|u'(t_1) - u'(t_2)| \le K(\mu)|t_1 - t_2|$, то

$$|x'_{uG}(t_1) - x'_{uG}(t_2)| \le l_yK(\mu)|t_1 - t_2| + (1 - l_y)K(\mu)|t_1 - t_2| = K(\mu)|t_1 - t_2|.$$

Таким образом, $x_{uG} \in U$. Определим оператор $T_G: U \to U$, полагая $(T_Gu)(t) = x_{uG}(t)$. Поскольку выбор точки $G \in H$ произволен, определено семейство $\boldsymbol{T} = \{T_G: G \in H\}$ операторов $T_G: U \to U$. Докажем, что все операторы $T_G \in \boldsymbol{T}$ непрерывны на U. Выберем и зафиксируем точку $G(\rho, x_G) \in H$ и функции $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Пусть $T_Gu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть далее $\|u_1 - u_2\|_B = h$, $h > 0$. Очевидно, $x_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, и при $t \in (0, \rho]$ выполнены тождества (6_i). Исследуем поведение интегральных кривых уравнения (7). Пусть

$$\Phi_2 = \{(t, x): t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| = \eta L_x(t)t^{2-2\nu}h^\nu\},$$
$$D_2 = \{(t, x): t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| < \eta L_x(t)t^{2-2\nu}h^\nu\},$$

где ν — постоянная, $\nu \in (0, 1/2)$, η — постоянная, удовлетворяющая условию

$$\eta > \frac{(2M)^{1-\nu} + 1}{b - 2\sigma},$$

Пусть вспомогательная функция $A_2: D_0 \to [0, +\infty)$ определена равенством

$$A_2(t, x) = (x - x_2(t))^2(L_x(t)t^{2-2\nu})^{-2}$$

и пусть $a_2: D_0 \to R$ — производная функции A_2 в силу уравнения (7).

Поскольку

$$|u_1(t) - u_2(t)| = |u_1(t) - u_2(t)|^\nu|u_1(t) - u_2(t)|^{1-\nu} \le |u_1(t) - u_2(t)|^\nu \times$$
$$\times (|u_1(t) - ct| + |u_2(t) - ct|)^{1-\nu} \le \|u_1 - u_2\|_B^\nu(2Mt^2)^{1-\nu} = h^\nu(2Mt^2)^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho],$$

и

$$|u'_1(t) - u'_2(t)| = |u'_1(t) - u'_2(t)|^\nu|u'_1(t) - u'_2(t)|^{1-\nu} \le$$

$$\le \left|u_1'(t)-u_2'(t)\right|^{\nu}\left(|u_1'(t)-c|+|u_2'(t)-c|\right)^{1-\nu} \le$$

$$\le \|u_1-u_2\|_B^{\nu}(2qMt)^{1-\nu} = h^{\nu}(2qMt)^{1-\nu}, \quad t\in(0,\rho],$$

то

$$|\varphi(t,u_1(t),u_1'(t))-\varphi(t,u_2(t),u_2'(t))| \le L_x(t)|u_1(t)-u_2(t)| + l_y\alpha(t)|u_1'(t)-u_2'(t)| \le$$

$$\le L_x(t)h^{\nu}(2M)^{1-\nu}t^{2-2\nu}+l_yt\left(\sigma+\frac{\omega(t)}{t}\right)h^{\nu}(2qM)^{1-\nu}t^{1-\nu} \le$$

$$\le L_x(t)h^{\nu}t^{2-2\nu}\left((2M)^{1-\nu}+\frac{l_y}{L_x(\rho)}\left(\sigma+\frac{\omega(t)}{t}\right)(2qM)^{1-\nu}t^{\nu}\right) =$$

$$= L_x(t)h^{\nu}t^{2-2\nu}\left((2M)^{1-\nu}+\gamma_1(t)\right), \quad t\in(0,\rho], \tag{13}$$

где $\gamma_1:(0,\rho]\to(0,+\infty)$ — некоторая непрерывная функция, $\gamma_1(t)\to 0$ при $t\to+0$.

Поскольку

$$a_2(t,x) = 2\left(L_x(t)t^{2-2\nu}\right)^{-2}(\alpha(t))^{-1}\left((x-x_2(t))^2\left(b-2\frac{\alpha(t)}{t}(1-\nu)-\alpha(t)\frac{L_x'(t)}{L_x(t)}\right)+\right.$$

$$\left.+ (x-x_2(t))(\varphi(t,u_1(t),u_1'(t))-\varphi(t,u_2(t),u_2'(t)))\right), \tag{14}$$

причем $b>2\sigma$, $L_x'(t)\le 0$, $t\in(0,\rho)$, $\nu>0$, $\sigma>0$, то с помощью (13) нетрудно убедиться в том, что $a_2(t,x)>0$ при $(t,x)\in\Phi_2$. Поэтому интегральная кривая (7), пересекающая Φ_2 в любой точке (t_0,x_0), при малых $|t-t_0|$ лежит в D_2 при $t<t_0$ и вне $\overline{D}_2$ при $t>t_0$. При этом, в силу определения оператора T_G, $x_1(\rho)=x_2(\rho)=x_G$. Из изложенного следует, что при убывании t от $t=\rho$ до $t=0$ интегральная кривая $(t,x_1(t))$ уравнения (7) лежит в D_2 при всех $t\in$ $\in (0,\rho]$. Это означает, что

$$|x_1(t)-x_2(t)| \le \eta L_x(t)t^{2-2\nu}h^{\nu}, \quad t\in(0,\rho]. \tag{15}$$

Ввиду (15) из тождеств (6_i), $i\in\{1,2\}$, следует, что

$$|x_1'(t)-x_2'(t)| \le L_x(t)\gamma_2(t)h^{\nu}, \quad t\in(0,\rho], \tag{16}$$

где $\gamma_2:(0,\rho]\to(0,+\infty)$ — некоторая непрерывная функция, $\gamma_2(t)\to 0$, $t\to+0$.

Поскольку ρ достаточно мало, то из (15), (16) получаем

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|x_1'(t)-x_2'(t)| \le L_x(t)h^{\nu}, \quad t\in(0,\rho]. \tag{17}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству непрерывности оператора $T_G:U\to U$. Пусть $\varepsilon>0$ задано. Выберем $t(\varepsilon)\in(0,\rho)$ так, чтобы

$$2Mt^2+2qMt \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in(0,t(\varepsilon)].$$

Тогда для любых функций $u_i\in U$, $i\in\{1,2\}$,

$$|u_1(t)-u_2(t)|+|u_1'(t)-u_2'(t)| \le |u_1(t)-ct|+|u_2(t)-ct|+|u_1'(t)-c|+|u_2'(t)-c| \le$$

$$\le 2Mt^2+2qMt \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in(0,t(\varepsilon)].$$

В частности,

$$|x_1(t)-x_2(t)| + |x_1'(t)-x_2'(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in (0, t(\varepsilon)]. \tag{18}$$

Пусть теперь $t \in [t(\varepsilon), \rho]$. Поскольку $L_x'(t) \le 0$, $t \in (0, \tau)$, то $L_x(t) \le L_x(t(\varepsilon))$ при $t \in [t(\varepsilon), \rho]$, и поэтому из (17) следует

$$|x_1(t)-x_2(t)| + |x_1'(t)-x_2'(t)| \le L_x(t(\varepsilon))h^{\nu}, \quad t \in [t(\varepsilon), \rho]. \tag{19}$$

Пусть $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon/(2L_x(t(\varepsilon))))^{1/\nu}$. Если $h < \delta(\varepsilon)$, то из (19) имеем

$$|x_1(t)-x_2(t)| + |x_1'(t)-x_2'(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [t(\varepsilon), \rho]. \tag{20}$$

Кроме того, $x_i(0) = 0$, $x_i'(0) = c$, $i \in \{1, 2\}$. Из (18), (20) получаем

$$|x_1(t)-x_2(t)| + |x_1'(t)-x_2'(t)| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [0, \rho] \quad \text{и} \quad h < \delta(\varepsilon).$$

Поэтому

$$\| x_1 - x_2 \|_B \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad h < \delta(\varepsilon). \tag{21}$$

Таким образом, если $\| u_1 - u_2 \|_B = h < \delta(\varepsilon)$, то

$$\| T_G u_1 - T_G u_2 \|_B = \| x_1 - x_2 \|_B < \varepsilon.$$

Эти рассуждения не зависят ни от выбора точки $G \in H$, ни от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, ни от выбора $\varepsilon > 0$. Непрерывность всех операторов $T_G \in \boldsymbol{T}$ на U доказана.

2. Пусть $b < 2\sigma$. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что среди интегральных кривых уравнения (5), пересекающих H, только одна лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. Обозначим указанную интегральную кривую через $J_0 : (t, x_u(t))$. Легко видеть, что $|x_u(t) - ct| \le Mt^2$, $|x_u'(t) - c| \le qMt$, $t \in [0, \rho]$ (x_u, x_u' доопределены при $t = 0$; считаем, что $x_u(0) = 0$, $x_u'(0) = c$). С помощью тех же рассуждений, что и в случае $b > 2\sigma$, доказываем, что при любом выборе $\mu \in (0, \rho]$ и при любом выборе $t_i \in [\mu, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$, выполнено условие $|x_u'(t_1) - x_u'(t_2)| \le K(\mu)|t_1 - t_2|$, где постоянная $K(\mu)$ определена равенством (12). Следовательно, $x_u \in U$. Определим оператор $T : U \to U$, положив $(Tu)(t) = x_u(t)$. Докажем, что оператор T непрерывен на U. Выберем и зафиксируем функции $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Пусть $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то $x_1 = x_2$. Пусть теперь $\| u_1 - u_2 \|_B = h$, $h > 0$. Отметим, что $x_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, и при $t \in (0, \rho]$ выполнены тождества (6_i), $i \in \{1, 2\}$. Будем исследовать поведение интегральных кривых уравнения (7). С этой целью рассмотрим те же множества точек Φ_2, D_2, что и в случае $b > 2\sigma$, но в данном случае будем считать, что постоянная $\nu \in (0, 1/2)$ удовлетворяет условию $\nu < (\sigma l_x - b + 2\sigma)(2\sigma)^{-1}$, а η — постоянная, удовлетворяющая условию

$$\eta > \frac{(2M)^{1-\nu} + 1}{\sigma l_x - b + 2\sigma - 2\sigma\nu}.$$

Рассмотрим ту же, что и в случае $b > 2\sigma$, вспомогательную функцию $A_2 : D_0 \to [0, +\infty)$ и найдем ее производную $a_2 : D_0 \to R$ в силу уравнения (7). Повторяя вычисления, проведенные в случае $b > 2\sigma$, и принимая во внимание выбор ν и η, нетрудно убедиться в том, что $a_2(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_2$. Поэтому интегральная кривая (7), пересекающая Φ_2 в любой точке (t_0, x_0), при малых $|t - t_0|$ лежит в D_2 при $t > t_0$ и вне $\overline{D_2}$ при $t < t_0$. При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \le 2Mt^2 < \eta L_x(t) t^{2-2\nu} h^\nu$$

при $t \in (0, t(h)]$, где $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мало. Поэтому интегральная кривая $(t, x_1(t))$ уравнения (7) лежит в D_2 при $t \in (0, t(h)]$. Из изложенного ранее следует, что при возрастании t от $t = t(h)$ до $t = \rho$ интегральная кривая $(t, x_1(t))$ уравнения (7) остается в D_2. Теперь, как и в случае $b > 2\sigma$, получаем оценки (15) – (21). Таким образом, доказано, что если $\| u_1 - u_2 \|_B = h < \delta(\varepsilon)$ ($\delta(\varepsilon)$ — то же, что и в случае $b > 2\sigma$), то $\| Tu_1 - Tu_2 \|_B = \| x_1 - x_2 \|_B < \varepsilon$. Эти рассуждения не зависят ни от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, ни от выбора $\varepsilon > 0$. Непрерывность оператора $T\colon U \to U$ доказана.

Доказательство теоремы 2 заканчивается применением к каждому из построенных операторов $T_G\colon U \to U$, $G \in H$, $T\colon U \to U$ принципа неподвижной точки Шаудера.

1. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
2. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1974. – 472 с.
3. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 5. – С. 756 – 760.
4. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения. – 1971. – **7**, № 9. – С. 1575 – 1580.
7. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 9. – С. 79 – 84.
8. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1959. – № 8. – С. 155 – 198.

Получено 16.06.99