УДК 517.5
В. П. Моторный (Днепропетров. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

For classes of functions which are singular integrals of bounded functions, we study their pointwise approximation by algebraic polynomials. We obtain asymptotically exact estimates of approximants.

Досліджується поточкове наближення алгебраїчними многочленами класів функцій, які є сингулярними інтегралами від обмежених функцій. Отримано асимптотично точні оцінки наближень.

1. Введение. Пусть $\rho(x)$ — неотрицательная интегрируемая на отрезке $[-1, 1]$ функция и H — некоторый класс функций f, заданных на этом же отрезке, для которых существует в смысле главного значения интеграл

$$S_\rho(f)(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\rho(t)\,dt, \quad x\in(-1,1). \tag{1.1}$$

Для некоторых весовых функций $\rho(x)$ и классов H задачи об аппроксимации сингулярных интегралов (1.1) исследовались, например, в работах [1–4]. Преобразование $S_\rho(f)$ можно рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции с функцией f, заданной на отрезке $[-1, 1]$. При этом суперпозиция $S_\rho(f)(\cos x)$ определенным образом выражается через функций тригонометрически сопряженную с индуцированной функцией $f(\cos x)$ или с функцией, которая определяется последней.

Рассмотрим конкретные весовые функции $\rho_{-1}(x) = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$, $\rho_1(x) = \left(1-x^2\right)^{1/2}$, $\rho_0(x) = 1$ и классы W_∞^r, $r>0$, функций $f_r(x)$, определяемых на отрезке $[-1, 1]$ равенством

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f(t)\,dt + P(x), \tag{1.2}$$

где $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, функция $f(t)$ измерима и $|f(t)|\le 1$ почти всюду, а $P(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $[r-1]$ ($[a]$ — целая часть a). Обозначим через $\hat{W}_\infty^r$, (соответственно $\breve{W}_\infty^r$, $\overline{W}_\infty^r$), классы функций $S_\rho(f)$, представимых сингулярным интегралом (1.1) с весом $\rho_{-1}(t)$ (соответственно с весом $\rho_1(t)$ и $\rho_0(t)$), где $f\in W_\infty^r$.

Основными результатами работы являются оценки приближения функций классов $\hat{W}_\infty^r$, $\breve{W}_\infty^r$ и $\overline{W}_\infty^r$ с учетом положения точки на интервале (–1, 1) алгебраическими многочленами.

Возникновение и исследование проблемы об определении точной асимптотики поточечного приближения классов непериодических функций алгебраическими многочленами обусловлено работой С. М. Никольского [5], в которой построен линейный метод $L_n(f;x)$ приближения функций из класса W_∞^1 такой, что

$$|f(x)-L_n(f;x)| \le \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\left(\frac{|x|\ln n}{n^2}\right), \tag{1.3}$$

и показано, что константу $\pi/2$ в неравенстве (1.3) уменьшить нельзя.

История дальнейшего продвижения в этом направлении хорошо известна специалистам (см., например, [6–13]).

Приведем некоторые результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Для любого числа* $r > 0$ *и любой функции* $f \in \hat{W}^r_\infty$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$, $n \geq r+1$, *такая, что*

$$|f(x)-P_n(x)|\sqrt{1-x^2} \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-1}\right), \quad (1.4)$$

где

$$\tilde{K}_r = \frac{4\cos r\pi/2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad \text{если } 0 < r \leq \frac{1}{2}, \quad \text{и}$$

$$\tilde{K}_r = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left\{(2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right\}}{(2m+1)^{r+1}}\right|, \quad \text{если } r > \frac{1}{2},$$

а $\gamma_r \in (0, \pi]$ *является корнем уравнения*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\{(2m+1)\gamma_r - r\pi/2\}}{(2m+1)^r} = 0.$$

Величина C_r *зависит только от* r.

При этом следует отметить (и этим будем пользоваться), что отношение $\tilde{K}_r/n^r$ — величина наилучшего приближения функции

$$\tilde{D}_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kt - r\pi/2)}{k^r}$$

тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в интегральной метрике. Этот важный результат был получен в работах Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [14] при натуральных r, С. Б. Стечкина [15] при $0 < r \leq 1/2$, Сунь Юн-шена [16] при нецелых $r > 1$ и В. К. Дзядыка [17] при $1/2 < r < 1$.

Теорема 2. *Для любого числа* $r > 0$ *и любой функции* $f \in \tilde{W}^r_\infty$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$, $n \geq r+1$, *такая, что*

$$|f(x)-P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r}\right), \quad (1.5)$$

где величина C_r *зависит только от* r.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \overline{W}^r_\infty$, $r = 1, 2, \ldots$, *и на концах отрезка* $[-1, 1]$ *функция* $f(x)$ *и все ее производные до* $r-1$ *порядка обращаются в нуль. Тогда существует последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$, $n \geq r$, *такая, что*

$$|\bar{f}(x)-P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+1/n\right)^{r-1}}{n^{r+1}}\right), \quad (1.6)$$

где величина C_r *зависит только от* r.

В случае целых r покажем, что константу $\tilde{K}_r$ в неравенствах (1.4)–(1.6) уменьшить нельзя, а множитель $\ln n$ в правых частях неравенств (1.4), (1.5) можно опустить.

2. Вспомогательные определения и результаты. 1. Если функция $f \in W_\infty^r$, а функция $\rho(t)$ ограничена на любом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$, то

$$\forall x \in (-1, 1) \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\rho(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(\cos t)}{\cos t - x}\rho(\cos t)\sin t\, dt, \tag{2.1}$$

где интеграл справа также понимается в смысле главного значения. Из (2.1), используя равенство

$$\cot\frac{1}{2}(x-t) + \cot\frac{1}{2}(x+t) = \frac{2\sin x}{\cos t - \cos x}, \quad t \neq x,$$

для любой функции $\hat{f} \in \hat{W}_\infty^r$ получаем

$$\hat{f}(\cos x) = \frac{1}{\pi \sin x}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos t)}{2\tan(x-t)/2}dt = \frac{1}{\sin x}C(f(\cos t))(x), \tag{2.2}$$

где через $C(f)(x)$ обозначена функция тригонометрически сопряженная с $f(x)$.

Для любой функции $\breve{f} \in \breve{W}_\infty^r$ из равенства

$$\cot\frac{1}{2}(x-t) - \cot\frac{1}{2}(x+t) = \frac{2\sin t}{\cos t - \cos x}, \quad t \neq x,$$

следует соотношение

$$\breve{f}(\cos x) = C(f(\cos t)\sin t)(x). \tag{2.3}$$

Поскольку для любой функции $\bar{f} \in \bar{W}_\infty^r$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

то из (2.2) следует равенство

$$\bar{f}(\cos x) = \frac{1}{\sin x}C(f(\cos t)|\sin t|)(x).$$

Если же $\bar{f}$ представить в виде

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)/\sqrt{1-t^2}}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

то, учитывая (2.3), получаем

$$\bar{f}(\cos x) = C(f(\cos t)\operatorname{sign}\sin t)(x). \tag{2.4}$$

Отметим также, что для любого алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени n $S_{\rho-1}(P_n)(x)$ — многочлен степени $n-1$, в частности, $S_{\rho-1}(1)(x) = 0$, а $S_{\rho_1}(P_n)(x)$ — многочлен степени $n+1$, в частности, $S_{\rho_1}(1)(x) = -x$. Поэтому, не теряя общности в решении задач аппроксимации классов $\hat{W}_\infty^r$ и $\breve{W}_\infty^r$, можно считать, что в (1.2) $P(x) = 0$.

***Замечание* 1.** В этой статье для обозначения тригонометрически сопряженной функции будем использовать как символ $\bar{f}$, так и $C(f)$, причем последний будем использовать для сложно записываемых функций, например, как в правых частях равенств (2.3), (2.4).

2. Для любой суммируемой 2π-периодической функции f положим

$$I_r f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_r(x-t)\,dt, \qquad I_0 f(x) = f(x),$$

где

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - r\pi/2)}{k^r}, \quad r \text{ — натуральное},$$

— ядро Бернулли.

Если f в среднем равна нулю, то $f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^r I_r f(x)$. В общем случае

$$\frac{d}{dx} I_r f(x) = I_{r-1} f(x), \quad r > 1,$$

и

$$\frac{d}{dx} I_1 f(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

При этом функция, тригонометрически сопряженная с $I_r f(x)$, представима виде

$$C(I_r f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \tilde{D}_r(x-t)\,dt.$$

Обозначим через $\tilde{E}_n(f)_p$ наилучшее приближение функции f тригон метрическими многочленами степени не выше $n-1$ в пространстве C, ес $p=\infty$, и в пространстве L_1, если $p=1$. Известное неравенство

$$\tilde{E}_n(C(I_r f))_p \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r} \tilde{E}_n(f)_p \qquad (2.$$

в случае целых r является следствием [6, с. 331] известных теорем Н. И. Ах езера, С. Г. Крейна [14], если $p=\infty$, и С. М. Никольского [18], если $p=1$. Д нецелых r неравенство (2.5) вытекает из результатов С. Б. Стечкина [15], Су Юн-шена [16] и В. К. Дзядыка [17]. Впервые, по-видимому, неравенство ти (2.5) было получено Сунь Юн-шеном [16].

3. В этом пункте рассмотрим некоторые свойства сопряженных функций.

Лемма 1. *Для любого натурального числа k и для любой функции f, д которой существует $C(f)$, имеет место равенство*

$$C\left(\sin^k t f(t)\right)(x) = \sin^k x\, C(f)(x) + T_k(x), \qquad (2.$$

где $T_k(x)$ — тригонометрический полином степени не выше k.

Доказательство. Пусть $k=1$ и A_n, B_n — коэффициенты Фурье функц $C(\sin t f(t))(x)$, A'_n, B'_n, — коэффициенты Фурье функции $\sin x\, C(f)(x)$. Д их сравнения применим формулу Рисса [19, с. 568]:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{u}(x) v(x)\,dx = -\int_0^{2\pi} u(x) \tilde{v}(x)\,dx.$$

Тогда для $n = 1, 2, \ldots$

$$\pi B_n = \int_0^{2\pi} C(\sin tf(t))(x) \sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin x f(x) \cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)(\cos(n+1)x - \cos(n-1)x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin x \tilde{f}(x) \sin nx\, dx = \pi B_n'.$$

Аналогично для $n = 2, 3, \ldots$ получаем

$$\pi A_n = \int_0^{2\pi} C(\sin t f(t))(x) \cos nx\, dx = -\int_0^{2\pi} \sin x f(x) \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(n+1)x - \cos(n-1)x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin x \tilde{f}(x) \cos nx\, dx = \pi A_n'.$$

Пусть теперь $n = 1$; тогда

$$\pi A_1 = \int_0^{2\pi} C(\sin tf(t))(x) \cos x\, dx = -\int_0^{2\pi} \sin x f(x) \sin x\, dx =$$

$$= -\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{\pi a_0}{2} + \int_0^{2\pi} \sin x \tilde{f}(x) \cos x\, dx = -\frac{\pi a_0}{2} + \pi A_1'.$$

Очевидно, что $A_0 = 0$, а

$$\pi A_0' = \int_0^{2\pi} \sin x \tilde{f}(x)\,dx = \pi a_1.$$

Следовательно,

$$C(\sin tf(t))(x) = \sin x C(f)(x) - \frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2}\cos x,$$

где a_0, a_1 — соответствующие коэффициенты Фурье функции f. Предположим, что равенство (2.6) имеет место для индекса $k = m$. Тогда

$$C\left(\sin^{m+1} tf(t)\right)(x) = \sin x C\left(\sin^m tf(t)\right)(x) + T_1(x) =$$

$$= \sin x\left(\sin^m x C(f)(x) + T_m(x)\right) + T_1(x) = \sin^{m+1} x C(f)(x) + T_{m+1}(x).$$

Следовательно, в силу принципа математической индукции оно верно для любого натурального k. Лемма доказана.

***Замечание* 2.** Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C, а константы, зависящие от параметра r, — через C_r, хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

Лемма 2. *Пусть тригонометрический полином $T_n(x)$ степени не выше n удовлетворяет условию*

$$|T_n(x)| \le M\left(|\sin x| + \frac{1}{n}\right)^{\rho-1}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \rho \in (0, 1]. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\left|\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x)\right| \le MCn\left(|\sin x|+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}, \quad x\in[-\pi,\pi], \tag{2.8}$$

где $\tilde{T}_n(x)$ *— тригонометрический полином, сопряженный с* $T_n(x)$.

Доказательство. Многочлен $\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x)$ можно представить в следующем виде [20, с. 195]:

$$\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x) = \frac{2n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\cos nt\, K_{n-1}(t)\,dt,$$

где

$$K_{n-1}(t) = \frac{\sin^2 nt/2}{2n\sin^2 t/2}$$

— ядро Фейера. Тогда, используя условие (2.7), получаем

$$\left|\frac{d}{dx}\tilde{T}_n(x)\right| \le \frac{2n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x+t)|\,K_{n-1}(t)\,dt \le$$

$$\le \frac{2nM}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(|\sin(x+t)|+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}K_{n-1}(t)\,dt +\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\left(|\sin(x-t)|+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}K_{n-1}(t)\,dt\right) = \frac{2Mn}{\pi}(I_1+I_2).$$

Поскольку правая часть является π-периодической функцией, симметричной относительно точки $\pi/2$, то достаточно оценить интегралы для $x\in[0,\pi/2]$. Если $x\in[0,1/n]$, то $(|\sin(x\pm t)|+1/n)^{\rho-1}\le n^{1-\rho}$ и

$$I_1+I_2\le Cn^{1-\rho}. \tag{2.9}$$

Если $x\in[\pi/4,\pi/2]$, то $|\sin(x\pm t)|\ge\sin\pi/8$ при условии, что $t\in[0,\pi/8]$. Тогда

$$I_1+I_2\le C. \tag{2.10}$$

Пусть теперь $x\in[1/n,\pi/4]$. Чтобы оценить интеграл I_1, заметим, что $\sin(x+t)\ge\sin x$, если $t\in[0,\pi-2x]$. Тогда

$$I_1\le\int_0^{\pi-2x}\left(\sin x+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}K_{n-1}(t)\,dt+\int_{\pi/2}^{\pi}n^{1-\rho}K_{n-1}(t)\,dt\le$$

$$\le C\left(\sin x+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}+Cn^{-\rho}. \tag{2.11}$$

Оценим интеграл I_2:

$$I_2\le\int_0^{x/2}\left(|\sin(x-t)|+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}K_{n-1}(t)\,dt+\int_{x/2}^{\pi}\left(|\sin(x-t)|+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}K_{n-1}(t)\,dt\le$$

$$\le\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}+Cn^{-\rho}x^{-1}\le C\left(\sin x+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}. \tag{2.12}$$

Из (2.9)–(2.12) следует (2.8). Лемма доказана.

4. Докажем несколько вспомогательных утверждений о поточечном приближении периодических функций тригонометрическими полиномами.

Лемма 3. *Если* 2π*-периодическая функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\Delta_t^2 f(x)\right| \le Ct^{1+\rho}(|\sin x|+t)^{\rho-1}, \quad \rho\in(0,1], \tag{2.13}$$

то

$$\left|f(x)-D_{n,2}(f,x)\right| \le C\frac{(|\sin x|+1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}, \tag{2.14}$$

где

$$D_{n,2}(f,x) = b(n)\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))K_{s-1}^2(t)\,dt$$

— многочлены Джексона [21, с. 115], $b(n)\asymp 1/n$, $s-1=[n/2]$.

Доказательство. Предположим, что $|\sin x|>1/n$. Тогда

$$\left|f(x)-D_{n,2}(f,x)\right| = b(n)\left|\int_0^{\pi}\Delta_t^2 f(x)K_{s-1}^2(t)\,dt\right| \le$$

$$\le Cb(n)\left[\int_0^{|\sin x|}|\sin x|^{\rho-1}t^{\rho+1}K_{s-1}^2(t)\,dt + n^{-2}\int_{|\sin x|}^{\pi}t^{2\rho-4}\,dt\right] \le C|\sin x|^{\rho-1}n^{-\rho-1}. \tag{2.15}$$

Если $|\sin x|\le 1/n$, то

$$\left|f(x)-D_{n,2}(f,x)\right| \le Cb(n)\int_0^{\pi}t^{2\rho}K_{s-1}^2(t)\,dt \le Cn^{-2\rho}. \tag{2.16}$$

Из оценок (2.15) и (2.16) следует неравенство (2.14).

Пусть $\rho\in(0,1)$, $f_\rho\in W_\infty^\rho$ и

$$S_0(x) = \int_0^{\pi}\left[D_\rho(u-x)+D_\rho(u+x)\right]\sin^\rho u f(\cos u)\,du.$$

Обозначим через $R_0(x)$ разность $f_\rho(\cos x)-S_0(x)$. В работе [22] доказано, что функция $R_0(x)$ удовлетворяет условию (2.13). Следовательно, в силу леммы 3

$$\left|R_0(x)-D_{n,2}(R_0,x)\right| \le C\frac{(|\sin x|+1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}. \tag{2.17}$$

Лемма 4. *Предположим, что для производной* $f'(x)$ 2π*-периодической абсолютно непрерывной функции* $f(x)$ *существует тригонометрический полином степени не выше* n *такой, что*

$$|f'(x)-T_n(x)| \le L_n(|\sin x|+1/n)^{k-1},$$

где $k>0$, *а величина* L_n *зависит только от* n. *Тогда существует тригонометрический полином* $Q_n(x)$ *степени не выше* n *такой, что*

$$|f(x)-Q_n(x)| \le L_n d_k\frac{(|\sin x|+1/n)^{k-1}}{n},$$

где d_k *зависит только от* k.

Доказательство. В случае $k>1$ оно близко к приведенному в работе [23] (см. лемму 2). Пусть a_0 — нулевой коэффициент многочлена $T_n(x)$ и $F(x) = I_1(f'-T_n+a_0) = f(x)-P_n(x)$, где $P_n(x)$ — тригонометрический полином степени не выше n. Оценим вторую разность с шагом $t>0$ функции $F(x)$:

$$\left|\Delta_t^2 F(x)\right| = t\left|f'(x+h_1)-T_n(x+h_1)-f'(x+h_2)+T_n(x+h_2)\right| \le$$

$$\le 2t\max_{x-t\le u\le x+t}\left|f'(u)-T_n(u)\right| \le 2tL_n\max_{x-t\le u\le x+t}\left(|\sin u|+\frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

Если $k\ge 1$, то очевидно, что

$$\max_{x-t\le u\le x+t}\left(|\sin u|+\frac{1}{n}\right)^{k-1} \le d_k\left(|\sin x|^{k-1}+t^{k-1}+\frac{1}{n^{k-1}}\right)$$

и, следовательно,

$$\left|\Delta_t^2 F(x)\right| = tL_n d_k\left(|\sin x|^{k-1}+t^{k-1}+\frac{1}{n^{k-1}}\right). \tag{2.18}$$

Функцию $f(x)=F(x)+P_n(x)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $Q_n(x) = D_{n,k_0}(F;x)+P_n(x)$, где $D_{n,k_0}(F;x)$ — обобщенные многочлены Джексона (см. [24; 25, с. 57]):

$$D_{n,k_0}(F;x) = \int_0^\pi (F(x+t)+F(x-t))K_{n,k_0}(t)\,dt,$$

где

$$K_{n,k_0}(t) = b_s\left(\frac{\sin st/2}{\sin t/2}\right)^{2k_0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi}K_{n,k_0}(t)\,dt = 1, \quad s-1 = \left[\frac{n}{k_0}\right],$$

$$k+4 > 2k_0 > k+1.$$

Тогда, используя (2.18), получаем

$$|f(x)-Q_n(x)| = \left|F(x)-D_{n,k_0}(F;x)\right| = \int_0^\pi \Delta_t^2F(x)K_{n,k_0}(t)\,dt \le$$

$$\le L_n d_n\int_0^\pi\left(|\sin x|^{k-1}+t^{k-1}+\frac{1}{n^{k-1}}\right)tK_{n,k_0}(t)\,dt \le L_n d_k\left(\frac{|\sin x|^{k-1}}{n}+\frac{1}{n^k}\right).$$

Пусть теперь $k\in(0,1)$. Прежде всего отметим, что

$$\max_{x-t\le u\le x+t}\left(|\sin u|+\frac{1}{n}\right)^{k-1} \le n^{1-k} \quad \forall\, x,t\in[0,\pi]. \tag{2.19}$$

Поскольку функция $(|\sin x|+1/n)^{k-1}$ имеет период π, то достаточно рассмотреть случай $x\in(0,\pi)$. Тогда

$$\max_{x-t\le u\le x+t}\left(|\sin u|+\frac{1}{n}\right)^{k-1} \le 2^{1-k}\sin^{k-1}x, \tag{2.20}$$

когда $x\in(0,\pi/2)$ и $0<t\le x/2$ или $x\in[\pi/2,\pi)$ и $0<t\le(\pi-x)/2$. Положим $Q_n(x)=D_{n,2}(F;x)+P_n(x)$. Если $|\sin x|\le 1/n$, то из неравенства (2.19) следует оценка $\left|\Delta_t^2F(x)\right|\le 2L_ntn^{1-k}$ и поэтому

$$|f(x)-Q_n(x)| = \left|F(x)-D_{n,2}(F;x)\right| \le L_n dn^{-k}. \tag{2.21}$$

Пусть теперь $|\sin x| > 1/n$. Тогда, используя неравенства (2.19), (2.20), для $x \in (0, \pi/2)$ получаем

$$|f(x) - Q_n(x)| \le \int_0^\pi \left|\Delta_t^2 F(x)\right| K_{n,2}(t)\,dt \le$$

$$\le L_n d\left(\int_0^{x/2} \sin^{k-1} x t K_{n,2}(t)\,dt + \int_{x/2}^{\pi} n^{1-k} t K_{n,2}(t)\,dt\right) \le$$

$$\le L_n d\left(\frac{\sin^{k-1} x}{n} + n^{-2-k} \sin^{-2} x\right) \le L_n d\frac{\sin^{k-1} x}{n}. \tag{2.22}$$

Случай $x \in [\,\pi/2, \pi)$ аналогичен. Из неравенств (2.21), (2.22) следует утверждение леммы 4 для $k \in (\,0, 1)$.

Лемма 2.5. *Предположим, что для функции f существует последовательность тригонометрических полиномов $T_n(x)$ таких, что*

$$|f(x) - T_n(x)| \le C\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}, \quad \rho \in (0, 1]. \tag{2.23}$$

Тогда существует последовательность тригонометрических полиномов $Q_n(x)$ и постоянная C_ρ такие, что

$$|\,\tilde{f}(x) - Q_n(x)| \le C_\rho \frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}. \tag{2.24}$$

Доказательство. Можно считать, что функция f ортогональна константе. Обозначим через $F(x)$ ее первообразную. Из условия (2.23), в силу леммы 4, следует существование последовательности тригонометрических полиномов $P_n(x)$ таких, что

$$|F(x) - P_n(x)| \le C\frac{(|\sin x| + 1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+2}}. \tag{2.25}$$

Пусть $S_n(x) = P_{2^{n+1}}(x) - P_{2^n}(x)$. Из (2.25), очевидно, следует оценка

$$|S_n(x)| \le C\frac{\left(|\sin x| + 1/2^n\right)^{\rho-1}}{2^{n(\rho+2)}}.$$

Применяя лемму 2 для полиномов $S_n(x)$, получаем

$$\left|\frac{d}{dx}\tilde{S}_n(x)\right| \le C\frac{\left(|\sin x| + 1/2^n\right)^{\rho-1}}{2^{n(\rho+1)}}. \tag{2.26}$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\tilde{F}(x) = \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\tilde{S}_k(x) + \frac{d}{dx}\tilde{P}_2(x).$$

Для $n \in [2^N, 2^{N+1})$ положим

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{d}{dx}\tilde{S}_k(x) + \frac{d}{dx}\tilde{P}_2(x).$$

Из неравенства (2.26) следует оценка

$$|\tilde{f}(x)-Q_n(x)| \le C\sum_{k=N}^{\infty}\left(|\sin x|+\frac{1}{2^k}\right)^{\rho-1}2^{-k(\rho+1)}.$$

Если $|\sin x|\le 1/n$, то левая часть не превышает $C_\rho n^{-2\rho}$, если же $|\sin x|>1/n$, то $|\sin x|>2^{-k}$ для любого $k\ge N+1$. В этом случае

$$|\tilde{f}(x)-Q_n(x)| \le C\sum_{k=N}^{\infty}\frac{|\sin x|^{\rho-1}}{2^{k(\rho+1)}} \le C\frac{(|\sin x|+1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}.$$

Лемма доказана.

Следствие. *В силу* (2.17) *для* $R_0(x)$ *выполняется условие леммы* 5. *Поэтому существует последовательность тригонометрических полиномов* $T_n^0(x)$ *таких, что*

$$|C(R_0)(x)-T_n^0(x)| \le C_\rho\frac{(|\sin x|+1/n)^{\rho-1}}{n^{\rho+1}}. \tag{2.27}$$

3. Доказательство теорем. 1. ***Доказательство теоремы* 1.** В силу равенства (2.2) для любой функции $f_r\in W_\infty$ и любого алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени $n\ge r-1$ имеет место равенство

$$\left|S_{\rho-1}(f_r)(x)-P_n(x)\right|\sqrt{1-x^2} = \left|\left[S_{\rho-1}(f_r)(\cos t)-P_n(\cos t)\right]\sin t\right| =$$
$$= |C(f_r(\cos t))(t)-T_{n+1}(t)|, \tag{3.1}$$

где $T_{n+1}(t)$ — нечетный тригонометрический полином степени не выше n. Равенство (3.1) редуцирует задачу о взвешенной аппроксимации сингулярного интеграла $S_{\rho-1}(f_r)$ алгебраическими многочленами к задаче о поточечной аппроксимации периодической функции $C(f_r(\cos t))(t)$ тригонометрическими полиномами. Так же, как в работе [13], суперпозицию $f_r(\cos t)$ представим в виде

$$f_r(\cos x) = \sin^m x S_m(x)+R_m(x), \tag{3.2}$$

где

$$S_m(x) = \int_0^\pi\left[D_r(u-x)+(-1)^m D_r(u+x)\right]\sin^\rho u f(\cos u)\,du, \tag{3.3}$$

$$m = [r], \quad \rho = r-[r].$$

Переходя к сопряженным функциям в равенстве (3.2) и используя лемму 1, получаем

$$C(f_r(\cos t))(x) = \sin^m x C(S_m)(x)+C(R_m)(x)+Q_m(x), \tag{3.4}$$

где

$$C(S_m)(x) = \int_0^\pi\left[-\tilde{D}_r(u-x)+(-1)^m\tilde{D}_r(u+x)\right]\sin^\rho u f(\cos u)\,du,$$

а $Q_m(x)$ — тригометрический полином степени не выше m. Снова применяя лемму 1 и равенства

$$\frac{d}{dx}f_r(\cos x) = -f_{r-1}(\cos x)\sin x \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}C(S_m)(x) = -C(S_{m-1})(x),$$

находим рекуррентную зависимость для $C(R_m)$:

$$\frac{d}{dx}C(R_m)(x) = -\sin xC(R_{m-1})(x) - m\cos x\sin^{m-1}xC(S_m)(x) + T_m(x), \quad (3.5)$$

где $T_m(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $m = 1, 2, \ldots$.

Аппроксимируем теперь каждое слагаемое правой части равенства (3.4) нечетным тригонометрическим полиномом. Функцию $\sin^m xC(S_m)(x)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $\sin^m xQ_n^m(x)$, где

$$Q_n^m(x) = \int_0^\pi \left[-P_n(u-x)+(-1)^m P_n(u+x)\right]\sin^\rho u f(\cos u)\,du,$$

а $P_n(x) = P_n^r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $n-1$ наилучшего L_1-приближения ядра $\tilde{D}_r(x)$, т. е.

$$\left\|\tilde{D}_r(x)-P_n^r(x)\right\|_1 = \frac{\tilde{K}_r}{n^r}. \quad (3.6)$$

Лемма 6. *Для любого* $r = m + \rho$, $m = 0, 1, 2, \ldots, \rho\in(0, 1]$ *и* $x \in (0, \pi)$ *имеет место неравенство*

$$\left|C(S_m)(x)-Q_n^m(x)\right| \le \frac{\tilde{K}_r\sin^\rho x}{n^r} + \frac{C\ln n}{n^{r+1}}\left(\sin x+\frac{1}{n}\right)^{\rho-1}, \quad n>1,$$

где C *— некоторая константа.*

Доказательство леммы 6 является дословным повторением доказательства леммы 6 из [13], поэтому приводить его не будем. Следует только воспользоваться тем, что многочлен $P_n(u)\sin u/2$ полуцелого порядка $n-1/2$ интерполирует [17] функцию $\tilde{D}_r(u)\sin u/2$ в $2n$ равноотстоящих точках $\gamma_r/n + k\pi/n$, $k=0,1,\ldots,2n-1$, где $\gamma_r = 0$, если $r\in(0,1/2]$, а для $r>1/2$ числа γ_r определены при формулировке теоремы 1.

***Замечание* 3.** Если число r натуральное, то $r = m$ и нетрудно видеть, что

$$C(S_m)(x) = (-1)^m\tilde{I}_m(f(\cos t))(x)$$

и в силу неравенства (2.5)

$$\tilde{E}_n(C(S_m))_\infty \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}, \quad (3.7)$$

так как почти всюду колебание функции $f(\cos t)$ не превышает 2.

Лемма 7. *Для любого* $\rho\in(0,1]$ *существует последовательность* $T_n^m(x)$ *нечетных тригонометрических полиномов степени не выше* $n \ge \max\{m, 2\}$ *таких, что*

$$\left|C(R_m)(x)-T_n^m(x)\right| \le C_m\frac{\ln n(|\sin x|+1/n)^{m+\rho-1}}{n^{m+\rho+1}}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Для $m=0$ лемма 7 совпадает со следствием из леммы 5 (см. (2.27)). Предположим, что лемма доказана для натурального $k\in[0,m)$, и докажем ее для индекса $k+1$. Используя равенство (3.5)

$$\frac{d}{dx}C(R_{k+1})(x) = -\sin xC(R_k)(x)-(k+1)\cos x\sin^k xC(S_{k+1})(x)+T_{k+1}(x),$$

предположение и лемму 6, построим последовательность тригонометрических полиномов $P_n^k(x)$ таких, что

$$\left|\frac{d}{dx}C(R_{k+1})(x)-P_n^k(x)\right| \leq C_{k+1}\frac{\ln n(|\sin x|+1/n)^{k+\rho}}{n^{k+\rho+1}}.$$

Таким образом, для функции $C(R_{k+1})$ выполняется условие леммы 4, следовательно, существует последовательность $T_n^{k+1}(x)$ нечетных тригонометрических полиномов, для которых выполняется неравенство (3.8). Лемма доказана.

Из лемм 6, 7 вытекает существование нечетного тригонометрического полинома $T_{n+1}(x)$ такого, что

$$|C(f_r(\cos t))(x)-T_{n+1}(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r|\sin x|^r}{n^r}+C_r\left(\frac{\ln n(|\sin x|+1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}\right), \tag{3.9}$$

что вместе с равенством (3.1) обеспечивает справедливость теоремы 1.

***Замечание* 4.** В случае целых r, т. е. когда $\rho = 0$, $r = m$ в правой части неравенства (3.8) $\ln n$ можно опустить.

Действительно, в этом случае в силу замечания 3 для $m = 2, 3, \ldots$

$$\frac{d}{dx}C(R_m)(x) =$$

$$= -\sin xC(R_{m-1})(x) - (-1)^m m\cos x\sin^{m-1}x\tilde{I}_m(f(\cos t))(x) + T_m(x), \tag{3.10}$$

а для $m = 1$

$$\frac{d}{dx}C(R_1)(x) = \cos x\tilde{I}_1(f(\cos t))(x) + T_1(x). \tag{3.11}$$

Из (3.11), (2.5) и теорем Фавара [26] и Ахиезера–Крейна [14] очевидно следует оценка

$$\tilde{E}_n(C(R_1))_\infty \leq \frac{\pi\tilde{K}_1}{2n(n-1)}, \qquad n>1,$$

т. е. получаем (3.8) для $r = 1$, без $\ln n$ в правой части. Используя теперь равенство (3.10), замечание 3 и лемму 4, методом математической индукции получаем (3.8) для любого натурального r без $\ln n$ в правой части.

Из замечаний 3 и 4 следует уточнение теоремы 1:

Теорема 4. *Для любой функции* $f\in \hat{W}^r$, $r = 1, 2, \ldots$, *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$, $n\geq r$, *такая, что*

$$|f(x)-P_n(x)|\sqrt{1-x^2} \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r+O\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+1/n\right)^{r-1}}{n^{r+1}}\right). \tag{3.12}$$

Константу $\tilde{K}_r$ *в правой части неравенства* (3.12) *уменьшить нельзя.*

Доказательство. Неравенство (3.12) непосредственно следует из замечаний 3 и 4. Неулучшаемость константы $\tilde{K}_r$ в (3.12) докажем методом от противного. Предположим, что существует число $K<\tilde{K}_r$ такое, что для любого $n\geq n_0\geq r$ найдется нечетный тригонометрический полином $T_n^r(x)$ степени не выше n такой, что

$$\left|\sin^r x\tilde{I}_r(f(\cos t))(x) - T_n^r(x)\right| \leq \frac{K|\sin x|^r}{n^r}. \tag{3.13}$$

Из этого неравенства следует, что $\left|T_n^r(x)\right|\leq C|\sin x|^r$ и поэтому тригонометрический полином $T_n^r(x)$ можно представить в виде

$$T_n^r(x) = \sin^r x Q_{n-r}^r(x),$$

где $Q_{n-r}^r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $n-r$. Подставляя в (3.13) вместо $T_n^r(x)$ произведение $\sin^r x Q_{n-r}^r(x)$ и сокращая на $|\sin x$ получаем для любой функции $f(\cos t)$, колебание которой на отрезке $[-\pi,$ не больше 2, неравенство

$$\left|\tilde{I}_r(f(\cos t))(x) - Q_{n-r}^r(x)\right| \le \frac{K}{n^r} < \frac{\tilde{K}_r}{n^r}, \quad n \ge n_0.$$

А этого не может быть, например, для функции $f(\cos t) = \operatorname{sign} \cos nt$. Получе ное противоречие опровергает предположение. Теорема 4 доказана.

2. ***Доказательство теоремы* 2.** Пусть $\breve{f} \in \breve{W}_\infty^r$. Тогда $\breve{f} = S_{\rho_1}(f_r)($ где $f_r \in W_\infty^r$, и в силу равенства (2.3) и леммы 1 имеем

$$\breve{f}(\cos x) = \sin x C(f_r(\cos t))(x) + T_1(x),$$

где $T_1(x)$ — тригонометрический полином степени не выше 1. Однако тог для $n > 1$ из неравенства (3.9) следует, что

$$\left|\breve{f}(\cos x) - T_{n-1}(x)\sin x\right| \le \frac{\tilde{K}_r|\sin x|^{r+1}}{n^r} + C_r\left(\frac{\ln n(|\sin x| + 1/n)^r}{n^{r+1}}\right). \quad (3.1$$

Поскольку $T_{n-1}(x)\sin x$ — четный тригонометрический полином, то из послед него неравенства следует утверждение теоремы 2.

Те же соображения, которые использовались при доказательстве теоремы дают возможность сделать следующее заключение.

Теорема 5. *Для любой функции* $\breve{f} \in \breve{W}_\infty^r$, $r = 1, 2, \ldots,$ *существует пос довательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$, $n \ge r+1$, *такая, что*

$$\left|\breve{f}(x) - P_n(x)\right| \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2} + 1/n\right)^r}{n^{r+1}}\right). \quad (3.1$$

Константу $\tilde{K}_r$ *в правой части неравенства* (3.15) *уменьшить нельзя.*

3. ***Доказательство теоремы* 3.** Пусть $\bar{f} \in \overline{W}_\infty^r$, $r = 1, 2, \ldots$. Тогда $\bar{f}$ $= S_{\rho_0}(f_r)(x)$, где $f_r \in W_\infty^r$ и $f_r^{(\nu)}(\pm 1) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$. В силу равенст (2.4) задачу о приближении функции $\bar{f}$ алгебраическими многочленами св дим к задаче о поточечном приближении тригонометрическими полинома четной функции $F_r(x) := C(f_r(\cos t)\operatorname{sign}\sin t)(x)$:

$$\left|\bar{f}(x) - P_n(x)\right| = \left|\bar{f}(\cos t) - P_n(\cos t)\right| =$$

$$= \left|C(f_r(\cos u)\operatorname{sign}\sin u)(t) - P_n(\cos t)\right| = \left|F_r(t) - P_n(\cos t)\right|. \quad (3.1$$

Для $k = 1, 2, \ldots, r$ функция $F_r(x)$ абсолютно непрерывна и в силу леммы 1

$$\frac{d}{dx}F_r(x) = -\sin x F_{r-1}(x) + T_{1,r}(x), \quad r = 1, 2, \ldots, \quad (3.1$$

где $F_0(x) = C(f(\cos t)\operatorname{sign}\sin t)(x)$, $T_{1,r}(x)$ — тригонометрический полин степени не выше 1. Положим

$$F_r(x) = (-\sin x)^r I_r(F_0)(x) + \overline{R}_r(x). \quad (3.1$$

Поскольку $I_r(F_0)(x) = \tilde{I}_r(f(\cos t)\operatorname{sign}\sin t)(x)$, то в силу (2.5) имеем

$$\tilde{E}_n(I_r(F_0))_\infty \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}. \qquad (3.19)$$

Методом математической индукции установим существование тригонометрического полинома $T_{n,r}(x)$ такого, что

$$\left|\overline{R}_r(x) - T_{n,r}(x)\right| \le C_r\left(\frac{|\sin x|^{r-1}}{n^{r+1}} + \frac{1}{n^{2r}}\right). \qquad (3.20)$$

Для $r = 1$ $\overline{R}_1(x) = F_1(x) + \sin x\, I_1(F_0)(x)$ и в силу равенства (3.17) имеем

$$\frac{d}{dx}\overline{R}_1(x) = \cos x\, I_1(F_0)(x) + T_{1,1}(x).$$

Снова применяя оценку (2.5), для $n \ge 2$ находим

$$\tilde{E}_n\left(\frac{d}{dx}\overline{R}_1\right)_\infty \le \frac{\tilde{K}_1}{n-1},$$

а тогда очевидно, что существует тригонометрический полином $T_{n,1}(x)$ такой, что

$$\left|\overline{R}_1(x) - T_{n,1}(x)\right| \le \frac{C}{n^2}.$$

Предположим теперь, что для $m \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ существует тригонометрический полином $T_{n,m}(x)$ такой, что имеет место неравенство (3.20). Из представления (3.18) и равенства (3.17) следует

$$\frac{d}{dx}\overline{R}_{m+1}(x) = -\sin x\overline{R}_m(x) + (m+1)(-\sin x)^m \cos x\, I_{m+1}(F_0)(x) + T_{1,m+1}(x).$$

Использовав предположение, оценку (2.5), построим тригонометрический полином $T_n(x)$ такой, что

$$\left|\frac{d}{dx}\overline{R}_{m+1}(x) - T_n(x)\right| \le C_m\left(\frac{|\sin x|^m}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{2m+1}}\right).$$

Из последнего неравенства и леммы 4 следует существование тригометрического полинома $T_{n,m+1}(x)$, для которого выполняется неравенство (3.20) для индекса $m+1$. В силу принципа математической индукции неравенство (3.20) имеет место для всех натуральных чисел от 1 до r. Из равенства (3.18), оценок (3.19) и (3.20) следует существование алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени не выше n такого, что

$$|F_r(x) - P_n(\cos x)| \le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}|\sin x|^r + C_r\frac{(|\sin x| + 1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}, \qquad (3.21)$$

что в силу равенства (3.16) эквивалентно неравенству (1.6). Точность константы $\tilde{K}_r$ в неравенстве (3.21) следует из точности оценки (3.19). Неравенство (3.19) обращается в равенство для функции $f(\cos t) = \operatorname{sign}\sin nt \operatorname{sign}\sin t$.

Теорема доказана.

Замечание 5. Используя результаты работы С. А. Теляковского [27], нетрудно показать, что в остаточных членах неравенств (1.4)–(1.6) слагаемое $1/n$ можно опустить. Наличие $\ln n$ в остаточных членах неравенств (1.4), (1.5) в случае нецелых r связано с методом доказательства, и, по-видимому, его можно так же, как для целых r, опустить.

1. *Бокша А. Н., Русак В. Н.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Intern. Conf. on Approxim. Theory: Abstrs. – Kaluga, 1996. – **1**. – P. 38–39.
2. *Пекарский А. А.* Соотношения между наилучшими рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями в равномерной метрике // Там же. – **2**. – P. 168–169.
3. *Бокша А. Н.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с выпуклой плотностью / 2-а школа "Ряди Фур'є: Теорія і застосування": Тези доп. – Київ, 1997. – С. 24–25.
4. *Моторная О. В.*. О наилучшем приближении многочленами некоторых классов функций // Вісн. Дніпропетров. ун-ту. Математика. – 1998. – Вип. 3. – С. 91–100.
5. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 295–322.
6. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
7. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке // Докл. АН СССР. – 1966. – **166**, № 2. – С. 281–283.
8. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 441–447.
9. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 328–340.
10. *Лигун А. А.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 4. – С. 53–60.
11. *Темляков В. Н.* Приближение функций из класса W^1_∞ алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 4. – С. 597–602.
12. *Тригуб Р. М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Там же. – 1993. – **54**, № 6. – С. 113–121.
13. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами. 2 // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 7. – С. 940–951.
14. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. – 1937. – **15**. – С. 107–112.
15. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 197–206.
16. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Там же. – 1961. – **25**. – С. 143–153.
17. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691–701.
18. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 9. – С. 207–256.
19. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 х. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 616 с.
21. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
22. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами. 1 // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №5. – С. 603–613.
23. *Devore R. A.* Pointwise approximation by polynomials and splines // Теория приближения функций. – М.: Наука, 1977. – С. 132–141.
24. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**. – С. 219–242.
25. *Lorents G. G.* Approximation of functions. – New York: Holt, Rinchart and Winston, 1966. – 187 p.
26. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Eulera la demonstration de quelques proprietes des integrales des fonctions periodqiues ou presque-periodqiues // Matematisk Tidskrift, Kobenhavn B. H. – 1936. – **4**. – P. 81–94.
27. *Теляковский С. А.* Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Мат. сб. – 1966. – **70**, № 2. – С. 252–265.

Получено 11.05.99,
после доработки — 26.11.99