УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ НА $\mathbb{R}$ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^n$

New results of the investigation of exponential dichotomy on the entire axis of linear differential equations in $\mathbb{R}^n$ are presented.

Наведено нові результати дослідження експоненціальної дихотомії на всій осі лінійних диференціальних рівнянь в $\mathbb{R}^n$.

В монографии [1] анонсирован фундаментальный результат следующего содержания.

„В конечномерном вещественном пространстве для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

с интегрально ограниченным оператором $\operatorname{Re} A(t)$ следующие утверждения эквивалентны:

а) уравнение (0.1) э-дихотомично на оси (на полуоси);

б) уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{0.2}$$

имеет по крайней мере одно ограниченное на оси (на полуоси) решение при каждой ограниченной $f(t)$;

в) существует ограниченный индефинитный оператор $W(t)$, удовлетворяющий условию

$$\frac{d\big(W(t)x(t),\, x(t)\big)}{dt} \leq -\alpha \| x(t) \|^2. \text{”} \tag{0.3}$$

Здесь функции $f(t)$, $A(t)$ сильно измеримы и интегрируемы по Бохнеру на конечных подынтервалах $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $W(t)$ непрерывна и почти везде дифференцируема в $\mathbb{R}$; неравенство (0.3) выполняется почти везде в $\mathbb{R}$;

$$\operatorname{Re} A(t) \equiv A_R(t) \equiv \frac{A(t) + A^*(t)}{2}$$

— симметричная компонента матрицы $A(t)$; интегральная ограниченность оператора $\operatorname{Re} A(t)$ означает, что

$$\int\limits_t^{t+1} \| A_R(\tau) \| d\tau \leq M, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{0.4}$$

— симметричный оператор $W(t)$ называется индефинитным, если квадратичная форма

$$(W(t)x,\, x) \tag{0.5}$$

принимает значения разных знаков; α и M — положительные постоянные, $\|x\|^2 = (x,x) = \sum_{\nu=1}^n x_\nu^2$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|A(t)\| = \max_{\|x\|=1} \|A(t)\|$.

Далее в [1] утверждается, что „описанный результат установлен для ограниченных $A(t)$ в обобщение результата И. Г. Малкина А. Д. Майзелем [2], использовавшим (так же, как И. Г. Малкин) преобразования Перрона”.

Авторитет авторов работы [1] избавил оба утверждения от критического их анализа. Несмотря даже на предостережение, высказанное в [3], о том, что в „любом естественном смысле" нельзя методом Ляпунова охарактеризовать „дихотомии, когда областью измемения независимой переменной является $J = \mathbb{R}$".

Уже поверхностное знакомство с работой [2] показывает, что результаты А. Д. Майзеля относятся лишь к случаю, когда областью изменения переменного t является полуось $J = [t_0, \infty)$. Более детальное рассмотрение доказательства теоремы II из [2], утверждающей, что на J из в) следует б), показывает несостоятельность этого доказательства: вопреки утверждению [2] из неравенства (0.3) для решений уравнения с треугольной матрицей коэффициентов не следует, в общем случае, аналогичное неравенство для решений уравнения с диагональной матрицей коэффициентов, получаемой из треугольной заменой нулями недиагональных элементов.

Позже в [3], и только лишь для полуоси, доказано приведенное выше утверждение, причем не только в конечномерном пространстве.

Последующие работы в указанном направлении, в частности, авторов [4 – 6] приводят к следующей формулировке основного результата об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ уравнения (0.1).

Теорема. *В конечномерном вещественном пространстве для уравнения* (0.1) *с интегрально ограниченным оператором* $\operatorname{Re} A(t)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

а) уравнение (0.1) *э-дихотомично на оси;*

б) уравнение (0.2) *имеет лишь одно ограниченное на оси решение при каждой ограниченной функции* $f(t)$;

в) существует ограниченный индефинитный и невырожденный оператор $W(t)$, *удовлетворяющий условию* (0.3).

Здесь невырожденность $W(t)$ означает, что

$$\det W(t) \neq 0 \tag{0.6}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$.

Часть этой теоремы, относящаяся к установлению того факта, что из в) следует а), называется обычно „прямой" теоремой метода Ляпунова для (0.1). Все утверждения приведенной теоремы, кроме „прямой" теоремы, достаточно полно и строго доказаны в работах [1, 3, 6] или легко выводятся из приведенных там результатов, относящихся к э-дихотомии уравнения (0.1) на полуоси. Несмотря на исследования [4, 6], доказательство „прямой" теоремы для уравнения (0.1) представляется нам недостаточно полным и строгим. Это послужило основанием проведения настоящего исследования, полностью посвященного доказательству „прямой" теоремы метода Ляпунова для уравнения (0.1).

Работа состоит из трех пунктов: п. 1 содержит некоторые оценки решений уравнения (0.1) общего характера, п. 2 — основное неравенство второго метода Ляпунова для уравнения (0.1) и его анализ, п. 3 содержит доказательство „прямой" теоремы второго метода Ляпунова для уравнения (0.1), а также теоремы о решениях уравнения (0.1), когда нарушено условие (0.6).

1. Некоторые оценки. Приведем некоторые оценки решений уравнений (0.1) общего характера.

Для этого рассмотрим наряду с (0.1) уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A_I(t)x, \tag{1.1}$$

где

$$A_I(t) = \operatorname{Im} A(t) = \frac{A(t) - A^*(t)}{2}$$

— кососимметрическая компонента матрицы $A(t)$.

Пусть $U(t)$ и $U_I(t)$ — фундаментальные матрицы решений уравнений (0.1) и (1.1) соответственно,

$$U(0) = U_I(0) = I,$$

где I — единичная матрица,

$$U(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau) \quad \text{и} \quad U_I(t,\tau) = U_I(t)U_I^{-1}(\tau)$$

— эволюционные операторы уравнений (0.1) и (1.1) соответственно.

Поскольку $A_I(t)$ — кососимметрическая матрица, то $U_I(t)$ — ортогональная матрица. Выполним в (0.1) замену переменных, положив

$$x = U_I(t)y. \tag{1.2}$$

В результате вместо (0.1) получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = U_I^*(t)A_R(t)U_I(t)y, \tag{1.3}$$

матрица коэффициентов которого симметрическая и удовлетворяет соотношению

$$\left\|U_I^*(t)A_R(t)U_I(t)\right\| = \|A_R(t)\| = \operatorname{Spr} A_R(t). \tag{1.4}$$

Здесь Spr — спектральный радиус матрицы $A_R(t)$, равный наибольшему по модулю собственному значению этой матрицы.

Из (1.2) – (1.4) стандартным образом выводятся следующие оценки:

$$e^{\int_t^\tau \|A_R(s)\|ds} \le \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \le e^{\int_\tau^t \|A_R(s)\|ds} \tag{1.5}$$

для всех $t \ge \tau$ и любого решения $x(t) \ne 0$ уравнения (0.1),

$$e^{\int_t^\tau \|A_R(s)\|ds} \le \|U(t,\tau)\| \le e^{\int_\tau^t \|A_R(s)\|ds},$$

$$\|U(t,\tau)-I\| \le e^{\int_\tau^t \|A_R(s)\|ds} - 1 + \|U_I(t,\tau)-I\| \le e^{\int_\tau^t \|A_R(s)\|ds} - 1 + \int_\tau^t \|A_I(s)\|ds,$$

обобщающие аналогичные оценки, приведенные в [1].

Для теории э-дихотомии на $\mathbb{R}$ уравнения (0.1) возможность его преобразования ортогональной заменой к виду (1.3) довольно существенна, так как делает уравнения (0.1) и (1.3) кинематически подобными и сводит в силу условия (0.4) понятие э-дихотомии уравнения (0.1) к первым двум условиям определения [1]. Это обстоятельство упрощает решение рассматриваемой задачи.

Приведем еще одно неравенство, аналогичное неравенству Чаплыгина [7]: если непрерывная и почти везде дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция $x(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) + f(t) \le 0,$$

то при $t \le \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$x(t) \ge y(t), \tag{1.6}$$

при $t \ge \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$x(t) \le y(t), \tag{1.7}$$

где

$$y(t) = e^{\int_t^\tau A(s)ds} x(\tau) + \int_t^\tau e^{\int_t^s A(\tau)d\tau} f(s)ds. \tag{1.8}$$

Неравенства (1.6), (1.7) доказываются стандартным образом.

2. Основное неравенство и его анализ. Пусть для уравнения (0.1) выполняется условие в) приведенной выше теоремы.

Положим

$$\|W(t)\| \le m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

и обозначим

$$v_1(t) = \big(W(t)\operatorname{sgn} x(t), \operatorname{sgn} x(t)\big),$$

где

$$\operatorname{sgn} x(t) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|}.$$

Тогда

$$\big(W(t)x(t), x(t)\big) = v_1(t)\|x(t)\|^2 \tag{2.2}$$

и неравенство (0.3) эквивалентно неравенству

$$\frac{dv_1(t)}{dt} + \left[\frac{d}{dt}\left(\ln\|x(t)\|^2\right)\right]v_1(t) + \alpha \le 0. \tag{2.3}$$

Положим

$$v_1(t) = \alpha v(t) \tag{2.4}$$

и перепишем (2.3) в виде

$$\frac{dv(t)}{dt} + \left[\frac{d}{dt}\left(\ln\|x(t)\|^2\right)\right]v(t) + 1 \le 0. \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) будем называть основным неравенством метода Ляпунова для уравнения (0.1).

Проведем анализ основного неравенства.

Лемма 1. *Можно указать положительную постоянную* β *такую, что любая из функций* $v(t)$, *удовлетворяющая неравенству* (2.5), *удовлетворяет неравенству*

$$|v(t)| \ge \beta \tag{2.6}$$

либо для всех $t \in \mathbb{R}$, *либо для всех* $|t-\tau_1| \ge 1$, *где* τ_1 — *единственный на* $\mathbb{R}$ *нуль функции* $v(t)$.

Переходя к ***доказательству*** леммы, определяем из (2.5) функцию (1.8). Учитывая неравенство (2.5) и формулу (1.8), имеем

$$y(t) = \frac{\|x(\tau)\|^2}{\|x(t)\|^2}\left(v(\tau) + \int_t^\tau \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds\right). \tag{2.7}$$

Предположим, что

$$v(t) > 0 \tag{2.8}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Согласно неравенству (1.7) из (2.7), (2.8) следует, что

$$v(\tau) > \int_\tau^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds \tag{2.9}$$

для всех $t \ge \tau$. Из неравенства (2.1) для функции (2.4) вытекает оценка

$$|v(t)| \le \frac{m}{\alpha} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Из этой оценки и монотонности интеграла (2.9), как функции переменного t, следует

$$v(\tau) > \int_{\tau}^{\infty} \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds = \int_{0}^{\infty} \frac{\|x(s_1+\tau)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds_1 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Согласно оценкам (1.5) для $s_1 \ge 0$ имеем

$$\frac{\|x(s_1+\tau)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} \ge \exp\left\{2\int_{s_1+\tau}^{\tau} \|A_R(s)\| ds\right\},$$

так что из (2.11) следует неравенство

$$v(\tau) \ge \int_{0}^{\infty} \exp\left\{-2\int_{\tau}^{s_1+\tau} \|A_R(s)\| ds\right\} ds_1 = \beta_1(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Учитывая предположение (0.4), для $s_1 \ge 0$ получаем

$$\int_{\tau}^{s_1+\tau} \|A_R(s)\| ds \le \left(\int_{\tau}^{\tau+1} + \int_{\tau+1}^{\tau+2} + \dots \int_{\tau+[s_1]}^{\tau+s_1}\right) \|A_R(s)\| ds \le (s_1+1)M, \tag{2.13}$$

поэтому

$$\beta_1(\tau) \ge \int_{0}^{\infty} e^{-2(s_1+1)M} ds_1 = \frac{e^{-2M}}{2M}. \tag{2.14}$$

Из неравенств (2.12), (2.14) следует оценка (2.6) для всех $t \in \mathbb{R}$ при

$$\beta \le \frac{e^{-2M}}{2M}. \tag{2.15}$$

Пусть

$$v(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Согласно неравенству (1.6) из (2.7), (2.16) получаем оценку

$$|v(\tau)| > \int_{t}^{\tau} \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds \quad \forall t \le \tau. \tag{2.17}$$

Из (2.10), оценки (2.17) и монотонности интеграла (2.17), как функции переменного t, следует

$$|v(\tau)| > \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds = \int_{-\infty}^{0} \frac{\|x(s_1+\tau)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds_1 = \beta_2(\tau) \tag{2.18}$$

для каждого $\tau \in \mathbb{R}$.

Согласно оценкам (1.5) для $s_1 \le 0$ имеем

$$\frac{\|x(s_1+\tau)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} \ge \exp\left\{2\int_{\tau}^{s_1+\tau} \|A_R(s)\| ds\right\} = \exp\left\{-2\int_{s_1+\tau}^{\tau} \|A_R(s)\| ds\right\}. \tag{2.19}$$

Но при $s_1 \le 0$, учитывая предположение (0.4), имеем

$$\int_{s_1+\tau}^{\tau} \|A_R(s)\| ds \leq (|s_1|+1)M, \tag{2.20}$$

так что из (2.18) – (2.20) следует оценка

$$\beta_2(\tau) \geq \int_{-\infty}^{0} e^{-2(|s_1|+1)M} ds_1 = \frac{e^{-2M}}{2M}. \tag{2.21}$$

Из неравенств (2.18), (2.21) следует оценка (2.6) для всех $t \in \mathbb{R}$, где β удовлетворяет неравенству (2.15).

Пусть для $\tau_1 \in \mathbb{R}$

$$\upsilon(\tau_1) = 0.$$

Согласно неравенствам (1.6), (1.7) и формуле (2.7) имеем: для $t \leq \tau_1$

$$\upsilon(t) \geq \int_{t}^{\tau_1} \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(t)\|} ds, \tag{2.22}$$

для $t \geq \tau_1$

$$\upsilon(t) \leq -\int_{\tau_1}^{t} \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(t)\|^2} ds. \tag{2.23}$$

Из (2.22), (2.23) следует, что для $t < \tau_1$ функция $\upsilon(t)$ положительна, а для $t > \tau_1$ — отрицательна.

Для подынтегральных выражений (2.22), (2.23) справедливы оценки (1.5): для $s \geq t$

$$\frac{\|x(s)\|^2}{\|x(t)\|^2} \geq \exp\left\{2\int_{s}^{t} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\} = \exp\left\{-2\int_{t}^{s} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\},$$

для $s \leq t$

$$\frac{\|x(s)\|^2}{\|x(t)\|^2} \geq \exp\left\{2\int_{t}^{s} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\} = \exp\left\{-2\int_{s}^{t} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\},$$

с учетом которых из неравенств (2.22), (2.23) следуют оценки: для $t \leq \tau_1$

$$\upsilon(t) \geq \int_{t}^{\tau_1} \exp\left\{-2\int_{t}^{s} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\} ds, \tag{2.24}$$

для $t \geq \tau_1$

$$|\upsilon(t)| \geq \int_{\tau_1}^{t} \exp\left\{-2\int_{s}^{t} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\} ds. \tag{2.25}$$

Пусть $\tau_1 - t \geq 1$. Из (2.24) следует неравенство

$$\upsilon(t) \geq \int_{0}^{\tau_1 - t} \exp\left\{-2\int_{t}^{s_1+t} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\} ds_1,$$

из которого с учетом оценки (2.13) вытекает, что для всех $\tau_1 - t \geq 1$

$$\upsilon(t) \geq \int_{0}^{\tau_1 - t} e^{-2(s_1+1)M} ds_1 \geq e^{-2M} \frac{1-e^{-2M}}{2M}. \tag{2.26}$$

При $\tau_1 - t \leq -1$ из (2.25) имеем неравенство

$$|v(t)| \geq \int_{\tau_1 - t}^{0} \exp\left\{-2\int_{s_1+t}^{t} \|A_R(\tau)\| d\tau\right\} ds_1,$$

которое с учетом оценки (2.20) доказывает, что для всех $\tau_1 - t \leq -1$

$$|v(t)| \geq \int_{\tau_1 - t}^{0} e^{-2(|s_1|+1)M} ds_1 \geq e^{-2M} \frac{1-e^{-2M}}{2M}. \tag{2.27}$$

Из неравенств (2.26), (2.27) вытекает оценка (2.6) для всех $|t-\tau_1| \geq 1$ при

$$\beta \leq e^{-2M} \frac{1-e^{-2M}}{2M}. \tag{2.28}$$

При β, удовлетворяющем условию (2.28), получаем доказательство леммы 1.

Лемма 2. *При выполнении неравенства* (2.5) *имеют место следующие оценки:*

при $v(t) > 0$ *для всех* $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\|x(t)\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \|x(\tau)\|; \tag{2.29}$$

при $v(t) < 0$ *для всех* $t \leq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\|x(t)\| \leq K e^{-\gamma(\tau-t)} \|x(\tau)\|; \tag{2.30}$$

при $v(\tau_1) = 0$ *для всех* $t \leq \tau \leq \tau_1 - 1$ *и всех* $t \geq \tau \geq \tau_1 + 1$

$$\|x(t)\| \geq K^{-1} e^{\gamma|t-\tau|} \|x(\tau)\|, \tag{2.31}$$

где

$$K = \left(\frac{m}{\alpha\beta}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2m}. \tag{2.32}$$

Действительно, при $v(t) > 0$ согласно лемме 1 для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$v(t) \geq \beta$$

при β, удовлетворяющем (2.15). Поэтому из (2.5) следует

$$\frac{1}{v(t)} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\ln\|x(t)\|^2\right) + \frac{1}{v(t)} \leq 0 \tag{2.33}$$

или с учетом неравенства (2.1) и замен (2.2) и (2.4)

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(v(t)\|x(t)\|^2\right)\right] \leq -\frac{\alpha}{m} = -2\gamma \tag{2.34}$$

почти для всех $t \in \mathbb{R}$. Интегрируя (2.34), получаем для всех $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, неравенство

$$v(t)\|x(t)\|^2 \leq v(\tau)\|x(\tau)\|^2 e^{-2\gamma(t-\tau)},$$

из которого следует оценка (2.29).

При $v(t) < 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\frac{m}{\alpha} \geq |v(t)| \geq \beta \tag{2.35}$$

при β, удовлетворяющем (2.15). Поэтому из основного неравенства имеем

$$\frac{1}{v(t)}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\ln\|x(t)\|^2\right) + \frac{1}{v(t)} \geq 0$$

или с учетом (2.35)

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{1}{|v(t)|\|x(t)\|^2}\right) \leq -\frac{1}{|v(t)|} \leq -\frac{\alpha}{m} = -2\gamma \tag{2.36}$$

почти для всех $t \in \mathbb{R}$. Интегрируя (2.36), получаем для всех $t \leq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, неравенство

$$|v(t)|\|x(t)\|^2 \leq |v(\tau)|\|x(\tau)\|^2 e^{-2\gamma(\tau-t)},$$

из которого следует оценка (2.30).

Пусть $v(\tau_1) = 0$. Тогда функция $v(t)$ в момент $t = \tau_1$ переходит из области $v > 0$ в область $v < 0$. Более того, согласно лемме 1 при $t \leq \tau_1 - 1$

$$v(t) \geq \beta, \tag{2.37}$$

где β — постоянная, удовлетворяющая (2.28). Поэтому основное неравенство для $t \leq \tau_1 - 1$ принимает вид неравенства (2.33), из чего следует

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(v(t)\|x(t)\|^2\right)\right] \leq -\frac{\alpha}{m} = -2\gamma \tag{2.38}$$

почти для всех $t \leq \tau_1 - 1$. Интегрируя (2.38), для всех $t \leq \tau \leq \tau_1 - 1$ получаем неравенство

$$v(\tau)\|x(\tau)\|^2 \leq v(t)\|x(t)\|^2 e^{-2\gamma(\tau-t)},$$

из которого следует оценка

$$\|x(t)\|^2 \geq \frac{v(\tau)}{v(t)}\|x(\tau)\|^2 e^{2\gamma(\tau-t)}. \tag{2.39}$$

Из неравенства (2.39) с учетом неравенств (2.37) и (2.1) получаем оценку (2.31) для всех $t \leq \tau \leq \tau_1 - 1$.

При $t \geq \tau_1 + 1$ согласно лемме 1

$$v(t) \leq -\beta, \tag{2.40}$$

где β — постоянная, удовлетворяющая (2.28). Поэтому основное неравенство для $t \geq \tau_1 + 1$ принимает вид неравенства (2.36), из чего следует

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{1}{|v(t)|\|x(t)\|^2}\right) \leq -\frac{1}{|v(t)|} \leq -\frac{\alpha}{m} = -2\gamma \tag{2.41}$$

почти для всех $t \geq \tau_1 + 1$. Интегрируя неравенство (2.41), получаем для всех $t \geq \tau \geq \tau_1 + 1$ оценку

$$\frac{1}{|v(t)|\|x(t)\|^2} \leq \frac{1}{|v(\tau)|\|x(\tau)\|^2} e^{-2\gamma(t-\tau)},$$

из которой следует неравенство

$$\|x(t)\|^2 \geq \frac{|v(\tau)|}{|v(t)|}\|x(\tau)\|^2 e^{2\gamma(t-\tau)} \tag{2.42}$$

для всех $t \geq \tau \geq \tau_1 + 1$. Из неравенства (2.42) с учетом (2.40) и (2.1) получаем оценку (2.31) для всех $t \geq \tau \geq \tau_1 + 1$.

3. Экспоненциальные дихотомии на $\mathbb{R}$. Докажем „прямую" теорему метода Ляпунова для уравнения (0.1).

Теорема. *Если для уравнения* (0.1) *существует почти везде дифференцируемая, ограниченная, индефинитная и невырожденная на* $\mathbb{R}$ *матрица* $W(t)$, *удовлетворяющая условию* (0.3), *то уравнение* (0.1) *э-дихотомично на* $\mathbb{R}$.

Для ***доказательства*** теоремы нам предстоит разделить решения уравнения (0.3), выделив из них лишь затухающие на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ или $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$.

Пусть

$$x_j(t) = U(t)c_j, \quad j \in N,$$

— решение уравнения (0.1), определяемое начальным значением

$$x_j(0) = c_j, \quad \|c_j\| = 1, \quad j \in N.$$

Для этого решения функцию $v(t)$ обозначим через $v_j(t)$, так что

$$v_j(t) = \left(W(t)\frac{U(t)c_j}{\|U(t)c_j\|}, \frac{U(t)c_j}{\|U(t)c_j\|}\right) = \frac{(W(t)V(t)c_j, V(t)c_j)}{\|V(t)c_j\|^2}, \tag{3.1}$$

где $V(t) = U(t)/\|U(t)\|$.

Выделим те значения c_j, $j \in N$, для которых выполняется неравенство

$$v_j(t) \neq 0, \quad j \in N, \tag{3.2}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Из (3.1) следует, что (3.2) эквивалентно неравенству

$$\left(V^*(t)W(t)V(t)c_j, c_j\right) \neq 0, \quad j \in N,$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$ или относительно

$$S(t) = V^*(t)W(t)V(t)$$

неравенству

$$c_j^* S(t)c_j \neq 0, \quad j \in N, \tag{3.3}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Из предположений относительно $W(t)$ и свойств эволюционного оператора $U(t)$ следует, что $S(t)$ — непрерывная, индефинитная и невырожденная на $\mathbb{R}$ матрица. Согласно теории матриц спектр $S(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет одно и то же число положительных и отрицательных значений и может быть выбран непрерывным по t. Пусть

$$\lambda_\nu(t), \quad \nu = \overline{1, r}, \quad t \in \mathbb{R},$$

— положительные,

$$-\lambda_\nu(t), \quad \nu = \overline{r+1, n}, \quad t \in \mathbb{R},$$

— отрицательные собственные значения матрицы $S(t)$. Представим $S(t)$ в виде

$$S(t) = O^*(t)\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_r(t), -\lambda_{r+1}(t), \ldots, -\lambda_n(t)\}O(t), \tag{3.4}$$

где $O(t)$ — ортогональная матрица.

Положим

$$\eta_j(t) = O(t)c_j, \quad j \in N,$$

и перепишем неравенство (3.3) в виде

$$\eta_j^*(t)\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_r(t), -\lambda_{r+1}(t), \ldots, -\lambda_n(t)\}\eta_j(t) \neq 0, \quad j \in N, \tag{3.5}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Пусть

$$e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0), \quad 1 \le j \le n,$$

— j-й единичный орт $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$ и положим в (3.5)

$$\eta_j(t) = e_j, \quad 1 \le j \le n. \tag{3.6}$$

В результате вместо (3.5) получим для каждого $t \in \mathbb{R}$ систему неравенств

$$\lambda_j(t) > 0, \quad 1 \le j \le r,$$

или

$$-\lambda_j(t) < 0, \quad r+1 \le j \le n.$$

Обе системы выполняются согласно предположению о собственных значениях матрицы $S(t)$. Условие (3.6) выполняется при

$$c_j = c_j(t) = O^*(t)e_j, \quad 1 \le j \le n. \tag{3.7}$$

Выберем последовательность t_ν, $t_\nu < t_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, из условий:

$$\lim_{\nu \to \infty} t_\nu = \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} O(t_\nu) = \Omega. \tag{3.8}$$

Поскольку $\|O(t)\| = 1$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, то такой выбор t_n всегда возможен, при этом предельная матрица Ω, как и матрица $O(t)$, является ортогональной: из (3.8) и $O(t_\nu)O^*(t_\nu) = I$ следует $\Omega\Omega^* = I$. Для $1 \le j \le r$ положим

$$a_j = \lim_{\nu \to \infty} c_j(t_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} O^*(t_\nu)e_j = \Omega^* e_j$$

и рассмотрим решения уравнения (0.1)

$$x_j^{(\nu)}(t) = U(t)c_j(t_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

$$x_j(t) = U(t)a_j, \quad 1 \le j \le r.$$

Для этих решений функция $\upsilon(t)$ имеет соответственно вид

$$\upsilon_j^{(\nu)}(t) = \frac{c_j^*(t_\nu)S(t)c_j(t_\nu)}{\|V(t)c_j(t_\nu)\|^2}, \tag{3.9}$$

$$\upsilon_j(t) = \frac{a_j^* S(t)a_j}{\|V(t)a_j\|^2}, \quad 1 \le j \le r. \tag{3.10}$$

Покажем, что

$$\upsilon_j(t) > 0, \quad 1 \le j \le r, \tag{3.11}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Докажем сначала, что

$$v_j(t) \neq 0, \quad 1 \le j \le r, \tag{3.12}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Если (3.12) не имеет места, то согласно лемме 1 найдется $t = \tau_j \in \mathbb{R}$ такое, что

$$v_j(\tau_j) = 0, \quad v_j(t) \le -\beta \tag{3.13}$$

для всех $t \ge \tau_j + 1$, $1 \le j \le r$.

Из (3.10) для $1 \le j \le r$ с учетом (3.4) и (3.7) имеем

$$v_j^{(\nu)}(t_\nu) = \frac{c_j^*(t_\nu) S(t_\nu) c_j(t_\nu)}{\|V(t_\nu) c_j(t_\nu)\|^2} = \frac{e_j^* O(t_\nu) S(t_\nu) O^*(t_\nu) e_j}{\|V(t_\nu) c_j(t_\nu)\|^2} = \frac{\lambda_j(t_\nu)}{\|V(t_\nu) c_j(t_\nu)\|^2} > 0.$$

Отсюда следует, что

$$v_j^{(\nu)}(t) > 0$$

для всех $t \le t_\nu$, $1 \le j \le r$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Из (3.8) следует возможность выбора такого $\nu_0 \in N$, чтобы для всех $\nu \ge \nu_0$ выполнялось неравенство $\tau_j + 1 < t_\nu$ при любом $1 \le j \le r$. Однако тогда

$$v_j^{(\nu)}(\tau_j + 1) > 0 \tag{3.14}$$

для всех $\nu \ge \nu_0$ и любого $1 \le j \le r$. Неравенство (3.14) имеет следующий вид:

$$\frac{c_j^*(t_\nu) S(\tau_j + 1) c_j(t_\nu)}{\|V(\tau_j + 1) c_j(t_\nu)\|^2} > 0$$

и в пределе при $\nu \to \infty$ переходит в неравенство

$$v_j(\tau_j + 1) \equiv \frac{a_j^* S(\tau_j + 1) a_j}{\|V(\tau_j + 1) a_j\|^2} \ge 0. \tag{3.15}$$

Последнее противоречит неравенству (3.13), взятому при $t = \tau_j + 1$, что доказывает справедливость неравенства (3.12), а с учетом (3.15) и неравенства (3.11).

Согласно лемме 2 из неравенства (3.11) следует оценка

$$\|x_j(t)\| \le K e^{-\gamma(t-\tau)} \|x_j(\tau)\|, \quad 1 \le j \le r, \tag{3.16}$$

для всех $t \ge \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Поскольку e_j — единичные орты $\mathbb{R}^n$, Ω — ортогональная матрица, то значения $a_1, \ldots, a_r$ — линейно независимы, следовательно, решения уравнения (0.1)

$$x_1(t), \ldots, x_r(t) \tag{3.17}$$

линейно независимые на $\mathbb{R}$. Этим мы определили r линейно независимых на $\mathbb{R}$ решений уравнения (0.1) и таких, что для каждого из них выполняется неравенство (3.16).

Выберем последовательность t_n, $t_{n+1} < t_n$, $n = 1, 2, \ldots$, из условий, что

$$\lim_{\nu \to \infty} t_\nu = -\infty, \qquad \lim_{\nu \to \infty} O(t_\nu) = B. \tag{3.18}$$

Для $r + 1 \le j \le n$ положим

$$a_j = \lim_{\nu \to \infty} c_j(t_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} O(t_\nu) e_j = B e_j$$

и рассмотрим решения уравнения (0.1)

$$x_j^{(\nu)} = U(t)c_j(t_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

$$x_j(t) = U(t)a_j, \quad r+1 \le j \le \nu.$$

Покажем, что функция

$$v_j(t) = \frac{a_j^* S(t) a_j}{\|V(t)a_j\|^2}, \quad r+1 \le j \le n,$$

удовлетворяет неравенству

$$v_j(t) < 0, \quad r+1 \le j \le n, \tag{3.19}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Поскольку функция (3.9) при $r+1 \le j \le n$ удовлетворяет условию

$$v_j^{(\nu)}(t_\nu) = \frac{c_j^*(t_\nu)S(t_\nu)c_j(t_\nu)}{\|V(t_\nu)c_j(t_\nu)\|^2} = \frac{-\lambda_j(t_\nu)}{\|V(t_\nu)c_j(t_\nu)\|^2} < 0,$$

то

$$v_j^{(\nu)}(t) < 0 \tag{3.20}$$

для всех $t \ge t_\nu$, $r+1 \le j \le n$, $\nu = 1, 2, \dots$.

Докажем, что

$$v_j(t) \ne 0, \quad r+1 \le j \le n. \tag{3.21}$$

Действительно, если (3.21) не имеет места, то согласно лемме 1 найдется $t = \tau_j \in \mathbb{R}$ такое, что

$$v_j(\tau_j) = 0, \quad v_j(t) \ge \beta \tag{3.22}$$

для всех $t \le \tau_j - 1$, $r+1 \le j \le n$. Из (3.18) следует возможность выбора такого $\nu_0 \in N$, чтобы для всех $\nu \ge \nu_0$ выполнялось неравенство

$$\tau_j - 1 \ge t_\nu \tag{3.23}$$

при любом $r+1 \le j \le n$. Из (3.20), (3.23) следует

$$v_j^{(\nu)}(\tau_j - 1) < 0 \tag{3.24}$$

для всех $\nu \ge \nu_0$ и любого $r+1 \le j \le n$. Неравенство (3.24) имеет следующий вид:

$$\frac{c_j^*(t_\nu)S(\tau_j-1)c_j(t_\nu)}{\|V(\tau_j-1)c_j(t_\nu)\|^2} < 0$$

и в пределе при $\nu \to \infty$ переходит в неравенство

$$v_j(\tau_j - 1) \equiv \frac{a_j^* S(\tau_j - 1)a_j}{\|V(\tau_j - 1)a_j\|^2} \le 0. \tag{3.25}$$

Последнее противоречит неравенству (3.22), взятому при $t = \tau_j - 1$, что доказывает справедливость неравенства (3.21), а с учетом (3.25) и неравенства (3.19).

Согласно лемме 2 из неравенства (3.19) следует оценка

$$\left\|x_j(t)\right\| \leq Ke^{-\gamma(\tau-t)}\left\|x_j(\tau)\right\|, \quad r+1 \leq j \leq n, \tag{3.26}$$

для всех $t \leq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Поскольку e_j — единичные орты $\mathbb{R}^n$, B — ортогональная матрица, то значения $a_{r+1}, \ldots, a_n$ линейно независимы, следовательно, решения уравнения (0.1)

$$x_{r+1}(t), \ldots, x_n(t) \tag{3.27}$$

линейно независимые на $\mathbb{R}$. Этим мы определили $(n-r)$ линейно независимых на $\mathbb{R}$ решений уравнений (0.1) и таких, что для каждого из них выполняется неравенство (3.26).

Докажем линейную независимость на $\mathbb{R}$ системы решений уравнений (0.1), состоящей из функций (3.17), (3.27). Для этого предположим, что система функций (3.17), (3.27) линейно зависима на $\mathbb{R}$. Это равносильно тому, что найдутся линейные комбинации функций (3.17) и (3.27)

$$x^{(1)}(t) = \sum_{\nu=1}^{r}\mu_\nu x_\nu(t), \qquad x^{(2)}(t) = \sum_{\nu=r+1}^{n}\mu_\nu x_\nu(t)$$

такие, что

$$x^{(1)}(t) \neq 0, \qquad x^{(2)}(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Однако тогда из неравенств (3.16) и (3.26) следует

$$\lim_{t\to\infty} x^{(1)}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} x^{(2)}(t) = 0. \tag{3.29}$$

Из тождества (3.28) с учетом (3.29) вытекает, что

$$\lim_{|t|\to\infty} x^{(1)}(t) = 0, \tag{3.30}$$

но это невозможно, так как в силу (3.30) функция $v(t)$ для $x^{(1)}(t)$ должна удовлетворять одновременно неравенствам

$$v(t) > 0, \qquad v(t) < 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для завершения доказательства теоремы образуем фундаментальную матрицу решений из функций (3.17), (3.27):

$$X(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right).$$

Положим

$$P = X(0)JX^{-1}(0), \qquad J = \operatorname{diag}\{I, O\},$$

где I — r-мерная единичная матрица, O — $(n-r)$-мерная нулевая матрица. Матрица P — проектор, причем такой, что

$$U(t)P = X(t)X^{-1}(0)P = X(t)JX^{-1}(0) = \left(x_1(t), \ldots, x_r(t), 0, \ldots, 0\right)X^{-1}(0)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|U(t)P\| \leq K_2 e^{-\gamma(t-\tau)}\|U(\tau)P\|$$

для всех $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, а матрица

$$U(t)(I-P) = (0,\ldots,0, x_{r+1}(t),\ldots,x_n(t))X^{-1}(0)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|U(t)(I-P)\| \le K_2 e^{-\gamma(\tau-t)}\|U(\tau)(I-P)\|$$

для всех $t \le \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, где K_2 — положительная постоянная, γ — постоянная (2.32).

Проектор P определяет разложение (при $t=0$) пространства $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму подпространств $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Px = x\}$ и $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Px = 0\}$ достаточное для экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ уравнения (0.1).

Основное неравенство может выполняться и в случае, когда матрица $W(t)$ является вырожденной для некоторых значений $t \in \mathbb{R}$. Характер поведения решений уравнения (0.1) в этом случае определяет следующая теорема.

Теорема. *Если для уравнения* (0.1) *существует матрица* $W(t)$, *удовлетворяющая всем условиям предыдущей теоремы, за исключением условия невырожденности, то любая фундаментальная матрица решений уравнения* (0.1) *содержит хотя бы одно решение* $x(t)$, *для которого*

$$\lim_{|t|\to\infty} \|x(t)\| e^{-(\gamma-\varepsilon)|t|} = \infty, \tag{3.31}$$

где $\gamma = \alpha/2m$, $\varepsilon > 0$ *— сколь угодно мало.*

Доказательство теоремы будем проводить от противного. Последнее означает, что существует фундаментальная матрица решений уравнения (0.1) $X(t)$ такая, что ни одно из ее решений не удовлетворяет условию (3.31). Согласно лемме 2 матрица $X(t)$ состоит из решений, удовлетворяющих лишь условиям (2.29) и (2.30). Не нарушая строгости рассуждений будем считать, что $X(t)$ представима в виде

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t)], \tag{3.32}$$

где блоки $X_\nu(t)$ матрицы $X(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_1(t)\| \le K_2 e^{-\gamma t}, \quad t \ge 0, \tag{3.33}$$

$$\|X_2(t)\| \le K_2 e^{\gamma t}, \quad t \le 0, \tag{3.34}$$

соответствующим оценкам (2.29) и (2.30) для решений уравнения (0.1), определяющих эти блоки.

Пусть

$$\det W(\tau) = 0 \tag{3.35}$$

для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Не нарушая строгости рассуждений можем считать, что $\tau = 0$.

Проведем некоторые преобразования матриц $X(t)$ и $W(t)$. Для этого используем теорему Перрона о триангуляции уравнения (0.1) [8] и представим матрицу (3.32) в виде

$$X(t) = O_1(t)T(t) = O_1(t)U_1(t)\,\mathrm{diag}\{T_1(t), T_2(t)\}, \tag{3.36}$$

где $O_1(t)$ — ортогональная матрица,

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_1(t) & T_{12}(t) \\ 0 & T_2(t) \end{pmatrix} = U_1(t)\,\mathrm{diag}\{T_1(t), T_2(t)\} \tag{3.37}$$

— верхняя треугольная матрица,

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} I_1 & T_{12}(t)T_2^{-1}(t) \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

I_1 и I_2 — единичные матрицы, выбранные из условия

$$O_1(t)U_1(t)\begin{pmatrix} T_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} = X_1(t), \tag{3.39}$$

$$O_1(t)U_1(t)\begin{pmatrix} 0 \\ T_2(t) \end{pmatrix} = X_2(t), \tag{3.40}$$

Пусть $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — постоянная такая, что

$$X(t)c = X_1(t)c_1, \quad \|c_1\| \neq 0. \tag{3.41}$$

Поскольку выполняется неравенство (3.33), то функция $v(t)$ для решения (3.41) уравнения (0.1) положительна для каждого $t \in \mathbb{R}$. Поэтому имеет место неравенство

$$\left(W(t)X_1(t)c_1, X_1(t)c_1\right) > 0 \tag{3.42}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$.

Перепишем неравенство (3.42) с учетом формул (3.36) – (3.41). Имеем

$$\left(U_1^*(t)O_1^*(t)W(t)O_1(t)U_1(t)\begin{pmatrix} T_1(t)c_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T_1(t)c_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(S_1(t)T_1(t)c_1, T_1(t)c_1\right) = \left(T_1^*(t)S_1(t)T_1(t)c_1, c_1\right) > 0 \tag{3.43}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$, где $S_1(t)$ — блок матрицы $U_1^*(t)O_1^*(t)W(t)O_1(t)U_1(t)$ из следующего ее представления:

$$U_1^*(t)O_1^*(t)W(t)O_1(t)U_1(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & S_{12}(t) \\ S_{12}^*(t) & S_2(t) \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

имеющий размер, равный размеру матрицы $T_1(t)$. Поскольку c_1 — произвольная постоянная, то неравенство (3.43) означает, что квадратичная форма в (3.43), определяемая матрицей $T_1^*(t)S_1(t)T_1(t)$, положительно определенная для каждого $t \in \mathbb{R}$, следовательно, собственные значения этой матрицы, а значит и матрицы $S_1(t)$, положительны для каждого $t \in \mathbb{R}$. Но тогда собственные значения матрицы $S_1(0)$ положительны.

Пусть $c = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$ — постоянная такая, что

$$X(t)c = X_2(t)c_2, \quad \|c_2\| \neq 0. \tag{3.45}$$

Для решения (3.45) уравнения (0.1) запишем квадратичную форму

$$\left(W(t)X(t)c, X(t)c\right) = \left(W(t)X_2(t)c_2, X_2(t)c_2\right).$$

Поскольку выполняется неравенство (3.34), то функция $v(t)$ для решения (3.45) отрицательна для каждого $t \in \mathbb{R}$. Поэтому имеет место неравенство

$$\left(W(t)X_2(t)c_2, X_2(t)c_2\right) < 0 \tag{3.46}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$.

С учетом формул (3.36) – (3.41) и (3.44) неравенство (3.46) принимает вид

$$\left(U_1^*(t)\, O_1^*(t)\, W(t)\, O_1(t)\, U_1(t) \begin{pmatrix} 0 \\ T_2(t)\, c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ T_2(t)\, c_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(S_2(t)\, T_2(t)\, c_2,\ T_2(t)\, c_2 \right) = \left(T_2^*(t)\, S_2(t)\, T_2(t)\, c_2,\ c_2 \right) < 0 \qquad (3.47)$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$.

Поскольку c_2 — произвольная постоянная, то неравенство (3.47) означает, что квадратичная форма в (3.47), определяемая матрицей $T_2^*(t)\, S_2(t)\, T_2(t)$, отрицательно определенная для каждого $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, собственные значения этой матрицы, а значит и матрицы $S_2(t)$, отрицательны для каждого $t \in \mathbb{R}$. Тогда собственные значения матрицы $S_2(0)$ отрицательны.

Рассмотрим матрицу (3.44) при $t = 0$. Это симметрическая матрица, диагональные блоки которой $S_1(0)$ и $S_2(0)$ имеют соответственно положительные и отрицательные собственные значения. Такая матрица всегда невырождена [6], так что

$$\det \left[U_1^*(0)\, O_1^*(0)\, W(0)\, O_1(0)\, U_1(0) \right] \neq 0.$$

Последнее неравенство противоречит равенству (3.35) и условию $\tau = 0$.

Ради полноты приводимого доказательства отметим, что невырожденность матрицы (3.44) при $t = 0$ следует из „прямой" теоремы Ляпунова, примененной к уравнению (0.1) при $A(t)$, равном матрице (3.44) при $t = 0$. Достаточно положить

$$W = \operatorname{diag}\{-I_1, I_2\}$$

и подсчитать, что

$$\frac{d\,(Wx(t), x(t))}{dt} = 2\left(\operatorname{diag}\{-S_1(0), S_2(0)\}\, x(t),\ x(t)\right)$$

удовлетворяет неравенству (0.3). Тогда рассматриваемое уравнение (0.1) э-дихотомично на $\mathbb{R}$, что возможно лишь при условии невырожденности матрицы (3.44) при $t = 0$.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
2. *Майзель А. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Урал. политехн. ун-та. Сер. мат. – 1954. – **51**. – С. 20 – 50.
3. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
4. *Кулик В. Л.* Дихотомия линейных дифференциальных уравнений и знакопеременные функции Ляпунова. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1988. – 311 с.
5. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 168 – 173.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
7. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. – М. – Л.: Физматгиз, 1950. – 103 с.
8. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linear Differentialgleichungssysteme // Math. Z. – 1930. – **31**. – S. 748 – 766.

Получено 18.12.2000