УДК 519.6

Ю. Б. Зелинский, И. В. Момот (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О (n, m)-ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

We investigate the class of sets convex in the extended sense on Grassmanian manifolds which includes the well-known generalizations of convexity for the Euclidean spaces. We extend duality theorems (of polarity type) to a wide class of subsets of the Euclidean space. We establish that the invariance of a mapping onto sets convex in the extended sense is equivalent to the affinity of this mapping.

Досліджується клас узагальнено опуклих множин на грассманових многовидах, який включає в себе відомі узагальнення опуклості для евклідових просторів. Поширено теореми двоїстості (типу полярної відповідності) на широкий клас підмножин евклідового простору. Встановлено, що інваріантність відображення на узагальнено опуклих множинах еквівалентна його афінності.

Под прямыми m-плоскостями и гиперплоскостями в евклидовом пространстве $R^n(\mathbb{C}^n)$ будем понимать аффинные подпространства $R^n(\mathbb{C}^n)$ размерности 1, m и $n-1$ соответственно [1].

Будем говорить, что пара многообразий (M, M^*) порождает (n,m)-выпуклость, если одно из них есть евклидово пространство R^n, а другое — грассманово многообразие $G'(n,m)$ m-плоскостей в R^n [2]. Очевидно, что между этими многообразиями существует естественное соответствие: каждой точке $x \in R^n$ соответствует подмногообразие $l(x) = G(n,m) \subset G'(n,m)$ — грассманово многообразие m-плоскостей, проходящих через точку x, а каждой точке $y \in G'(n,m)$ соответствует $l(y)$ — m-плоскость в R^n (иногда для удобства рассуждений будем считать, что R^n компактифицировано одной бесконечно удаленной точкой, и тогда каждая m-плоскость — компактное подмножество этой компактификации).

Распространим понятие m-плоскости с евклидового пространства на подмножества грассмановых многообразий, а именно, m-плоскостями в таком многообразии будем считать упомянутые выше множества $l(x) = G(n,m)$.

Определение 1. *Будем говорить, что множество $E \subset M$, где M — одно из пространств R^n или $G'(n,m)$, (n,m)-выпукло, если для каждой точки дополнения $x \in M \setminus E$ существует m-плоскость l такая, что $x \in l$ и $l \cap E = \varnothing$.*

Легко убедиться, что такому определению удовлетворяют все выпуклые области и компакты в R^n, m-выпуклые множества в R^n [1].

***Замечание* 1.** Если рассмотреть для пары (M, M^*) многообразий, где одно евклидово пространство $\mathbb{C}^n$, а другое — комплексное грассманово многообразие $\mathbb{C}G'(n,m)$, аналогичное соответствие подмногообразий, то аналогично вещественному случаю можем ввести понятие комплексной $(n,m)_{\mathbb{C}}$-выпуклости, которая при $m = n-1$ совпадает с линейной выпуклостью.

Определение 2. *Для произвольного множества $E \subset M$ назовем подмножество $E^* \subset M^*$ сопряженным к множеству E, если $E^* = \{y \in M^* \mid m$-плоскость $l(y)$ не пересекает $E\}$.*

Понятно, что E^{**} по определению сопряженное множество к E^*.

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi\colon M \to M^*$, ставящее в соответствие точке x m-плоскость $\Phi(x) = l(x)$. Легко убедиться, что такое многозначное отображение с компактными образами непрерывно и что аналогично такое же многозначное отображение существует из M^* в M, $\Phi\colon M^* \to M$.

Это отображение интересно тем, что, как очевидно, $E^* = M^* \setminus \Phi(E)$, поэтому сведения о сопряженном множестве можно получить из изучения его дополнения $\Phi(E)$.

Изучим свойства сопряженных множеств.

Предложение 1. *Если* $E_1 \subset E$, *то* $E_1^* \supset E^*$ *и* $E_1^{**} \subset E^{**}$.

Из $E_1 \subset E$ следует $\Phi(E_1) \subset \Phi(E)$. Тогда $E_1^* = M^* \setminus \Phi(E_1) \supset M^* \setminus \Phi(E) = E^*$.

Предложение 2. *Если* E *— компакт, то* E^* *открыто.*

Из непрерывности отображения Φ следует, что $\Phi(E)$ — компакт. Поэтому $E^* = M^* \setminus \Phi(E)$ открыто.

Предложение 3. *Если* E *открыто, то* E^* *замкнуто.*

Доказательство. Пусть E открыто. Если точка $y^\circ \in \Phi(E)$, то гиперплоскость $l(y^\circ)$ пересекает E. Существует столь малая окрестность U точки y°, что для любого $y \in U$ гиперплоскость $l(y)$ все еще пересекает E. Значит $U \subset \Phi(E)$. Поэтому $\Phi(E)$ открыто. Следовательно, $E^* = M^* \setminus \Phi(E)$ замкнуто.

***Следствие* 1.** *Если* E *открыто, то и* E^{**} *открыто.*

Будем говорить, что множество $E \subset M$ а) ограничено, если $\overline{E}$ — компакт в M; б) относительно компактно, если одноточечная компактификация $M \cup (*)$ превращает множество $E \cup (*)$ в компактное подмножество $M \cup (*)$.

***Замечание* 2.** Предложение 3 можно усилить для ограниченных открытых множеств, а именно: если E — открытое ограниченное множество, то E^* — относительный компакт.

Пусть T — фиксированная κ-плоскость в R^n, $0 < \kappa < m$. Множеству точек $x \in T$ при отображении будут соответствовать m-плоскости в $G'(n,m)$. Заметим, что пересечением этих плоскостей будет многообразие $G(n-\kappa, m-\kappa) \subset G(n,m)$. Это многообразие будем называть $(m-\kappa)$-плоскостью в $G'(n,m)$. Заданное соответствие $T \leftrightarrow G(n-\kappa, m-\kappa)$ продолжает соответствие, рассмотренное в начале работы, когда $\kappa = 0$ или $m = \kappa$, так как $G(n-m, 0) \subset G(n,m)$ — точка пространства $G'(n,m)$, задающая m-плоскость T.

Предложение 4. *Пусть* $f\colon R^n \to R^l$ *— аффинное отображение пространства* R^n *„на" пространство* R^l *и* $E \subset R^l$ (l,m)*-выпукло. Тогда множество* $f^{-1}(E) \subset R^n$ $(n, m+n-l)$*-выпукло.*

Доказательство. Пусть $x \in R^n \setminus f^{-1}(E)$. Рассмотрим точку $f(x)$ и m-плоскость $L \subset R^l$ через точку $f(x)$, не пересекающую E. Тогда $f^{-1}(L)$ — аффинное подмногообразие пространства R^n, $f^{-1}(L) \cap f^{-1}(E) = \varnothing$. Кроме того, прообразом m-плоскости при аффинном отображении „на" будет $(m+n-l)$-плоскость.

Предложение 5. $\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^* = \bigcap_\alpha E_\alpha^*$.

Действительно,

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^* = M^* \setminus \bigcup_\alpha \Phi(E_\alpha) = \bigcap_\alpha \left(M^* \setminus \Phi(E_\alpha)\right) = \bigcup_\alpha E_\alpha^*.$$

Предложение 6. *Пусть последовательность компактов* E_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$, *такова, что* $E_{\kappa+1} \subset E_\kappa$ и $E = \bigcap_\kappa E_\kappa$. *Тогда* $E^* = \bigcup_\kappa E_\kappa^*$.

Доказательство. Из $E_\kappa \subset E$ следует $E_\kappa^* \subset E^*$ и $\bigcup E_\kappa^* \supset E^*$. Пусть точка $y \in E^*$, следовательно, m-плоскость $l(y)$ не пересекает E. Предположим, что $y \notin E_\kappa^*$, тогда m-плоскость $l(y)$ пересекает каждое из множеств E_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$. Получим систему вложенных компактов $K_\kappa = E_\kappa \cap l(y)$ $K_{\kappa+1} \subset K_\kappa$. Следовательно, $K = \bigcap K_\kappa \neq \varnothing$, что противоречит равенству $K = \bigcap K_\kappa = \left(\bigcap E_\kappa\right) \cap l(y) = E \cap l(y) = \varnothing$. В силу произвольности выбора точки y получаем обратное включение $\bigcup E_\kappa^* \supset E^*$, поэтому $E^* = \bigcup_\kappa E_\kappa^*$.

Предложение 7. *Если компакт E аппроксимируется извне последовательностью областей D_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$, то $E^* = \bigcup_\kappa D_\kappa^*$, $E^{**} = \bigcap_\kappa D_\kappa^{**}$.*

Доказательство. Из предложения 6 имеем $E^* = \bigcup_\kappa D_\kappa^*$. Далее используем цепочку включений $D_{\kappa+1} \subset \overline{D}_{\kappa+1} \subset D_\kappa$. Согласно предложению 1 $D_{\kappa+1}^* \supset \overline{D}_{\kappa+1}^* \supset D_\kappa^*$, поэтому $\bigcup_\kappa \overline{D}_\kappa^* = \bigcup_\kappa D_\kappa$. Следовательно, $E^* = \bigcup_\kappa D_\kappa^*$. Теперь из предложения 5 вытекает, что $E^{**} = \bigcap_\kappa D_\kappa^{**}$.

Запись $E_1 \subset\subset E$ означает замкнутую вложимость подмножества, т. е. замыкание $E_1 \subset M$ вместе с его некоторой открытой окрестностью лежит в E.

Предложение 8. *Если $E_1 \subset\subset E$, то $E^* \subset\subset E_1^*$ и $E_1^{**} \subset\subset E^{**}$.*

Доказательство. Пусть некоторая окрестность $U(E_1) = E_2 \supset \overline{E}_1$ лежит в E. Тогда справедливы включения $E_1 \subset \overline{E}_1 \subset E_2 \subset E$ и согласно предложению 1 $E_1^* \supset \overline{E}_1^* \supset E_2^* \supset E^*$. Согласно предложению 3 множество E_2^* замкнуто, а согласно предложению 2 множество E^* открыто. Поэтому $E_1^* \supset\supset E^*$. Повторное применение этого рассуждения завершает доказательство.

Предложение 9. $E^{**} \supset E$, $E^{***} = E^*$.

Доказательство. Из определения сопряженного множества следуют включения $E^{**} \supset E$ и $E^{***} \supset E^*$. Применяя предложение 1 к включению $E^{**} \supset E$, получаем $E^{***} = E^*$.

Теорема 1. *Для (n,m)-выпуклости множества E необходимо и достаточно, чтобы $E^{**} = E$.*

Доказательство. Пусть множество $E \subset M$ (n,m)-выпукло. Следовательно, для произвольной точки $x \in M \setminus E$ существует m-плоскость $l(y)$, проходящая через точку x и не пересекающая E. Рассмотрим точку $y \in E^*$, которая задает эту плоскость. Точки плоскости $l(y)$ задают в M^* набор m-плоскостей которые пересекаются в точке y. Каждая из этих плоскостей пересекает E^*. Следовательно, ни одна точка плоскости $l(y)$, в том числе и x, не может принадлежать E^{**}. Поэтому $E \supset E^{**}$, а из предыдущего предложения следует их совпадение.

Докажем обратное утверждение. Пусть $E^{**} = E$ и $x \in M \setminus E = M \setminus E^{**}$. Тогда существует точка $y \in E^*$ такая, что $x \in l(y)$. Плоскость $l(y)$ проходит через точку x, но не пересекает множество E, так как никакая ее точка не принадлежит множеству E^{**}. Следовательно, E — (n,m)-выпуклое множество. Теорема доказана.

Из этой теоремы получаем очевидное заключение.

Следствие 2. *Для произвольного множества E сопряженное E^* — (n,m)-выпукло.*

Предложение 10. *Пересечение произвольной совокупности (n,m)-выпуклых множеств (n,m)-выпукло.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcap_\alpha E_\alpha$, где E_α — (n,m)-выпуклые множества. Если $x \notin E$, то существуют E_α такое, что $x \notin E_\alpha$ и m-плоскость L, содержащая x со свойством $L \cap E_\alpha = \varnothing$. Тогда $L \cap E = \varnothing$.

В том, что для объединения множеств, даже упорядоченных по включению, аналогичный результат не имеет места, легко убедиться, использовав пример 2.1 из [1]. Его легко обобщить на случай произвольной (n,m)-выпуклости.

Предложение 11. *Пусть $\{E_\alpha\}$, $\alpha \in A$, — семейство линейно упорядоченных по включению (n,m)-выпуклых открытых множеств $E_\alpha \subset R^n$, т. е. A линейно упорядочено и $\alpha \le \beta \Leftrightarrow E_\alpha \subset E_\beta$. Тогда множество $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ (n,m)-выпукло.*

Доказательство. Пусть $x \notin E$. Тогда $l(x) = G(n,m)$ — компактное многообразие и $x \notin E_\alpha$ для всех α. Понятно, что каждое пересечение $E_\alpha^* \cap l(x)$ замкнутого множества $E_\alpha^* \cap l'(x)$ также компакт. Из $E_\alpha \subset E_\beta$ следует $E_\alpha^* \supset E_\beta^*$ и $E_\alpha^* \cap l(x) \supset E_\beta^* \cap l(x)$. Получаем систему вложенных компактов в $l(x)$, которая имеет непустое компактное пересечение $A = \left(\bigcap E_\alpha^*\right) \cap l(x) \subset E^*$.

Определение 3. *Открытую область D в многообразии M назовем слабо (n, m)-выпуклой, если для каждой точки x границы ∂D существует m-плоскость l, проходящая через точку x и не пересекающая D.*

Очевидно, что любая (n,m)-выпуклая область будет слабо (n, m)-выпуклой.

Предложение 12. *Каждая слабо (n,m)-выпуклая область будет связной компонентой некоторого (n,m)-выпуклого открытого множества.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка границы ∂D. Выберем одну из m-плоскостей, проходящую через x и не пересекающую D. Эту m-плоскость можно записать как $l(y)$ для некоторой точки $y \in D^*$, следовательно, каждая точка, в том числе и x, плоскости $l(y)$ не принадлежит D^{**}. Итак, любая точка границы ∂D не принадлежит D^{**}, но $D \subset D^{**}$. Поэтому D — связная компонента (n,m)-выпуклого открытого множества D^{**}.

Определение 4. *Замкнутое множество $F \subset M$ назовем слабо (n, m)-выпуклым, если оно аппроксимируется извне последовательностью слабо (n, m)-выпуклых областей.*

Предложение 13. *Каждое слабо (n, m)-выпуклое замкнутое множество будет связной компонентой (n, m)-выпуклого замкнутого множества.*

Доказательство. Пусть F аппроксимируется извне последовательностью слабо (n,m)-выпуклых областей $F = \bigcap D_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, $D_{\kappa+1} \subset D_\kappa$. Согласно предложению 12 D_κ совпадает со связной компонентой множества D_κ^{**}. А так как согласно предложению 7 $F^{**} = \left(\bigcap D_\kappa\right)^{**} = \bigcap D_\kappa^{**}$, то связная компонента F^{**}, содержащая F, непременно содержится в пересечении $\bigcap D_\kappa = F$.

Если в пространстве R^n задан набор параллельных m-плоскостей, заполняющий все пространство, т. е. тривиальное расслоение $R^n \to R^m$ со слоем $\gamma = R^{n-m}$, то под проекцией R^n на слой R^{n-m} понимаем отображение, отождествляющее точки m-плоскости. Если задано расслоение $p: G'(n,m) \to G(n,m)$, то заметим, что каждое сечение расслоения пересекает фиксированный слой в единственной точке. Отображение, ставящее в соответствие каждому сечению m-плоскостью точку его пересечения со слоем, назовем проекцией множества сечений на слой γ, который тоже гомеоморфен R^{n-m}.

Под проекцией множества E (E^*) на слой понимаем образ E (E^*) при одной из рассмотренных выше проекций.

Теперь заметим, что если имеем сечение m-выпуклого множества $E \subset M$ произвольной m-плоскостью l, то каждой точке $x \in E \cap l$ соответствует m-плоскость в M^*, которая не пересекает E^*, и, наоборот, каждой точке $x \in l \setminus E \cap l$ соответствует m-плоскость в M^*, которая пересекает E^*. Следовательно, если учесть очевидное равенство $\pi_M(E) = \pi_M(E^{**})$, то утверждение доказано.

Предложение 14. *Для проекции* $\pi_M : E \to \gamma$ *множество* $\gamma \setminus \pi_M(E)$ *гомеоморфно* $l \cap E^*$.

Под ограниченной частью границы понимаем точки границы, отличные от компактифицирующей точки.

Предложение 15. *Если* G *— ограниченное открытое множество, то точка* y *принадлежит ограниченной части границы* ∂G^* *тогда и только тогда, когда* m*-плоскость* $l(y)$ *проходит через какую-нибудь точку границы* ∂G, *но не пересекает множество* G.

Доказательство. Если m-плоскость $l(y_\circ)$, $y_\circ \in G^*$, не пересекает G, но проходит через некоторую точку $x \in \partial G$, то и $y_\circ$ не может лежать во внутренности относительного компакта G^*, иначе, если некоторая окрестность $U(y_\circ)$ точки $y_\circ$ лежит в G^*, то и все m-плоскости $l(y)$, $y \in U(y_\circ)$, не пересекают G, а это противоречит непустоте пересечения $l(y_\circ) \cap \partial G$. С другой стороны, если y находится в ограниченной части границы ∂G, то $y \in G^*$ в силу относительной компактности G^* и, следовательно, m-плоскость $l(y)$ не пересекает G. Если $l(y)$ не пересекает компакта G, то согласно предложению 2 y принадлежит открытому множеству $\overline{G}^* \subset G^*$ и не может лежать на границе ∂G^*. Поэтому $l(y)$ не пересекает G, но непременно пересекает G^*, значит, $l(y)$ проходит через некоторую точку границы ∂G.

Предложение 16. *Если* $E \subset R^n$ *—* (n, m)*-выпуклое множество, то и внутренность его* $\operatorname{int} E$ *—* (n, m)*-выпуклое множество.*

Доказательство. Нам нужно показать, что для произвольной точки $x \in \partial E$ существует m-плоскость, содержащая x и не пересекающая $\operatorname{int} E$. Для всех остальных точек из $R^n \setminus E$ это следует из (n, m)-выпуклости E. Рассмотрим компактную окрестность $\overline{U}(x)$ точки x. При многозначном непрерывном отображении Φ образ $\Phi(\overline{U}(x))$ — компакт. Выберем последовательность $\{x_n\} \in (\overline{U}(x) - x) \setminus E$ такую, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Очевидно, что

$$\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n\right) \subset \Phi(\overline{U}(x)).$$

Для каждой точки x_n существует m-плоскость $l(y_n)$, которая не пересекает E. Следовательно, существует точка y_n в компакте $\Phi(\overline{U}(x))$, которая задает эту плоскость. Выберем из последовательности $\{y_n\}$ сходящуюся последовательность $\{y'_n\}$. Тогда $\lim y'_n = y_\circ \in \Phi(\overline{U}(x))$. Точке $y_\circ$ соответствует m-плоскость $l(y_\circ)$, проходящая через точку x, и не пересекающая $\operatorname{int} E$, так как к ней сходится последовательность m-плоскостей $l(y_n)$, каждая из которых не пересекает $\operatorname{int} E$.

Будем говорить, что отображение f строго инвариантно на семействе $\mathfrak{B}$

подмножеств топологического пространства, если f отображает любое подмножество $A \in \mathfrak{B}$ на подмножество $B \in \mathfrak{B}$.

Теорема 2. *Если гомеоморфное преобразование* $f: R^n \to R^n$, $n \geq 2$, *строго инвариантно на* (n,m)-*выпуклых компактах, то* f — *аффинное преобразование.*

Доказательство. Если f не является аффинным преобразованием, то согласно [1] найдется m-плоскость l такая, что $f(L)$ не будет m-плоскостью. Не нарушая общности примем, что $L = \{x \mid x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0\}$, где x_i — i-я координата точки x. Пусть K_p — последовательность цилиндров, сходящаяся к L, вида $K_p = Q_p \times B_p^m$, где

$$Q_p = \{x' \in R^{n-m} \mid 1/p \leq |x'| \leq 1 - 1/p\} \subset R^{n-m},$$

$$B_p^m = \{x'' \in R^m \mid |x''| \leq p\} \subset R^m.$$

Очевидно,что все K_p — (n,m)-выпуклы. Кроме того, (n,m)-выпуклым будет множество $A = \bigcup_p K_p = \bigcup_p \operatorname{int} K_p$. Через начало координат проходит единственная m-плоскость l, которая не пересекает A. В силу того, что f сохраняет (n,m)-выпуклость компактов, все $f(K_p)$ — (n,m)-выпуклые компакты. Очевидно, что $K_p \subset K_{p+1}$, поэтому $f(K_p) \subset f(K_{p+1})$. Кроме того, $\bigcup f(K_p) = \bigcup \operatorname{int} f(K_p)$, $\operatorname{int} f(K_p) \subset \operatorname{int} f(K_{p+1})$ $\left(\operatorname{int} f(K_p)\right) \subset \left(\operatorname{int} f(K_{p+1})\right)$, где $\left(\operatorname{int} f(K_p)\right)$ — замкнутое множество. Согласно предложению 16 $\operatorname{int} f(K_p)$ — (n,m)-выпуклое множество. Тогда согласно предложениям 5 и 6

$$\left(\bigcup_p f(K_p)\right)^{**} = \left(\bigcup_p \operatorname{int} f(K_p)\right)^{**} = \left(\bigcap_p \left(\operatorname{int} f(K_p)\right)^{*}\right)^{*} =$$

$$= \bigcup_p \left(\operatorname{int} f(K_p)\right)^{**} = \bigcup_p \operatorname{int} f(K_p) = \bigcup_p f(K_p).$$

Поэтому вследствие гомеоморфности f и теоремы 1 $f(A) = \bigcup_p f(K_p)$ есть (n,m)-выпуклое множество. Для точки $f(0)$ существует m-плоскость $L_1 \supset$ $\supset f(0)$, не пересекающая $f(A)$. Множество $f(A)$ разбивает пространство R^n, поэтому точка $f(0)$, а следовательно, и m-плоскость L_1 должны лежать в множестве $f(L)$, гомеоморфном m-плоскости. Но так как m-мерное многообразие $f(L)$ не может содержать как собственное подмножество многообразие той же размерности, то $f(L) = L_1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим,что другой подход к заданию выпуклости на грассмановых многообразиях предложен в [3].

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
2. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
3. *Goodmen F. E.* When is a set of lines in space convex? // Notic. Amer. Math. Soc. – 1998. – **45**, № 2. – P. 222 – 232.

Получено 20.04.2000