УДК 517.9

В. А. Коваль (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ГАУССОВСКИХ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ

We investigate asymptotic properties of one-dimensional Gaussian processes of autoregression of second order. We prove the law of iterated logarithm for the case of an unstable autoregressive model.

Досліджуються асимптотичні властивості одновимірних гауссівських процесів авторегресії другого порядку. У випадку нестійкої моделі авторегресії доведено закон повторного логарифма.

Асимптотические свойства почти наверное (п. н.) процессов авторегрессии исследовались многими авторами (см. например, [1–5]). В случае устойчивых гауссовских моделей авторегрессии в [1, 4] получен аналог закона повторного логарифма (ЗПЛ). В работах [2, 3] исследовались также неустойчивые гауссовские модели авторегрессии и для них установлен ЗПЛ с точностью до положительной постоянной. В настоящей статье находятся точные значения этих постоянных для моделей второго порядка, порожденных „белым шумом".

Рассмотрим уравнение

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \gamma_n, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$; $x_0 = x_{-1} = 0$; $(\gamma_n, n \geq 1)$ — последовательность независимых гауссовских $N(0, 1)$-распределенных случайных величин.

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0.$$

Предположим для определенности, что

$$|\lambda_2| \leq |\lambda_1| = r.$$

Модель (1) называется устойчивой или неустойчивой в зависимости от того $r < 1$ или $r = 1$. Если $r > 1$, то модель (1) называют „взрывной".

Процесс $(x_n, n \geq 1)$ можно представить в виде (см., например, [6])

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}\gamma_k, \tag{2}$$

где

$$c_n = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_1^{n+1-j}\lambda_2^{j-1}, \quad n \geq 0.$$

Если $r < 1$, то

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

и согласно [1]

$$\limsup_{n\to\infty} (\ln n)^{-1/2}|x_n| = (2\sigma)^{1/2} \quad \text{п. н.}$$

Если $r > 1$, то, используя (2), несложно показать, что имеют место соотношения [5]:

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то

$$\lim_{n\to\infty} (r^n n)^{-1} |x_n| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \gamma_k \right| \quad \text{п. н.};$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n\to\infty} r^{-n} |x_n| = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{-k} \gamma_k \right| \quad \text{п. н.};$$

если $\lambda_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$, где $i = \sqrt{-1}$, $\varphi \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$, то множество предельных точек последовательности $(r^{-n} x_n, n \geq 1)$ совпадает почти наверное с множеством предельных точек последовательности $(\xi_n, n \geq 1)$, где

$$\xi_n = \frac{1}{\sin\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \sin[(n+1-k)\varphi] \gamma_k .$$

В случае $r = 1$ имеет место следующая теорема.

Полагаем

$$\chi_n = (n \ln\ln n)^{-1/2}, \quad n \geq 3.$$

Теорема. *Пусть* $r = 1$. *Тогда:*

1) *если* $\lambda_1 = \lambda_2 \, (= \pm 1)$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \chi_n |x_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \quad \textit{п. н.}; \tag{3}$$

2) *если* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_n |x_n| = 1 \quad \textit{п. н.}; \tag{4}$$

3) *если* $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_n |x_n| = \frac{2^{1/2}}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \quad \textit{п. н.}; \tag{5}$$

4) *если* $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, *где* $i = \sqrt{-1}$, $\varphi \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_n |x_n| = \frac{1}{|\sin\varphi|} \quad \textit{п. н.} \tag{6}$$

Доказательство. 1. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, то из (2) получаем

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (\pm 1)^{n-k} (n+1-k) \gamma_k .$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \gamma_j$, поэтому в силу [7] имеет место (3). При $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ соотношение (3) следует из предыдущего в силу гауссовости.

2. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из (2) получаем

$$x_n = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_1^{n+1-k} - \lambda_2^{n+1-k} \right) \gamma_k . \tag{7}$$

Отсюда при $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$

$$x_n = 2^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + (-1)^{n-k} \right) \gamma_k .$$

Легко убедиться, что

$$\limsup_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ — четные}}} \chi_n |x_n| = 1 \quad \text{п. н.}$$

и

$$\limsup_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ — нечетные}}} \chi_n |x_n| = 1 \quad \text{п. н.}$$

Отсюда следует (4).

3. В случае $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ представим $(x_n, n \ge 1)$ на основании (7) в виде

$$x_n(\lambda_1 - \lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_1^{n+1-k}\gamma_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_2^{n+1-k}\gamma_k.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства удовлетворяет классическо ЗПЛ, так как $\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_1^{n+1-k}\gamma_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (\pm 1)^k \gamma_k\right|$, где берем знак „+" или „–" зависимости от того $\lambda_1 = 1$ или $\lambda_1 = -1$. Второе слагаемое, умноженное χ_n, стремится п. н. к нулю при $n \to \infty$, так как согласно [1]

$$\limsup_{n\to\infty} (\ln n)^{-1/2} \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_1^{n+1-k}\gamma_k\right| = \left(\frac{2}{1-\lambda_2^2}\right)^{1/2} \quad \text{п. н.}$$

Отсюда следует (5).

4. Если $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, то из (7) получаем

$$x_n = \frac{1}{\sin\varphi} \sum_{k=1}^{n} \sin[(n+1-k)\varphi]\gamma_k. \quad (8$$

Положим $z_n = x_n \sin\varphi$, $n \ge 1$, и для доказательства соотношения (6) покаже что

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_n |z_n| = 1 \quad \text{п. н.}$$

Сначала покажем, что имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_n |z_n| \ge 1 \quad \text{п. н.} \quad (9$$

Используя (8), нетрудно убедиться, что найдется постоянная $M > 0$ такая, чт при всех $n > m \ge 1$

$$|\rho(m,n)| \le M\left(\frac{m}{n}\right)^{1/2},$$

где $\rho(m,n) = \mathrm{E}(z_m z_n)/\left(\mathrm{E}z_m^2\,\mathrm{E}z_n^2\right)^{1/2}$; E — знак математического ожидани. Поэтому на основании [8] заключаем, что имеет место (9).

Для завершения доказательства покажем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_n |z_n| \le 1 \quad \text{п. н.} \quad (1($$

Будем обозначать через $\langle \cdot,\cdot \rangle$ и $\|\cdot\|$ соответственно скалярное произведение евклидову норму векторов из $\mathbb{R}^2$. Введем в рассмотрение векторы

$$T_n = (\sin(n+1)\varphi, -\cos(n+1)\varphi), \qquad U_n = (\cos n\varphi, \sin n\varphi), \qquad n \ge 1.$$

Поскольку $\sin[(n+1-k)\varphi] = \langle T_n, U_k \rangle$, то

$$z_n = \langle T_n, S_n \rangle,$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \gamma_k, \quad n \geq 1.$$

Отсюда

$$|z_n| \leq \|S_n\|, \quad n \geq 1. \tag{11}$$

Легко убедиться, что

$$\mathrm{E}\|S_n\|^2 = n, \qquad s_n^2 = \lambda_{\max}\left(\mathrm{E}\left(S_n^T S_n\right)\right) \sim \frac{n}{2}, \quad n \to \infty,$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное значение матрицы, а T — знак транспонирования. Поэтому на основании, например, теоремы 1.1 [9] (при $p = 4$) заключаем, что

$$\limsup_{n \to \infty} \chi_n \|S_n\| \leq 1 \quad \text{п. н.}$$

Отсюда и из (11) следует (10). Теорема доказана.

1. *Lai T.L.* Gaussian processes, moving averages and quick detection problems // Ann. Probab. – 1973. – **1**, № 5. – P. 825 – 837.
2. *Булдыгин В.В.,Коваль В.А.* Асимптотическое поведение решений стохастических разностных уравнений. – Киев,1991. – 42 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.24).
3. *Buldygin V., Solntsev S.* Asymptotic behaviour of linearly transformed sums of random variables. – Dordrecht : Kluwer, 1997. – 516 p.
4. *Коваль В.А., Шваბе Р.* Предельная теорема для максимума зависимых гауссовских случайных элементов в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 7. – С. 1005 – 1008.
5. *Duflo M.* Random iterative models. – Berlin etc.: Springer, 1997. – 385 p.
6. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
7. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm // Z.Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1964. – **3**, № 3. – P. 211 – 226.
8. *Коваль В.О.* Про закон повторного логарифма для гауссових послідовностей та його застосування // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1996. – Вип. 54. – С. 66 – 71.
9. *Chen X.* On the law of the iterated logarithm for independent Banach space valued random variables // Ann. Probab. – 1993. – **21**, № 4. – P.1991 – 2011.

Получено 24.03.99,
после доработки — 10.11.99