УДК 517.5

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков (Донецк. ун-т)

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

We obtain new integral representations for a hypergeometric function.

Одержано нові інтегральні зображення для гіпергеометричної функції.

Введение. Пусть a, b, c — произвольные комплексные числа, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Рассмотрим гипергеометрический ряд

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \qquad |z| < 1,$$

где, как обычно, $(a)_n = \Gamma(a+n) / \Gamma(a)$ и Γ — гамма-функция.

В настоящее время для F найдено много всевозможных интегральных представлений, рекуррентных формул, теорем сложения и т. д. (см. обзоры [1, 2] с обширной библиографией). Эти результаты позволяют, в частности, получить аналитическое продолжение F на различные подмножества комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а также исследовать асимптотическое поведение F при больших значениях параметров (см. [1], гл. 2, п.2.3).

В данной работе получены новые интегральные представления для функций вида

$$\varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2}; \alpha+1; -\operatorname{sh}^2 r\right), \tag{1}$$

где $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\beta > -1/2$, $\lambda - \beta = 0, 1, 2, \ldots$ (см. п.1). Эти функции непосредственно связаны со сферическими функциями на симметрических пространствах ранга 1 некомпактного типа [3, 4]. Их изучение представляет большой интерес в связи с многочисленными приложениями в ряде задач интегральной геометрии и теорией функций, периодических в среднем [5, 6]. Отметим также, что применение функций вида (1) сыграло ключевую роль при решении проблем Л. Зальцмана и В. В. Произволова (см. [7–9]), а также при получении окончательного варианта локальной теоремы о двух радиусах [9, 10].

Найденные интегральные представления позволяют получить любое число членов асимптотического ряда для $\varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(r)$ при $\lambda \to \infty$ с точным вычислением коэффициентов разложения как функций от параметров (см., например, теорему 2). Отметим, что первый член такого разложения при некоторых более общих условиях получен Ватсоном (см., например, формулу (17) п.2.3 гл. 2 [1]).

1. Формулировки основных результатов. Далее, как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}^1$ обозначаем соответственно множества натуральных, целых неотрицательных и вещественных чисел, $[t]$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}^1$, C_m^k — биномиальные коэффициенты. Для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $s \geq 0$, $\beta > -1/2$, $r > 0$ положим

$$I(\lambda, s, \beta, r) = \int_{-r}^{r} e^{i\lambda t}(\operatorname{sh}^2 r - \operatorname{sh}^2 t)^{s+\beta-1/2}\,dt.$$

Обозначим $\gamma = \alpha + \beta$, $\nu = [(\alpha - \beta)/2]$,

$$q_1(\lambda, \alpha, \beta, r) = \frac{(-1)^\nu \Gamma(\gamma+1)}{2^\gamma \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{1-i\lambda}{2}\right)_\nu \left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)_\nu (\operatorname{ch} r)^{2\beta}},$$

$$q_2(\lambda, \alpha, \beta, r) = 2\operatorname{ch} r\, q_1\left(\lambda + i, \alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, r\right).$$

Пусть также $n \in \mathbb{N}$ и

$$q(\lambda, n, r) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\left(\frac{3}{2}\right)_{n/2} \dfrac{\sqrt{\pi \operatorname{sh} 2r}}{(\operatorname{sh} r)^{n+1}} \cdot \dfrac{iq_2(\lambda, n, 1, r)}{2 - n - i\lambda}, & \text{если } n \text{ — четное;} \\ (-1)^{(n+1)/2}\left(\frac{3}{2}\right)_{(n-1)/2} \dfrac{\sqrt{\pi \operatorname{sh} 2r}}{(\operatorname{sh} r)^{n+1}} \cdot q_1(\lambda, n, 1, r), & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\beta > -1/2$, $r > 0$. *Тогда:*

1) *если* $(\alpha - \beta)/2 \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r) = q_1(\lambda, \alpha, \beta, r)\sum_{s=0}^{\nu} \frac{C_\nu^s \left(\frac{\gamma+1}{2} + s - \nu\right)_{\nu-s} \left(\frac{2-2s-\gamma}{2}\right)_s}{(\operatorname{sh} r)^{\gamma+2s}} I(\lambda, s, \beta, r); \tag{2}$$

2) *если* $(\alpha - \beta - 1)/2 \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r) = q_2(\lambda, \alpha, \beta, r)\sum_{s=0}^{\nu+1} \frac{C_{\nu+1}^s \left(\frac{\gamma}{2} + s - \nu\right)_{\nu+1-s} \left(\frac{1-2s-\gamma}{2}\right)_s}{(\operatorname{sh} r)^{\gamma-1+2s}} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\alpha - \beta - 1 + i\lambda} - \frac{s}{(\nu+1)(\gamma - 1 + 2s)}\right) I(\lambda + i, s, \beta, r). \tag{3}$$

Таким образом, $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ как функция переменной λ при указанных значениях параметров α, β, r представляет собой преобразование Фурье финитной функции, указанной явно в интегральных представлениях теоремы 1. Это позволяет использовать известные факты об асимптотическом разложении интегралов Фурье (см., например, [11]) для изучения асимптотического поведения

$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ при $\lambda \to \infty$. В качестве примера рассмотрим случай $\alpha = n$, $\beta = 1$, соответствующий обобщенной сферической функции $\varphi_\lambda^{(n,1)}(r)$ на комплексном гиперболическом пространстве размерности n [4].

Теорема 2. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $r > 0$ *при* $\lambda \to +\infty$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\varphi_\lambda^{(n,1)}(r) \sim q(\lambda, n, r)\left(\sin\left(\lambda r + \frac{\pi}{4}(2n+1)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{2k-1/2}} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\lambda r + \frac{\pi}{4}(2n+1)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{\lambda^{2k+1/2}}\right),$$

где постоянные c_k *и* d_k *зависят лишь от* r, n.

Явные выражения для c_k и d_k получаются из равенств (2), (3) стандартными вычислениями (см. [11], гл. 2, теорема 10.2). В частности, при $k = 1$ $c_1 = 1$, $d_1 = \frac{3}{4}\operatorname{cth} 2r + \frac{n^2-1}{2}\operatorname{cth} r$.

Отметим, что аналогом теоремы 2, соответствующим сферической функции на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, является известное асимптотическое разложение для функции Бесселя $J_{(n-2)/2}$ (см., например, [12], гл. 2, §29).

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\eta > 0$, $-1 < x < 1$, $a \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$F\left(a, a-\eta+\frac{1}{2}; \eta+\frac{1}{2}; x^2\right) = \frac{\Gamma(2\eta)}{2^{2\eta-1}\Gamma^2(\eta)}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{\eta-1}}{(1-2xt+x^2)^a}dt. \tag{4}$$

Доказательство. Из формулы (34) п.2.1 гл. 2 [1] имеем

$$\frac{1}{(1+x^2)^a}\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\eta-1}}{\left(1+\dfrac{2x\cos\theta}{1+x^2}\right)^a}d\theta = \frac{2^{2\eta-1}\Gamma^2(\eta)}{(1+x)^{2a}\Gamma(2\eta)}F\left(a, \eta; 2\eta; \frac{4x}{(1+x)^2}\right).$$

Отсюда и из формулы (32) п. 2.1 гл. 2 [1] находим

$$\frac{1}{(1+x^2)^a}\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\eta-1}}{\left(1+\dfrac{2x\cos\theta}{1+x^2}\right)^a}d\theta = \frac{2^{2\eta-1}\Gamma^2(\eta)}{(1+x^2)^a\Gamma(2\eta)}F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2}; \eta+\frac{1}{2}; \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{2^{2\eta-1}\Gamma^2(\eta)}{\Gamma(2\eta)}F\left(a, a-\eta+\frac{1}{2}; \eta+\frac{1}{2}; x^2\right). \tag{5}$$

Поскольку

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{\eta-1}}{(1-2xt+x^2)^a}dt = \frac{1}{(1+x^2)^a}\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\eta-1}}{\left(1+\dfrac{2x\cos\theta}{1+x^2}\right)^a}d\theta,$$

из (5) получаем (4).

Пусть $y > -3/2$. Обозначим

$$h(y) = \frac{\Gamma(2y+3)}{2^{2y+2}\Gamma^2\left(\dfrac{2y+3}{2}\right)}.$$

Лемма 2. *При* $y > -3/2$, $x < 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ *имеет место равенство*

$$F(\mu; 2y+3-\mu; y+2; x) =$$

$$= \frac{h(y)}{(x^2-x)^{y+1}} \int_{-Q(x)}^{Q(x)} \exp\left(2t\left(\mu - y - \frac{3}{2}\right)\right)(-x - \operatorname{sh}^2 t)^{y+1/2} dt, \tag{6}$$

где $Q(x) = \operatorname{arsh}\sqrt{-x}$.

Доказательство. Сделаем в интеграле (4) замену переменной

$$u = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x^2}{1-2xt+x^2}.$$

Полагая $x = \operatorname{th} r$, $r > 0$, из (4) находим

$$\left(1-\operatorname{th}^2 r\right)^a F\left(a, a-\eta+\frac{1}{2}; \eta+\frac{1}{2}; \operatorname{th}^2 r\right) =$$

$$= \frac{h\left(\eta - \frac{3}{2}\right)\left(1-\operatorname{th}^2 r\right)^{\eta}}{(\operatorname{th} r)^{2\eta-1}} \int_{-r}^{r} \left(\operatorname{th}^2 r - \operatorname{th}^2 t\right)^{\eta-1} (\operatorname{ch} t)^{2\eta-2} e^{2t(a-\eta)} dt. \tag{7}$$

Далее, из равенства

$$(1-z)^a F(a, b; c; z) = F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right)$$

(см. формулу (3) п. 2.9 гл. 2 [1] имеем

$$\left(1-\operatorname{th}^2 r\right)^{\mu} F\left(\mu, \mu-y-1; y+2; \operatorname{th}^2 r\right) = F\left(\mu, 2y-\mu+3; y+2; -\operatorname{sh}^2 r\right).$$

Отсюда и из (7) получаем

$$F\left(\mu, 2y+3-\mu; y+2; -\operatorname{sh}^2 r\right) =$$

$$= \frac{h(y)\,2^{2y+2}}{(\operatorname{sh} 2r)^{2y+2}} \int_{-r}^{r} \exp\left(2t\left(\mu - y - \frac{3}{2}\right)\right)\left(\operatorname{sh}^2 r - \operatorname{sh}^2 t\right)^{y+1/2} dt,$$

откуда следует утверждение леммы.

3. Доказательство основных результатов. ***Доказательство теоремы* 1.** Для доказательства первого утверждения используем равенство

$$\frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-x)^{a+b-c-n} F(a, b; c+n; x) =$$

$$= \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{a+b-c} F(a, b; c; x)\right) \tag{8}$$

(см. формулу (24) п. 2.8 гл. 2 [1]).

Положим в (8)

$$a = \frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \quad b = \frac{\gamma+1-i\lambda}{2}, \quad c = \frac{\gamma+2}{2}, \quad n = \nu = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Учитывая (6), имеем

$$\frac{\left(\frac{1-i\lambda}{2}\right)_\nu\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)_\nu}(1-x)^\beta F\left(\frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \frac{\gamma+1-i\lambda}{2}; \alpha+1; x\right) =$$

$$= \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left((1-x)^{\gamma/2} F\left(\frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \frac{\gamma+1-i\lambda}{2}; \frac{\gamma+2}{2}; x\right)\right) =$$

$$= \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(h\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)\int_{-Q(x)}^{Q(x)} e^{i\lambda t}\frac{\left(-x-\operatorname{sh}^2 t\right)^{\frac{\gamma-2}{2}}}{(-x)^{\gamma/2}}dt\right). \tag{9}$$

Дифференцируя (9) с использованием формулы Лейбница, получаем первое утверждение теоремы 1.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть

$$a = \frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \quad b = \frac{\gamma+3-i\lambda}{2}, \quad c = \frac{\gamma+3}{2}, \quad n = \nu = \frac{\alpha-\beta-1}{2}.$$

Из (8) и леммы 2 имеем

$$\frac{\left(\frac{2-i\lambda}{2}\right)_\nu\left(\frac{i\lambda}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)_\nu}(1-x)^{\beta+1} F\left(\frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \frac{\gamma+3-i\lambda}{2}; \alpha+1; x\right) =$$

$$= \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left((1-x)^{(\gamma+1)/2} F\left(\frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \frac{\gamma+3-i\lambda}{2}; \frac{\gamma+3}{2}; x\right)\right) = h\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\psi_\nu(x), \tag{10}$$

где

$$\psi_\nu(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\int_{-Q(x)}^{Q(x)} e^{(i\lambda-1)t}\frac{\left(-x-\operatorname{sh}^2 t\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{(-x)^{(\gamma+1)/2}}dt\right).$$

Далее используем равенство

$$(c_1-a_1)x^{c_1-a_1-1}(1-x)^{a_1+b_1-c_1-1}F(a_1-1, b_1; c_1; x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{c_1-a_1}(1-x)^{a_1+b_1-c_1}F(a_1, b_1; c_1; x)\right) \tag{11}$$

(см. формулу (23) п. 2.8 гл. 2 [1]).

Положим в (11)

$$a_1 = \frac{\gamma+3-i\lambda}{2}, \quad b_1 = \frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \quad c_1 = \alpha+1.$$

Учитывая (10), получаем

$$\left(\nu+\frac{i\lambda}{2}\right)x^{\nu-1+i\lambda/2}(1-x)^\beta F\left(\frac{\gamma+1+i\lambda}{2}, \frac{\gamma+1-i\lambda}{2}; \alpha+1; x\right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)_\nu h\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\left(\frac{2-i\lambda}{2}\right)_\nu\left(\frac{i\lambda}{2}\right)_\nu}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+i\lambda/2}\psi_\nu(x)\right).$$

Как и выше, отсюда следует второе утверждение и теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2 является прямым следствием равенств (2), (3) и теоремы об асимптотическом разложении интегралов Фурье (см. теорему 10.2 гл. 2 [11]).

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 294 с.
2. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
3. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
4. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompei'us problem on symmetric spaces // Comment. math. helv. – 1980. – **55**. – P. 593 – 621.
5. *Волчков В. В* Проблемы типа Помпейю на многообразиях // Докл. НАН Украины. – 1993. – № 11. – С. 9 – 12.
6. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1989. – **54**. – С. 5 – 11.
7. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 2. – С. 30 – 36.
8. *Волчков Вит. В.* Об одной задаче В. В. Производова // Междунар. конф. по теории приближения и ее применениям, посвященная памяти В. К. Дзядыка: Тез. докл. – Киев, 1999. – С. 90 – 91.
9. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 6. – С. 15 – 34.
10. *Волчков В. В.* Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. – 1996. – **347**, № 3. – С. 300 – 302.
11. *Риекстыньш П. Я.* Асимптотические разложения интегралов: В 3 т. – Рига: Зинатне, 1974. – Т.1. – 390 с.
12. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.

Получено 07.10.99