УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЕМКОСТЕЙ КОНДЕНСАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

We continue to investigate the problem of the energy minimum for condensers started at the first part of the present work. Condensers are treated in a certain generalized sense. The emphasis is on the case of classes of measures noncompact in the vague topology. In the case of positive definite kernel, we develop an approach to this minimum-problem with applying both strong and vague topologies in the corresponding semimetric spaces of Radon alternating-sign measures. We obtain necessary and (or) sufficient conditions for the existence of minimal measures. We describe potentials for appropriately determined extremal measures.

Продовжується дослідження задачі про мінімум енергії для конденсаторів, розпочате в першій частині роботи. Конденсатори трактуються в певному узагальненому сенсі. Основну увагу приділено випадку класів мір, некомпактних у слабкій топології. У випадку позитивно визначеного ядра розроблено підхід до цієї мінімум-проблеми, що грунтується на використанні у відповідних напівметричних просторах знакозмінних мір Радона як сильної, так і слабкої топологій. Отримано необхідні та (або) достатні умови існування мінімальних мір. Для належним чином визначених екстремальних мір знайдено опис потенціалів.

В настоящей части работы продолжено исследование экстремальной $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи, сформулированной и частично изученной в [1] (здесь $\mathcal{A}$ — (m, p)-конденсатор, κ — ядро в отделимом локально компактном пространстве X, a — p-мерный положительный вектор). Без дополнительных пояснений сохраняются все принятые в [1] предположения и используются понятия и обозначения; нумерация пунктов продолжена.

При исследовании проблемы существования минимальных в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мер λ основной интерес представляет случай некомпактного конденсатора $\mathcal{A}$; в этом случае класс $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ не замкнут в слабой топологии и, вообще говоря, не содержит слабых пределов минимизирующих направленностей мер. В случае положительно определенного ядра для преодоления возникающих в связи с этим трудностей ниже предложен некоторый подход к решению экстремальных задач теории потенциала на классах знакопеременных мер Радона в X, основанный на использовании в надлежащих полуметрических (с полуметрикой, индуцированной из $\mathcal{E}_\kappa$) пространствах как сильной, так и слабой топологий.

Ранее в работах автора [2–6] было доказано, что в случае ядер Ньютона, Рисса, Грина в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, для метрических пространств мер, ассоциированных с замкнутыми конденсаторами и имеющих ограниченную вариацию, справедливы аналоги утверждений Картана [7] (установленных им для $\mathcal{E}_\kappa^+$) о сильной полноте и о соотношении между сильной и слабой топологиями. Постулируя для положительно определенного ядра в X доказанные в [2–6] свойства классических ядер, в п. 9 определяются понятия *$\mathcal{A}$-совершенных* или, более общо, *$\mathcal{A}$-согласованных* ядер, обобщающие и развивающие соответствующие понятия теории емкостей множеств [8] (см. п. 8). Для этих ядер в п. 10 вводятся и изучаются *экстремальные* в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче меры γ, являющиеся одновременно сильными и *$\mathcal{A}$-слабыми* (см. п. 6) пределами минимизирующих направленностей; описанию их потенциалов $\kappa(x, \gamma)$ посвящен п. 11. Энергия экстремальной меры γ равна $w_\kappa(\mathcal{A}, a)$, поведение ее потенциала сходно с поведением потенциалов минимальных мер (в случае их существования), однако, вообще говоря, мера γ не принадлежит классу $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и поэтому не является минимальной. Пункт 12 посвящен получению условий на некомпактный конденсатор $\mathcal{A}$ и ядро κ, достаточных (а при дополнительных ограничениях и необходимых) для соотношения $\gamma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и, следовательно, для разрешимости $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи.

6. Топологии, сходимости мер. Исследуем разные типы сходимостей направленностей мер $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и соотношения между ними. Всюду в этом пункте предполагаем выполненным условие $\overline{A^+}\cap\overline{A^-} = \varnothing$. Тогда $\overline{\mathcal{A}} :=$ $:= (\overline{A_1},\ldots,\overline{A_p})$ — (замкнутый) (m, p)-конденсатор. Нам понадобится такая лемма.

Лемма 6.1. *Если* $F_1, F_2 \subset X$ *замкнуты и* $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, *то для каждого* $f \in$ $\in C_0$ *существует* $f' \in C_0$ *со свойствами:* $f' = f$ *на* F_1, $S(f') \cap F_2 = \varnothing$.

Доказательство проводится стандартными методами (см., например, [9, с. 39]) с использованием теоремы Урысона – Титце о непрерывном продолжении функций.

6.1. Справедливо следующее соотношение между слабой сходимостью мер из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и сходимостью их положительных и отрицательных частей (см. также приведенное ниже замечание).

Теорема 6.1. *Пусть* $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *слабо сходится к* μ. *Тогда* $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$, *а* $(\mu_s^+)_{s\in S}$ *и* $(\mu_s^-)_{s\in S}$ *слабо сходятся соответственно к* μ^+ *и* μ^-.

Доказательство. Для каждого $f \in C_0$ выберем $f' \in C_0$ со свойствами: $f' = f$ на $\overline{A^+}$, $S(f') \cap \overline{A^-} = \varnothing$. Тогда $\mu_s^+(f) = \mu_s^+(f') = \mu_s(f')$ $\forall s \in S$, откуда в силу слабой сходимости $(\mu_s)_{s\in S}$ следует существование предела $\lim_{s\in S} \mu_s^+(f) =: \omega_+(f)$. Учитывая произвольность $f \in C_0$ и замечая, что ω_+ — линейная положительная форма на C_0, заключаем, что ω_+ — мера и $\mu_s^+ \to$ $\to \omega_+$ слабо. Вследствие слабой замкнутости $\mathfrak{M}^+(\overline{A^+})$ $\omega_+ \in \mathfrak{M}^+(\overline{A^+})$. Аналогично, $(\mu_s^-)_{s\in S}$ слабо сходится к некоторому $\omega_- \in \mathfrak{M}^+(\overline{A^-})$.

Обозначая $\omega := \omega_+ - \omega_-$, имеем $\omega \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ (в этом легко убедиться, рассматривая сужения ω на надлежащие универсально измеримые подмножества в $\overline{A_i}$, $i \in I$) и $\mu_s \to \omega$ слабо. В силу отделимости слабой топологии и единственности канонического разложения получаем $\mu^+ = \omega_+$ и $\mu^- = \omega_-$, откуда следует справедливость теоремы.

Замечание. Для справедливости второго утверждения теоремы 6.1 условие $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ существенно: легко построить такую слабо сходящуюся направленность $(\nu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(X)$, что $(\nu_s^+)_{s\in S}$ и $(\nu_s^-)_{s\in S}$ вообще не имеют пределов в слабой топологии.

6.2. Введем в рассмотрение следующую $\mathcal{A}$-*слабую* топологию в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$, оказавшуюся удобным аппаратом в наших исследованиях.

Определение 6.1. *Будем говорить, что* $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *сходится к* $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ $\mathcal{A}$-*слабо, если для каждого* $i \in I$ $(\mu_s^i)_{s\in S}$ *слабо сходится к* μ^i.

Лемма 6.2. *Из* $\mathcal{A}$-*слабой сходимости в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *следует слабая сходимость; обратное утверждение справедливо тогда и только тогда, когда* $\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \varnothing$ $\forall i \neq j$.

Доказательство. Достаточная часть второго утверждения доказывается аналогично теореме 6.1 с использованием леммы 6.1; остальные утверждения очевидны.

Соответствующую $\mathcal{A}$-слабой сходимости топологию в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ назовем $\mathcal{A}$-слабой топологией; как следует из леммы 6.2, она, вообще говоря, сильнее слабой топологии.

Из теоремы 6.1 и леммы 6.2 вытекает такое следствие.

***Следствие* 6.1.** *Класс $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ слабо (а поэтому и $\mathcal{A}$-слабо) замкнут.*

Для $r = (r_1, \dots, r_p)$ с $r_i \geq 0$ $\forall i$ введем в рассмотрение следующий класс мер:

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}, \leq r) := \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \colon \mu^i(X) \leq r_i \quad \text{для всех} \quad i \in I\}.$$

Используя лемму 1.3 из [1], получаем следующее утверждение.

Лемма 6.3. *Если $\mathcal{A}$ замкнут, то $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, \leq r)$ $\mathcal{A}$-слабо (а поэтому и слабо) компактен. Если $\mathcal{A}$ компактен, то $\mathcal{A}$-слабо (и слабо) компактны $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, \leq r)$ и $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, r)$.*

Лемма 6.4. *Если $\mathfrak{R}$ — множество в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \leq r)$, μ — его слабая предельная точка, то существует его $\mathcal{A}$-слабая предельная точка μ_0, эквивалентная μ в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$.*

Доказательство. Пусть $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathfrak{R}$ — слабо сходящаяся к μ направленность. В силу $\mathcal{A}$-слабой компактности $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \leq r)$ она имеет $\mathcal{A}$-слабую предельную точку $\mu_0 \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \leq r)$. Но тогда μ_0 — слабая предельная точка $(\mu_s)_{s \in S}$, и поэтому $\mu_0 = \mu$.

6.3. Зафиксируем направленность $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и покажем, что при определенных условиях ее слабую сходимость можно проверять не на всем пространстве $\boldsymbol{C}_0$.

Определение 6.2 (ср. с [10, 11]). *Множество $\mathcal{H} \subset \boldsymbol{C}_0$ называется изобильным (аналогично, весьма изобильным) в $\boldsymbol{C}_0$, если для каждой функции $f \in \boldsymbol{C}_0$ и некоторой (соответственно, любой) компактной окрестности U ее носителя $S(f)$ выполняется следующее утверждение: для произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $h \in \mathcal{H}$ с носителем в U такая, что $|f(x) - h(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in \boldsymbol{X}$.*

Теорема 6.2. *Пусть $\mathcal{H} \subset \boldsymbol{C}_0$ весьма изобильно в $\boldsymbol{C}_0$ и выполняется*

$$\lim_{s \in S} \mu_s(h) = \mu(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}. \tag{6.1}$$

Тогда $\mu_s \to \mu$ слабо.

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in \boldsymbol{C}_0$ и компактную окрестность V ее носителя $S(f)$. Докажем существование $s_0 \in S$, удовлетворяющего условию

$$M(s_0) := \sup_{s \in S,\ s \geq s_0} |\mu_s|(V) < +\infty.$$

Доказательство этого утверждения достаточно провести для случая $V \cap \overline{A^-} = \varnothing$. Поскольку $\mathcal{H}$ весьма изобильно в $\boldsymbol{C}_0$, то найдется $h_0 \in \mathcal{H}$ со свойствами $S(h_0) \cap \overline{A^-} = \varnothing$ и $h_0 \geq \varphi_V$, где φ_V — характеристическая функция множества V. Отсюда находим

$$|\mu_s|(V) = \mu_s^+(V) = \int \varphi_V \, d\mu_s^+ \leq \int h_0 \, d\mu_s^+ = \mu_s(h_0),$$

и поэтому, учитывая соотношение (6.1) при $h = h_0$, получаем требуемое.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем функцию $v \in \mathcal{H}$ со свойствами $S(v) \subset V$ и

$$\max_{x \in V} |f(x) - v(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3M(s_0)}, \quad |\mu(f) - \mu(v)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Применяя условие (6.1) при $h = v$, находим $s_1 \in S$ такое, что

$$|\mu_s(v) - \mu(v)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall s \geq s_1.$$

Тогда для всех $s \geq \max\{s_0, s_1\}$ справедливы соотношения

$$|\mu(f)-\mu_s(f)| \leq |\mu(f)-\mu(v)|+|\mu(v)-\mu_s(v)|+|\mu_s(v)-\mu_s(f)| \leq$$
$$\leq \frac{2\varepsilon}{3}+\int|v-f|d|\mu_s| \leq \varepsilon,$$

доказывающие в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ и $f \in C_0$ теорему 6.2.

Пусть κ — положительно определенное ядро. Кроме сильной топологии, в $\mathcal{E}_\kappa$ рассматривается так называемая $\mathcal{E}_\kappa$-*слабая* топология — топология, определяемая полунормами $\mu \mapsto |\kappa(\mu,\nu)|$, $\nu \in \mathcal{E}_\kappa$ [8, 12]. Следующее утверждение исследует соотношение между $\mathcal{E}_\kappa$-слабой сходимостью направленностей мер из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и их слабой сходимостью.

Через C_0^κ обозначим множество всех $f \in C_0$, представимых в виде потенциалов $\kappa(x,\mu)$ мер с конечной энергией $\kappa(\mu,\mu)$.

Следствие 6.2. *Если C_0^κ весьма изобильно в C_0, то из $\mathcal{E}_\kappa$-слабой сходимости $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ к μ следует ее слабая сходимость к тому же пределу.*

Доказательство. На основании определений заключаем, что в условиях следствия для всех функций из C_0^κ выполняется (6.1). Применяя теорему 6.2, получаем требуемое.

Замечание. В случае, когда меры μ_s, $s \in S$, имеют ограниченную вариацию либо знакопостоянны, теорема 6.2 (следствие 6.2) останется справедливой, если условие весьма изобильности множества $\mathcal{H}$ (соответственно, C_0^κ) заменить более слабым условием его изобильности. Для знакопостоянных мер эти утверждения известны [7, 12, 13].

7. Случай компактного конденсатора. Этот пункт посвящен решению $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи в случае, когда основным средством исследования является $\mathcal{A}$-слабая топология.

7.1. Всюду в пп. 7.1 предполагаем выполненным условие $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < +\infty$. Для произвольного (не обязательно компактного) конденсатора $\mathcal{A}$ примем следующее определение.

Определение 7.1. *Направленность мер $(\mu_s)_{s\in S}$ будем называть минимизирующей в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче, если $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и выполняется*

$$\lim_{s\in S} \kappa(\mu_s,\mu_s) = w_\kappa(\mathcal{A}, a).$$

Класс всех минимизирующих в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче направленностей обозначим через $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. Переходя при необходимости к поднаправленности и меняя обозначения, для $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ всегда будем считать выполненным условие $\sup_{s\in S} \kappa(\mu_s,\mu_s) < +\infty$.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{A}$ компактен, а κ и его транспонированное ядро κ' непрерывны на $A^+ \times A^-$. Тогда для любого a класс $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ минимальных в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мер не пуст и $\mathcal{A}$-слабо (а поэтому и слабо) компактен.*

Доказательство. Зафиксируем направленность $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$. В силу $\mathcal{A}$-слабой компактности $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ из нее можно выделить поднаправленность $(\mu_t)_{t\in T}$, $\mathcal{A}$-слабо сходящуюся к некоторому $\lambda \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$. Покажем, что $\lambda \in \mathcal{W}$; для этого достаточно доказать неравенство

$$\kappa(\lambda,\lambda) \leq \liminf_{t\in T} \kappa(\mu_t,\mu_t). \tag{7.1}$$

(Заметим, что энергия $\kappa(\lambda,\lambda)$ определена, так как $\kappa(\lambda^+,\lambda^-)$ и $\kappa(\lambda^-,\lambda^+)$ конечны.)

Применяя лемму 2.1 из [1], получаем

$$\kappa(\lambda^+,\lambda^+) \le \liminf_{t\in T} \kappa(\mu_t^+,\mu_t^+), \quad \kappa(\lambda^-,\lambda^-) \le \liminf_{t\in T} \kappa(\mu_t^-,\mu_t^-). \tag{7.2}$$

С помощью стандартных рассуждений, основанных на использовании теоремы Урысона – Титце, убеждаемся в существовании функции $f\in C_0(X\times X)$, равной κ на $A^+\times A^-$. Поэтому для каждой меры ν в $X\times X$, сосредоточенной на $A^+\times A^-$, выполняется $\nu(f)=\int\kappa\,d\nu$. Используя лемму 1.6 из [1] и слабую сходимость направленности мер-произведений $(\mu_t^+\otimes\mu_t^-)_{t\in T}$ к $\lambda^+\otimes\lambda^-$ [1] (лемма 1.5), отсюда находим

$$\kappa(\lambda^+,\lambda^-) = (\lambda^+\otimes\lambda^-)(f) = \lim_{t\in T}(\mu_t^+\otimes\mu_t^-)(f) = \lim_{t\in T}\kappa(\mu_t^+,\mu_t^-). \tag{7.3}$$

Применяя эти же рассуждения к ядру κ', получаем $\kappa(\lambda^-,\lambda^+)=\lim_{t\in T}\kappa(\mu_t^-,\mu_t^+)$, что вместе с (7.2) и (7.3) доказывает требуемое соотношение (7.1).

Чтобы доказать утверждение компактности, рассмотрим произвольную направленность $(\lambda_s)_{s\in S}\subset\mathcal{W}$. Очевидно, $(\lambda_s)_{s\in S}\in\mathbb{M}$, и поэтому, по доказанному, существует мера $\lambda'\in\mathcal{W}$, являющаяся ее $\mathcal{A}$-слабой (и слабой) предельной точкой. Теорема 7.1 доказана.

Замечание. При дополнительном условии $A_i\cap A_j=\varnothing\ \forall\, i\ne j$ утверждения теоремы 7.1 о разрешимости $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи и о слабой компактности класса $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ доказаны в [13] (теоремы 2.6 и 2.8) (и в [8] (теорема 2.3) — в случае $I=\{1\}$).

Далее для любого множества $E\subset X$ будем использовать обозначение [1]

$$w_\kappa(E) := \inf_{\nu\in\mathfrak{M}^+(E,1)}\kappa(\nu,\nu).$$

С помощью леммы 4.5 из [1] получаем следующее обобщение теоремы 7.1.

Теорема 7.1′. *Пусть* $\mathcal{A}'=(A_1',\ldots,A_p')$ *универсально измерим и предположим, что существует компактный конденсатор* $\mathcal{A}$, *для которого* κ *и* κ' *непрерывны на* $A^+\times A^-$ *и* $w_\kappa(A_i\Delta A_i')=+\infty$ $\forall i\in I$. *Тогда для любого* a *класс* $\mathcal{W}(\mathcal{A}',a,\kappa)$ *не пуст, совпадает с* $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *и компактен в* $\mathcal{A}$*-слабой и слабой топологиях.*

7.2. Пусть $(\mathcal{K}_s)_{s\in S}$ — убывающая направленность компактных (m,p)-конденсаторов $\mathcal{K}_s=(K_1^s,\ldots,K_p^s)$. Множества $K_i:=\bigcap_{s\in S}K_i^s$, $i\in I$, не пусты и образуют (компактный) (m,p)-конденсатор $\mathcal{K}:=(K_1,\ldots,K_p)$.

Теорема 7.2. *Если* κ *и транспонированное ядро* κ' *непрерывны на* $K_{s_0}^+\times K_{s_0}^-$ *для некоторого* $s_0\in S$, *то* $w_\kappa(\mathcal{K}_s,a)\uparrow w_\kappa(\mathcal{K},a)$, $s\in S$.

Доказательство. Из монотонности $w_\kappa(\cdot,a)$ выводим, что $\lim_{s\in S}w_\kappa(\mathcal{K}_s,a)=:$ $=:L$ существует и $L\le w_\kappa(\mathcal{K},a)$. Предположив $L<+\infty$, докажем неравенство $w_\kappa(\mathcal{K},a)\le L$.

В силу теоремы 7.1 для всех $s\ge s_0$ существует $\lambda_s\in\mathcal{W}(\mathcal{K}_s,a,\kappa)$. Пользуясь леммой 6.3 и свойствами направленности $(\mathcal{K}_s)_{s\in S}$, приходим к следующему утверждению.

Существует поднаправленность $(\lambda_t)_{t\in T}$ направленности $(\lambda_s)_{s\in S}$ такая, что для каждого i $(\lambda_t^i)_{t\in T}$ слабо сходится к некоторому λ_0^i; мера λ_0^i сосредоточена на K_i^s для всех $s\in S$, а потому — на K_i, и $\lambda_0^i(X) = a_i$. Обозначая $\lambda_0 := \sum_{i\in I}\alpha_i\lambda_0^i$, имеем $\lambda_0\in\mathfrak{M}(\mathcal{K},a)$.

Аналогично доказательству теоремы 7.1, из этого утверждения и условия непрерывности κ и κ' получаем $w_\kappa(\mathcal{K},a)\le\kappa(\lambda_0,\lambda_0)\le\lim\limits_{t\in T}\kappa(\lambda_t,\lambda_t) = L$. Теорема 7.2 доказана.

Замечания. **1.** При дополнительном условии попарной дизъюнктности множеств $K_i^{s_0}$, $i\in I$, теорема 7.2 доказана в [13, с. 325] (и в [8, с. 155] — в случае $I=\{1\}$).

2. Элементарные примеры показывают, что теорема 7.2, вообще говоря, не верна, если, не меняя других условий, опустить требование компактности $\mathcal{K}_s$, $s\in S$. Случай, когда это не так, будет исследован в следующей части работы.

3. Приведенные выше доказательства основаны на использовании $\mathcal{A}$-слабой топологии. Для получения содержательных результатов в случае некомпактного $\mathcal{A}$ требуется привлечение также и других топологических структур. При построении теории емкостей множеств [8] (случай $I=\{1\}$) эта общая идея реализована способом, описанным в следующем пункте.

8. Емкости множеств. Всюду далее ядро κ предполагается положительно определенным. Величина $\mathrm{cap}_\kappa E := 1/w_\kappa(E)$ называется (*внутренней*) *емкостью* множества $E\subset X$ (относительно ядра κ). Емкость — неотрицательная неубывающая функция множества, сужение которой на σ-алгебру $\mathcal{U}$ всех универсально измеримых множеств в X счетно полуаддитивно [8].

Задача о существовании меры $\lambda\in\mathfrak{M}^+(E,1)$ с $\kappa(\lambda,\lambda) = w_\kappa(E)$ — основная минимум-проблема теории емкостей множеств. Для множеств в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$, и ядра Ньютона Картан [7] решил эту задачу и построил теорию (ньютоновых) емкостей, опираясь на доказанное им свойство сильной полноты соответствующего пространства $\mathcal{E}_\kappa^+$.

Фугледе [8] построил теорию емкостей множеств в локально компактном пространстве X, постулируя для ядра основные утверждения теории Картана. Следуя [8], (положительно определенное) ядро κ назовем *совершенным*, если (полуметрическое) пространство $\mathcal{E}_\kappa^+$ сильно полное и сильная топология в $\mathcal{E}_\kappa^+$ сильнее слабой топологии, или *согласованным*, если выполняется следующее условие:

(C) *каждая сильная направленность Коши в* $\mathcal{E}_\kappa^+$ *сильно сходится к каждой своей слабой предельной точке.*

Теорема 8.1 [8, с. 167]. *Ядро совершенно тогда и только тогда, когда оно согласованно и строго положительно определено.*

Лемма 8.1 [8, с. 169]. *Ядро* κ, *имеющее следующее свойство, согласованно*:

(CW) *если* $(\nu_s)_{s\in S}\subset\mathcal{E}_\kappa^+$ *сильно ограничена и* $\nu_s\to\nu$ *слабо, то* $\nu_s\to\nu$ $\mathcal{E}_\kappa$*-слабо.*

Пример. В $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$, ядра Грина (в частности, ядро Ньютона) и ядра Рисса $|x-y|^{\beta-n}$, $0<\beta<n$, удовлетворяют условию (CW) и поэтому совершенны [8, 12].

Основной результат теории внутренних емкостей множеств состоит в следующем.

Теорема 8.2 [8, с. 174]. *Пусть* E — *множество в* X *с* $\mathrm{cap}_\kappa E < +\infty$. *Если*

κ *согласованно, то существует мера* $\theta = \theta_E \in \mathfrak{M}^+(\overline{E})$ *со свойствами*:

$$\|\theta\|_\kappa^2 = \theta(X) = \operatorname{cap}_\kappa E, \tag{8.1}$$

$$\kappa(x,\theta) \geq 1 \quad \textit{пр. в.} \quad \textit{в} \quad E, \tag{8.2}$$

$$\kappa(x,\theta) \leq 1 \qquad \forall x \in S(\theta). \tag{8.3}$$

Мера $\theta = \theta_E$ называется *внутренним емкостным распределением*, ассоциированным с E. Заметим, что если κ удовлетворяет принципу максимума Фростмана,* то (8.2) и (8.3) могут быть заменены соотношениями $\kappa(x,\theta) = 1$ пр. в. в E и $\kappa(x,\theta) \leq 1$ $\forall x \in X$.

В условиях теоремы 8.2 справедлива следующая лемма.

Лемма 8.2 [8]. *Если* $E' \subset E$ *и* $\theta_{E'}$ — *ассоциированное с* E' *внутреннее емкостное распределение, то* $\| \theta_E - \theta_{E'} \|_\kappa^2 \leq \| \theta_E \|_\kappa^2 - \| \theta_{E'} \|_\kappa^2$.

Замечание. Рассмотрим следующее условие (C_Q), где Q — множество в X:

(C_Q) *если* $(\nu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}^+(Q) \cap \mathcal{E}_\kappa$ *с* $\sup_{s\in S} \nu_s(X) < +\infty$ *сильно фундаментальна и* ν — *ее слабая предельная точка, то* $\nu_s \to \nu$ *сильно.*

Анализируя выкладки в [8], легко проверить, что заключения (и доказательства) теоремы 8.2 и леммы 8.2 не изменятся, если в их условиях условие (C) заменить условием (C_E).

Соответственно рассмотрим условие:

(CW_Q) *если* $(\nu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}^+(Q) \cap \mathcal{E}_\kappa$ *с* $\sup_{s\in S} \nu_s(X) < +\infty$ *сильно ограничена и* $\nu_s \to \nu$ *слабо, то* $\nu_s \to \nu$ $\mathcal{E}_\kappa$*-слабо.*

Справедлива следующая диаграмма (ср. с леммой 8.1):

$$\begin{array}{ccc} (CW) & \Rightarrow & (CW_Q) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (C) & \Rightarrow & (C_Q). \end{array} \tag{8.4}$$

9. $\mathcal{A}$-совершенные и $\mathcal{A}$-согласованные ядра. Вернемся к исследованию $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи в общем случае произвольных I^+ и I^-. Введем следующее определение.

Определение 9.1. *Величину* $\operatorname{cap}_* \mathcal{A} := \operatorname{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) := 1/w_\kappa(\mathcal{A}, a)$ *назовем внутренней емкостью конденсатора* $\mathcal{A}$ *относительно ядра* κ *и вектора* a.

Там, где это не может привести к недоразумениям, указание на ядро κ и вектор a в данном определении будем опускать. Очевидно, (внутренняя) емкость $\operatorname{cap}_*(\cdot, a, \kappa)$ — неотрицательная неубывающая функция конденсатора.

Всюду до конца этой части работы будем предполагать выполненным условие $\operatorname{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) > 0$. В силу леммы 4.3 из [1], это равносильно следующему условию:

$$\operatorname{cap}_\kappa A_i > 0 \qquad \forall i \in I. \tag{9.1}$$

Далее индекс κ в обозначениях $\mathcal{E}_\kappa$, $\|\cdot\|_\kappa$ и $\operatorname{cap}_\kappa$, как правило, опускаем.

9.1. Примеры классических ядер показывают, что предгильбертово пространство $\mathcal{E}$, вообще говоря, не полно [7]. С другой стороны, в [2–6] доказано,

* Ядро удовлетворяет принципу максимума Фростмана, если для каждой финитной меры $\nu \geq 0$ из $\kappa(x,\nu) \leq M$ на $S(\nu)$ следует $\kappa(x,\nu) \leq M$ в X [13].

что в случае ядер Грина и Рисса в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, метрические пространства знакопеременных мер, ассоциированных с замкнутыми конденсаторами и имеющих ограниченную вариацию, полны, и из сильной сходимости мер в этих пространствах следует их слабая сходимость к тому же пределу. Эти утверждения стали основой разработанного в [2–6] метода, позволившего решить соответствующую минимум-проблему в некомпактном случае и построить (существенно некомпактную) теорию гриновых и риссовых емкостей конденсаторов.

Рассматривая результаты работ [2–6] как модель для построения теории емкостей конденсаторов в локально компактном пространстве X относительно произвольного положительно определенного ядра κ, определим следующее понятие *$\mathcal{A}$-совершенности* (ср. с п. 8).

Пусть $\mathcal{A}$ — (m, p)-конденсатор в X с $\overline{A^+} \cap \overline{A^-} = \varnothing$. (Это условие, без дополнительного указания, всюду до конца работы будем предполагать выполненным.) Обозначим через $\mathbb{B}(\mathcal{A})$ совокупность всех сильных направленностей Коши $(\mu_s)_{s \in S}$ в $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}$ с

$$\sup_{s \in S} |\mu_s|(X) < +\infty. \tag{9.2}$$

Определение 9.2. *Ядро назовем $\mathcal{A}$-совершенным, если для каждой направленности $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ выполняются следующие условия*:

$(\mathcal{A}P_1)$ $(\mu_s)_{s \in S}$ *сильно сходится в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{E}$;

$(\mathcal{A}P_2)$ *если* $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{E}$ — *сильный предел* $(\mu_s)_{s \in S}$, *то* $\mu_s \to \mu$ *слабо*.

Пример. В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ядра Рисса $|x - y|^{\beta - n}$, $0 < \beta < n$, $\mathcal{A}$-совершенны для любого $\mathcal{A}$ [2], а ядро Грина g_G $\mathcal{A}$-совершенно, если A^+ и A^- g_G-разделены [4].*

Лемма 9.1. *$\mathcal{A}$-совершенное ядро имеет следующее свойство*:

$(\mathcal{A}SD)$ *если* $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *сильно сходится к* μ', $\mu'' \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{E}$, *то* $\mu' = \mu''$.

Лемма 9.1 следует из условия $(\mathcal{A}P_2)$ в силу отделимости слабой топологии.
Очевидно, любое строго положительно определенное ядро удовлетворяет условию $(\mathcal{A}SD)$.

Лемма 9.2. *Пусть $\mathcal{A}$ универсально измерим, κ имеет свойство $(\mathcal{A}SD)$ и ν — ограниченная мера, сосредоточенная на A. Тогда $\|\nu\| = 0 \Rightarrow \nu = 0$.*

Доказательство. Используя сужения мер ν^+ и ν^- на надлежащие универсально измеримые подмножества множеств A_i, $i \in I$, меру ν можно представить в виде $\nu = \nu_1 - \nu_2$, где $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ — ограниченные меры. Из $\|\nu\| = 0$ выводим, что стационарная последовательность $(\nu_1) \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ сильно сходится к $\nu_2 \in \mathcal{E}$ и, очевидно, к ν_1. Применяя свойство $(\mathcal{A}SD)$, находим требуемое соотношение $\nu = 0$.

Следствие 9.1. *Предположим, что κ имеет свойство $(\mathcal{A}SD)$ и $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$ — компактный конденсатор. Тогда сужение κ на $K \times K$ — строго положительно определенное ядро в K. (Здесь $K := \bigcup_{i \in I} K_i$, где $(K_1, \ldots, K_p) = \mathcal{K}$.)*

Из следствия 9.1 и подстрочного замечания в [8, с. 162] выводим такое утверждение.

Следствие 9.2. *Если κ имеет свойство $(\mathcal{A}SD)$, то $\operatorname{cap} K_i < +\infty$ для*

* Множества $E_1, E_2 \subset X$ называются κ-разделенными [1], если сужение κ на $E_1 \times E_2$ ограничено.

каждого компактного множества $K_i \subset A_i$ (*и поэтому* $\kappa(x,x) \neq 0$ *для всех* $x \in A$).

9.2. Для дальнейших применений свойство $(\mathcal{A}SD)$ не всегда существенно. В связи с этим ниже определено понятие, близкое к понятию $\mathcal{A}$-совершенности, но применимое к ядрам, вообще говоря, не имеющим свойства $(\mathcal{A}SD)$. Существенным оказывается следующее свойство согласованности между сильной (вообще говоря, не отделимой даже в случае компактного $\mathcal{A}$) и слабой топологиями в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{E}$:

Определение 9.3. *Ядро назовем* $\mathcal{A}$*-согласованным, если выполняется условие*:

$(\mathcal{A}C)$ *если* $(\mu_s)_{s\in S}$ *принадлежит* $\mathbb{B}(\mathcal{A})$ *и* μ *— ее слабая предельная точка, то* $\mu \in \mathcal{E}$ *и* $\mu_s \to \mu$ *сильно.*

Учитывая, что сильная направленность Коши сильно сходится к каждой своей сильной предельной точке, убеждаемся, что следующее условие равносильно условию $(\mathcal{A}C)$:

$(\mathcal{A}C')$ *если* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *и* $\mu_s \to \mu$ *слабо, то* $\mu \in \mathcal{E}$ *и* $\mu_s \to \mu$ *сильно.*

Лемма 9.3. *Каждое из условий* $(\mathcal{A}C)$ *и* $(\mathcal{A}C')$ *равносильно следующему условию*:

$(\mathcal{A}C'')$ *если* $(\mu_s)_{s\in S}$ *принадлежит* $\mathbb{B}(\mathcal{A})$ *и* μ *— ее* $\mathcal{A}$*-слабый предел (либо, более общо,* $\mathcal{A}$*-слабая предельная точка), то* $\mu \in \mathcal{E}$ *и* $\mu_s \to \mu$ *сильно.*

Доказательство. Из условия $(\mathcal{A}C'')$ следует условие $(\mathcal{A}C)$ в силу леммы 6.4; обратное очевидно.

Теорема 9.1 (ср. с теоремой 8.1). *Ядро* $\mathcal{A}$*-совершенно тогда и только тогда, когда оно* $\mathcal{A}$*-согласованно и имеет свойство* $(\mathcal{A}SD)$.

Доказательство. Предположим, что ядро $\mathcal{A}$-совершенно, а $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ сходится к μ слабо. Согласно определению 9.2, $(\mu_s)_{s\in S}$ сходится сильно и слабо к некоторому $\mu_* \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{E}$. Ввиду отделимости слабой топологии $\mu = \mu_*$, откуда следует условие $(\mathcal{A}C')$. Свойство $(\mathcal{A}SD)$ доказано леммой 9.1.

Пусть ядро $\mathcal{A}$-согласованно и удовлетворяет условию $(\mathcal{A}SD)$. В силу леммы 6.3 и условия $(\mathcal{A}C)$, для каждого $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ существует слабая предельная точка μ^*, причем $\mu^* \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{E}$ и $\mu_s \to \mu^*$ сильно. Это доказывает условие $(\mathcal{A}P_1)$. Вследствие условия $(\mathcal{A}SD)$ для доказательства условия $(\mathcal{A}P_2)$ достаточно доказать, что $\mu_s \to \mu^*$ слабо. В силу слабой относительной компактности множества $\{\mu_s,\ s \in S\}$ это равносильно доказательству того, что μ^* — единственная слабая предельная точка направленности $(\mu_s)_{s\in S}$ [14, c. 126]. Если μ_0 — некоторая ее слабая предельная точка, то согласно следствию 6.1 и условию $(\mathcal{A}C)$ выполняется $\mu_0 \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{E}$ и $\mu_s \to \mu_0$ сильно. Применяя условие $(\mathcal{A}SD)$, получаем $\mu^* = \mu_0$. Теорема 9.1 доказана.

Лемма 9.4. *Если ядро* к $\mathcal{A}$*-согласованно (аналогично,* $\mathcal{A}$*-совершенно), то оно* $\mathcal{A}'$*-согласованно (соответственно,* $\mathcal{A}'$*-совершенно) для любого* $\mathcal{A}' \prec \mathcal{A}$.

Доказательство. Непосредственно из определений заключаем, что $(\mathcal{A}C) \Rightarrow (\mathcal{A}'C)$ и $(\mathcal{A}SD) \Rightarrow (\mathcal{A}'SD)$ для любого $\mathcal{A}' \prec \mathcal{A}$. Отсюда и из теоремы 9.1 следует лемма.

Следствие 9.3. *Если* $\mathcal{A}$ *универсально измерим, то* $\mathcal{A}$*-согласованное ядро* *удовлетворяет условию* (C_Q) *для любого множества* Q, *содержащегося в* A^+ *или в* A^-.

9.3. Приведем достаточные условия $\mathcal{A}$-согласованности ядер (ср. с леммой 8.1).

Лемма 9.5. *Ядро* κ, *имеющее следующее свойство,* $\mathcal{A}$*-согласованно*:

($\mathcal{A}CW$) *если направленность* $(\mu_s)_{s\in S}\subset\mathfrak{M}(\mathcal{A})\cap\mathcal{E}$ *сильно ограничена, удовлетворяет* (9.2) *и* $\mathcal{A}$*-слабо сходится к* μ, *то* $\mu\in\mathcal{E}$ *и* $\mu_s\to\mu$ $\mathcal{E}$*-слабо.*

Доказательство. Проверим условие ($\mathcal{A}C''$). Пусть $(\mu_s)_{s\in S}\in\mathbb{B}(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}$-слабо сходится к μ. Переходя при необходимости к поднаправленности, $(\mu_s)_{s\in S}$ будем считать сильно ограниченной. Применяя условие ($\mathcal{A}CW$), получаем $\mu\in\mathcal{E}$ и $\mu_s\to\mu$ $\mathcal{E}$-слабо. Используя неравенство Коши – Буняковского, отсюда выводим

$$\|\mu_s-\mu\|^2 = \lim_{l\in S}\kappa(\mu_s-\mu,\,\mu_s-\mu_l) \le \|\mu_s-\mu\|\liminf_{l\in S}\|\mu_s-\mu_l\|,$$

откуда в силу сильной фундаментальности направленности $(\mu_s)_{s\in S}$ следует ее сильная сходимость к μ. Условие ($\mathcal{A}C''$), а значит, и лемма 9.5 доказаны.

Доказательство следующего вспомогательного утверждения тривиально.

Лемма 9.6. *Пусть* A^+ *и* A^- κ*-разделены. Если* $(\mu_s)_{s\in S}\subset\mathfrak{M}(\mathcal{A})\cap\mathcal{E}$ *сильно ограничена и удовлетворяет* (9.2), *то* $\left|\kappa(\mu_s^i,\mu_s^j)\right|<M$ *для всех* $s\in S$ *и* $i,j\in I$.

Лемма 9.7. *Если ядро* κ *имеет свойство* (CW), *то оно* $\mathcal{A}$*-согласованно для любого* $\mathcal{A}$ *с* κ*-разделенными множествами* A^+ *и* A^-.

Доказательство. Вследствие (8.4) $(CW)\Rightarrow(CW_{A_i})$ $\forall i\in I$. Покажем, что при условии κ-разделенности множеств A^+ и A^- из условий (CW_{A_i}) $\forall i\in I$ следует условие ($\mathcal{A}CW$).

Пусть $(\mu_s)_{s\in S}\subset\mathfrak{M}(\mathcal{A})\cap\mathcal{E}$ сильно ограничена, удовлетворяет (9.2) и $\mathcal{A}$-слабо сходится к μ. Применяя лемму 9.6, заключаем, что для каждого $i\in I$ направленность $(\mu_s^i)_{s\in S}$ сильно ограничена, а поэтому к ней и ее слабому пределу μ^i применимо условие (CW_{A_i}). (Энергия $\kappa(\mu^i,\mu^i)$ конечна в силу слабой замкнутости любого сильно ограниченного множества положительных мер — см. лемму 2.1 из [1].)

Следовательно, $\mu\in\mathcal{E}$ и для всех $i\in I$ $\mu_s^i\to\mu^i$ $\mathcal{E}$-слабо; в силу билинейности функционала взаимной энергии отсюда непосредственно следует, что $\mu_s\to\mu$ $\mathcal{E}$-слабо. Свойство ($\mathcal{A}CW$) доказано; применение леммы 9.5 доказывает $\mathcal{A}$-согласованность ядра.

Замечание. В работах [8, 13] найден ряд условий на ядро κ, каждое из которых достаточно для выполнения условия (CW). Комбинируя их с леммой 9.7, заключаем, что эти условия достаточны и для $\mathcal{A}$-согласованности ядра, если только множества A^+ и A^- κ-разделены. Ограничимся формулировкой одного из таких результатов.

Следствие 9.4. *Предположим, что множество всех мер* $\nu\in\mathcal{E}$ *таких, что* $\kappa(x,\nu)\in C_0$, *плотно в* $\mathcal{E}$ *в сильной топологии. Тогда* κ $\mathcal{A}$*-согласованно для любого* $\mathcal{A}$ *с* κ*-разделенными множествами* A^+ *и* A^-.

9.4. Для любого множества мер $\mathfrak{N}$ обозначим через $\mathfrak{N}_\kappa$ полуметрическое пространство $(\mathfrak{N}\cap\mathcal{E},d)$, где $d(\mu,\nu):=\|\mu-\nu\|$, $\mu,\nu\in\mathfrak{N}\cap\mathcal{E}$. Пространство

$\mathfrak{M}_\kappa^+(E)$, где E — множество в X, будем также обозначать через $\mathcal{E}^+(E) = \mathcal{E}_\kappa^+(E)$.

Этот подпункт посвящен исследованию свойства полноты полуметрических пространств мер, ассоциированных с $\mathcal{A}$. Ядро κ предполагается $\mathcal{A}$-согласованным.

Лемма 9.8. *Пусть* $r = (r_1, \ldots, r_p)$, $r_i \geq 0$ $\forall i \in I$. *Если* $\mathcal{A}$ *замкнут, то* $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A}, \leq r)$ *полно. Если* $\mathcal{A}$ *компактен, то полно также* $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A}, r)$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 6.3 и условия $(\mathcal{A}C'')$.

Теорема 9.2. *Предположим, что* C_0^κ *весьма изобильно в* C_0. *Если конденсатор* $\mathcal{A}$ *компактен, то метрическое пространство* $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A})$ *полно, и из сходимости в* $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A})$ *следует слабая сходимость к тому же пределу.*

Доказательство. То, что пространство $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A})$ метрическое* и сходимость в нем влечет слабую сходимость, следует из следствия 6.2. Покажем, что в этом пространстве любая направленность Коши $(\mu_s)_{s\in S}$ сходится. Не ограничивая общности доказательства, будем считать ее сильно ограниченной. В условиях теоремы существует мера $\omega \in \mathcal{E}$, потенциал которой равен нулю на A^- и $\geq \varphi_{A^+}$ на A^+. Отсюда получаем

$$\mu_s^+(X) = \int \varphi_{A^+} d\mu_s^+ \leq \int \kappa(x,\omega)\, d\mu_s^+(x) = \int \kappa(x,\omega)\, d\mu_s(x) \leq \|\omega\| \|\mu_s\| \quad \forall s \in S.$$

Аналогично, справедливы неравенства $\mu_s^-(X) \leq \|\omega\| \|\mu_s\|$ для всех $s \in S$, и поэтому $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$. Применяя к $(\mu_s)_{s\in S}$ лемму 6.3 и свойство $(\mathcal{A}C'')$, получаем требуемое.

Множество в X будем называть *множеством класса* K_σ, если оно представимо в виде счетного объединения компактных множеств.

Лемма 9.9. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— замкнутый конденсатор, у которого* A *— множество класса* K_σ. *Пространство* $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A})$ *полно, если существует* $\omega \in \mathcal{E}$ *со свойствами*:

$$\kappa(x,\omega) \geq 1 \quad \textit{пр. в. в } A^+, \quad \kappa(x,\omega) \leq -1 \quad \textit{пр. в. в } A^-. \tag{9.3}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 9.2, достаточно доказать, что любая ограниченная направленность Коши $(\mu_s)_{s\in S}$ в $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A})$ удовлетворяет (9.2).

Применяя [1] (лемма 2.2), из (9.3) для каждого $s \in S$ получаем $(\mu_s^+)_*(Q) = 0$, где $Q := \{x \in A^+ : \kappa(x,\omega) < 1\}$. Учитывая μ_s^+-измеримость множества Q, заключаем, что оно локально μ_s^+-пренебрежимо. А так как Q, очевидно, μ_s^+-σ-конечное, то, следовательно, оно μ_s^+-пренебрежимо. Вследствие замкнутости $\mathcal{A}$ множество $X \setminus A^+$ также μ_s^+-пренебрежимо, и поэтому $\kappa(x,\omega) \geq 1$ μ_s^+-почти всюду в X.

Аналогично, $\kappa(x,\omega) \leq -1$ μ_s^--почти всюду в X. Интегрируя последние два неравенства относительно μ_s^+ и $-\mu_s^-$ соответственно, а затем складывая и применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем $|\mu_s|(X) \leq \|\mu_s\| \|\omega\|$, $s \in S$. Это доказывает (9.2).

Замечание. В следующей части работы будут получены условия на $\mathcal{A}$ и κ, достаточные для существования меры $\omega \in \mathcal{E}$, удовлетворяющей соотношениям (9.3).

---

* Более того, в этом случае пространство $\mathcal{E}$ нормированное (см. [8], лемма 3.4.3).

***Следствие* 9.5.** *Пусть $\mathcal{A}$ универсально измерим, F — замкнутое множество класса K_σ с $\operatorname{cap} F < +\infty$, содержащееся в A^+ или в A^-. Тогда пространство $\mathcal{E}^+(F)$ полно.*

Доказательство. На основании следствия 9.3, теоремы 8.2 и следующего за ней замечания существует $\omega := \theta_F \in \mathcal{E}$ с $\kappa(x,\omega) \geq 1$ пр. в. в F. Применяя лемму 9.9 к (1, 1)-конденсатору $\mathcal{F} := (F)$, получаем требуемое.

10. Экстремальные меры. Примеры классических ядер показывают [2–6], что $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача, вообще говоря, не разрешима. В связи с этим важную роль в ее исследовании играет надлежащим образом определенное понятие *экстремальных* мер.

10.1. Пусть $(\mu_s)_{s\in S}$ и $(\mu_t)_{t\in T}$ — направленности из $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, $S \times T$ — направленное произведение направленных множеств S и T [15, с. 99].

Лемма 10.1. *Для любого* $\tau \in [0,1]$ *выполняется* $(\mu_{(s,t)})_{(s,t)\in S\times T} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, *где*

$$\mu_{(s,t)} := \tau\mu_s + (1-\tau)\mu_t \quad \forall s \in S,\ t \in T.$$

Доказательство. В силу выпуклости класса $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$, $\mu_{(s,t)} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ для всех $s \in S$ и $t \in T$, и поэтому $\sqrt{w_\kappa(\mathcal{A}, a)} \leq \|\mu_{(s,t)}\| \leq \tau\|\mu_s\| + (1-\tau)\|\mu_t\|$. Переходя к пределу по $(s,t) \in S \times T$, убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 10.2. *В указанных условиях и обозначениях справедливо равенство*

$$\lim_{(s,t)\in S\times T} \|\mu_s - \mu_t\| = 0.$$

Доказательство. Используя правило параллелограмма для мер μ_s и μ_t, $s \in S$, $t \in T$, и применяя лемму 10.1 при $\tau = 1/2$, получаем требуемое.

***Следствие* 10.1.** *Каждая направленность из $\mathbb{M}$ сильно фундаментальна, и поэтому справедливо соотношение*

$$\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa) \subset \mathbb{B}(\mathcal{A}). \tag{10.1}$$

Через $\mathcal{M}'_{\mathcal{E}} = \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ (аналогично, $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa)$) обозначим множество всех мер χ, каждая из которых является сильной (соответственно, $\mathcal{A}$-слабой) предельной точкой некоторой (зависящей от χ) направленности из $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

***Следствие* 10.2.** *Для всех $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ и $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}$ выполняется $\mu_s \to \chi$ сильно.*

10.2. **Определение 10.1.** *Меру $\gamma \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ назовем экстремальной в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче, если существует направленность $(\mu_t)_{t\in T} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, сильно и $\mathcal{A}$-слабо сходящаяся к γ; $(\mu_t)_{t\in T}$ назовем направленностью, порождающей экстремальную меру γ.*

Класс всех экстремальных в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мер обозначим через $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

Лемма 10.3. *Класс $\mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$ выпуклый, содержится в некотором классе эквивалентности в $\mathcal{E}$ и удовлетворяет соотношениям*

$$\mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \leq a), \tag{10.2}$$

$$\mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) = \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, \kappa) \cap \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}, a, \kappa). \tag{10.3}$$

Доказательство следует из определения 10.1, лемм 6.3, 10.1 и следствия 10.2.

Для класса экстремальных мер справедливо следующее утверждение о существовании, единственности и свойствах компактности.

Теорема 10.1. (i) *Пусть ядро* κ $\mathcal{A}$*-согласованно. Тогда для любого* a *класс* $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ *не пуст и удовлетворяет равенству* $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa) = \mathcal{M}'(\mathcal{A},a,\kappa)$.

Более подробно, из каждой направленности $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *можно выделить* $\mathcal{A}$*-слабо сходящуюся (пусть к* μ*) поднаправленность* $(\mu_t)_{t\in T}$*; при этом* μ *— экстремальная в* $(\mathcal{A}, a, \kappa)$*-задаче мера, а* $(\mu_t)_{t\in T}$ *— порождающая ее направленность.*

(ii) *Если* κ *имеет свойство* $(\mathcal{A}SD)$*, то все меры из* $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ *принадлежат одному классу эквивалентности в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$.

(iii) *Если* κ $\overline{\mathcal{A}}$*-согласованно, то класс* $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ *сильно и* $\mathcal{A}$*-слабо (а поэтому и слабо) компактен.*

Доказательство. (i) Из (10.1), леммы 6.3 и условия $\mathcal{A}$-согласованности заключаем, что $\mathcal{A}$-слабое предельное множество каждой направленности из $\mathbb{M}(\mathcal{A},a,\kappa)$ не пусто и содержится в $\mathcal{M}'_{\mathscr{C}}(\mathcal{A},a,\kappa)$. Применяя (10.3) и следствие 10.2, получаем утверждение (i).

(ii) Если $\mu', \mu'' \in \mathcal{W}_*$, то в силу следствия 10.2 каждая направленность из $\mathbb{M}$ сильно сходится к μ' и μ''. Используя (10.1) и (10.3), вследствие условия $(\mathcal{A}SD)$ имеем $\mu' = \mu''$.

(iii) Зафиксируем $(\gamma_s)_{s\in S} \subset \mathcal{W}_*$; вследствие леммы 10.3 справедливо соотношение

$$(\gamma_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\overline{\mathcal{A}}). \tag{10.4}$$

В силу леммы 6.3 из $(\gamma_s)_{s\in S}$ можно выделить поднаправленность $(\gamma_t)_{t\in T}$, $\mathcal{A}$-слабо сходящуюся к $\gamma_0 \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$, а вследствие (10.4) и условия $\overline{\mathcal{A}}$-согласованности $\gamma_s \to \gamma_0$ сильно. Доказательство утверждения (iii) свелось к доказательству соотношения

$$\gamma_0 \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa). \tag{10.5}$$

Каждому $t \in T$ соответствует некоторое направленное множество S_t и направленность $(\mu_{ts})_{s\in S_t} \in \mathbb{M}(\mathcal{A},a,\kappa)$, порождающая экстремальную меру γ_t. Обозначим через D направленное произведение $T \times \prod \{S_t : t \in T\}$ [15]. Пусть ψ — элемент декартова произведения $\prod \{S_t : t \in T\}$, т. е. функция, заданная на T, со значениями $\psi(t) \in S_t$ для всех $t \in T$. Для каждого $(t,\psi) \in D$ обозначим $\mu_{(t,\psi)} := \mu_{t\psi(t)}$ $(\in (\mu_{ts})_{s\in S_t})$. Применяя теорему о повторном пределе [15, с. 100] к $(\mu_{(t,\psi)})_{(t,\psi)\in D}$ и используя утверждения о сходимостях направленностей $(\mu_{ts})_{s\in S_t}$, $t \in T$, и $(\gamma_t)_{t\in T}$, заключаем, что $(\mu_{(t,\psi)})_{(t,\psi)\in D}$ принадлежит $\mathbb{M}(\mathcal{A},a,\kappa)$ и сходится к γ_0 сильно и $\mathcal{A}$-слабо. Это доказывает (10.5).

***Следствие* 10.3.** *Пусть* κ $\mathcal{A}$*-совершенно. Для произвольных фиксированных* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *и* $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ *справедливы такие утверждения о сходимостях*:

(i) $\mu_s \to \gamma$ *сильно и слабо*;

(ii) *в классе эквивалентности* γ *в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *найдется мера* γ'*, принадлежащая* $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ *и являющаяся* $\mathcal{A}$*-слабой предельной точкой для* $(\mu_s)_{s\in S}$.

10.3. Очевидно, $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa) \subset \mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$; обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Тем не менее оно верно при надлежащих дополнительных условиях (см., например, теоремы 10.2, 10.3, 12.1, 12.3).

Теорема 10.2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *замкнут,* κ *имеет свойство* $(\mathcal{A}SD)$ *и предположим, что класс* $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *непуст. Тогда* $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)=\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$.

С целью дальнейших приложений докажем следующее более сильное утверждение.

Зафиксировав $\gamma\in\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$, определим такое множество индексов $i\in I$:

$$I_{\text{sol}}(\gamma) := \left\{i\in I\colon\ \gamma^i\in\mathfrak{M}^+(A_i,a_i)\right\}.$$

Очевидно, $I_{\text{sol}}(\gamma)$ принадлежат все $i\in I$ с компактным множеством A_i. Заметим также, что утверждения $\gamma\in\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)$ и $I_{\text{sol}}(\gamma)=I$ равносильны.

Лемма 10.4. *Пусть* $\mathcal{A}$ *замкнут,* κ *имеет свойство* $(\mathcal{A}SD)$, $I'\subset I$ *и*

$$A_i\cap A_j = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i\in I',\ j\in I\setminus I'. \tag{10.6}$$

Для того чтобы соотношение $I'\subset I_{\text{sol}}(\gamma)$ *выполнялось для всех* $\gamma\in\mathcal{W}_*$, *достаточно (и необходимо), чтобы оно выполнялось хотя бы для одного элемента из этого класса.*

Доказательство. Пусть $\gamma,\gamma_0\in\mathcal{W}_*$ и $I'\subset I_{\text{sol}}(\gamma_0)$. Согласно утверждению (ii) теоремы 10.1, $\gamma=\gamma_0$, откуда ввиду замкнутости $\mathcal{A}$ и (10.6) получаем

$$\sum_{i\in I'}\gamma^i(X) = \sum_{i\in I'}\gamma_0^i(X) = \sum_{i\in I'}a_i.$$

Следовательно, для всех $i\in I'$ в неравенствах $\gamma^i(X)\le a_i$ (см. (10.2)) на самом деле выполняется равенство, и поэтому $\gamma^i\in\mathfrak{M}^+(A_i,a_i)\quad\forall i\in I'$. Лемма 10.4 доказана.

Из леммы 10.4 при $I'=I$ получаем приведенную выше теорему 10.2.

10.4. Непосредственно из определений следует, что классы $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)$ и $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ совпадают, если множество $\mathfrak{M}(\mathcal{A},a)$ $\mathcal{A}$-слабо замкнуто. Используя лемму 6.3 и теорему 10.1, получаем следующее утверждение о классах минимальных мер.

Теорема 10.3. *Пусть конденсатор* $\mathcal{A}$ *компактен, а ядро* κ $\mathcal{A}$*-согласованно. Тогда для любого* a *класс* $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *не пуст и компактен в сильной,* $\mathcal{A}$*-слабой и слабой топологиях, причем* $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)=\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$.

Теорема 10.3 может быть обобщена с использованием леммы 4.5 из [1], а также в следующем направлении.

Теорема 10.3′. *Предположим, что* $\mathcal{A}$ *замкнут,* κ $\mathcal{A}$*-согласованно и для каждого* $i\in I$ *выполняется одно из двух: либо* A_i *компактно, либо существует точка* $x_i\in A_i$ *с* $\kappa(x_i,x_i)=0$. *Тогда для любого* a *класс* $\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *не пуст.*

Доказательство. В силу теоремы 10.1 существует $\gamma\in\mathcal{W}_*$. Вследствие замкнутости $\mathcal{A}$ верно $\gamma\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, причем $\gamma^i(A_i)=a_i$ для всех i с компактным A_i. Если A_i не компактно, рассмотрим единичную меру Дирака ε_{x_i} в точке x_i. Мера $\lambda:=\sum_{i\in I}\alpha_i\lambda^i$, где

$$\lambda^i := \begin{cases}\gamma^i, & \text{если } A_i \text{ компактно;}\\ \gamma^i+(a_i-\gamma^i(X))\,\varepsilon_{x_i} & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

принадлежит $\mathfrak{M}(\mathcal{A},a)$ и имеет энергию, равную $\kappa(\gamma,\gamma)$. Теорема 10.3′ доказана.

11. Описание потенциалов экстремальных мер. В этом пункте рассматриваются направленности мер, так или иначе связанные с $(\mathcal{A},a,\kappa)$-задачей, и исследуются свойства потенциалов их сильных и $\mathcal{A}$-слабых пределов.

11.1. Начнем с исследования потенциалов мер $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathscr{E}}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. Всюду пп. 11.1 будем предполагать, что κ $\mathcal{A}$-согласованно, — тогда класс $\mathcal{M}'_{\mathscr{E}}$ н пуст. Напомним, что любые две его меры эквивалентны в $\mathscr{E}$, и поэтому их пс тенциалы конечны и равны пр. в. в X.

Теорема 11.1. *Существует и единствен вектор* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$ *такої что*

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i = w_\kappa(\mathcal{A}, a) \tag{11.1}$$

и для всех $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathscr{E}}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *выполняется*

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \chi) \geq \alpha_i \eta_i \quad \textit{пр. в. в } A_i, \quad i \in I. \tag{11.2}$$

Справедливо представление

$$\eta_i = \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}), \quad i \in I, \tag{11.3}$$

где $\{\mathcal{K}\}$ *— направленное по отношению* $\prec$ *множество всех компактных кон денсаторов* $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$ *и* $\lambda_{\mathcal{K}}$ *— произвольная фиксированная мера из* $\mathcal{W}(\mathcal{K}, a, \kappa)$.

Заметим, что класс $\mathcal{W}(\mathcal{K}, a, \kappa)$, $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$, не пуст в силу леммы 9.4 и тес ремы 10.3, а вследствие [1] (лемма 4.1) направленность $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$ принадлежи $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и поэтому (см. следствие 10.2) сильно сходится к каждому $\chi \in$ $\in \mathcal{M}'_{\mathscr{E}}(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

Для краткости будем говорить, что выполняется *случай* D, если A^+ A^- κ-разделены. В случае D второе утверждение теоремы 11.1 допускае следующее усиление.

Теорема 11.2. *Пусть выполняется случай* D *и* $(\mu_s)_{s \in S}$ *— произвольна фиксированная направленность из* $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. *Для каждого* $i \in I$ *существу ет конечный предел*

$$\lim_{s \in S} \kappa(\mu^i_s, \mu_s) =: \eta_i, \tag{11.4}$$

и он не зависит от выбора направленности $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. *Числа* η_i, $i \in I$, *определенные соотношением* (11.4), *удовлетворяют* (11.1) *и* (11.2).

***Доказательство теорем* 11.1 *и* 11.2.** Докажем сначала утверждени единственности из теоремы 11.1. Пусть θ_i и θ'_i, $i \in I$, — (конечные) числа удовлетворяющие (11.1) и (11.2). Зафиксируем $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathscr{E}}$ и $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}$. В сил (11.2) приблизительно всюду в A_i (а поэтому μ^i_s-почти всюду в X для все $s \in S$, — см. лемму 5.2 из [1]) выполняется

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \chi) \geq \max\{\alpha_i \theta_i, \alpha_i \theta'_i\} \geq \alpha_i \theta_i, \quad i \in I. \tag{11.5}$$

Направленность $(\mu_s)_{s \in S}$ сходится к χ сильно, а поэтому и $\mathscr{E}$-слабо. Интегри руя (11.5) по μ^i_s, а затем суммируя по $i \in I$ и переходя к пределу по $s \in S$, силу (11.1) получаем

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) = \lim_{s \in S} \kappa(\chi, \mu_s) \geq \sum_{i \in I} \max\{\alpha_i \theta_i, \alpha_i \theta'_i\} \geq \sum_{i \in I} \alpha_i \theta_i = w_\kappa(\mathcal{A}, a).$$

Следовательно, $\max\{\alpha_i \theta_i, \alpha_i \theta'_i\} = \alpha_i \theta_i \quad \forall i \in I$. Меняя в проведенных рассуж дениях θ_i и θ'_i местами, заключаем, что $\theta_i = \theta'_i \quad \forall i \in I$.

Докажем остальные утверждения теорем 11.1 и 11.2. Сначала рассмотри случай D. Зафиксируем направленность $(\nu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ такую, что дл всех $i \in I$ существует $\lim_{s\in S} \kappa(\nu_s^i, \nu_s) =: \eta_i^\circ$. Используя лемму 9.6, заключаем, что так определенные числа η_i°, $i \in I$, конечны и удовлетворяют (11.1). Докажем, что для них выполняется (11.2).

Пусть $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathscr{C}}$ и, от противного, для некоторого $j \in I$ (пусть, для определенности, $j \in I^+$) (11.2) не верно. Учитывая (9.1) и рассуждая аналогично доказательству теоремы 5.1 из [1], убеждаемся в существовании меры $\omega \in \mathfrak{M}^+(A_j, a_j)$ такой, что $\|\omega\|^2 < +\infty$ и

$$\kappa(\omega, \chi) < \eta_j^\circ. \tag{11.6}$$

Для всех $s \in S$ и $\tau \in (0,1]$ выполняется $\nu_s - \tau\nu_s^j + \tau\omega \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$, и поэтому

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \le \|\nu_s\|^2 - 2\tau\kappa(\nu_s, \nu_s^j - \omega) + \tau^2\left\|\nu_s^j - \omega\right\|^2.$$

Поскольку $\nu_s \to \chi$ сильно и $\mathscr{E}$-слабо, то из последнего соотношения находим

$$\frac{\tau}{2}\liminf_{s\in S}\left\|\nu_s^j - \omega\right\|^2 \ge \lim_{s\in S} \kappa(\nu_s, \nu_s^j - \omega) = \eta_j^\circ - \kappa(\chi, \omega) \quad \forall\tau \in (0,1].$$

Устремляя τ к нулю и используя ограниченность энергий $\left\|\nu_s^j\right\|^2$, $s \in S$ (см. лемму 9.6), получаем $\kappa(\omega, \chi) \ge \eta_j^\circ$. Это противоречит (11.6), что доказывает (11.2).

Пусть $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$, $(\mu_t)_{t\in T}$ — ее поднаправленность такая, что для каждого $i \in I$ существует $\lim_{t\in T} \kappa(\mu_t^i, \mu_t)$. Поскольку $(\mu_t)_{t\in T} \in \mathbb{M}$, то из доказанного выше заключаем, что этот предел равен η_i°. Следовательно, для каждого $i \in I$ η_i° — единственная предельная точка множества $\{\kappa(\mu_s^i, \mu_s),\ s \in S\}$. Значит, $\lim_{s\in S} \kappa(\mu_s^i, \mu_s)$ существует и равен η_i°, а поэтому от выбора $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ не зависит. Теоремы 11.1 и 11.2 в случае D доказаны.

В общем случае произвольного $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathbb{M}_\sigma^\circ = \mathbb{M}_\sigma^\circ(\mathcal{A}, a, \kappa)$ множество всех тех минимизирующих в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче *последовательностей* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, для каждой из которых существует возрастающая последовательность конденсаторов $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\mathcal{K}\}$ со свойством $\mu_n \in \mathcal{W}(\mathcal{K}_n, a, \kappa)$ $\forall n$. Заметим, что $\mathbb{M}_\sigma^\circ$ не пусто.

Действительно, в силу [1] (лемма 4.1) для каждого n найдется такой конденсатор $\mathcal{K}_n = (K_1^n, \ldots, K_p^n) \in \{\mathcal{K}\}$, что $w_\kappa(\mathcal{A}, a) \le w_\kappa(\mathcal{K}_n, a) \le w_\kappa(\mathcal{A}, a) + n^{-1}$. Поскольку функция $w_\kappa(\cdot, a)$ не возрастает, то при необходимости переходя от K_i^n к $\bigcup_{j=1}^n K_i^j$, $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно считать возрастающей. Тогда $(\lambda_{\mathcal{K}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{M}_\sigma^\circ$.

Зафиксируем $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathscr{C}}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}_\sigma^\circ(\mathcal{A}, a, \kappa)$. При необходимости переходя к подпоследовательности, будем считать, что для каждого $i \in I$ существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \kappa(\nu_n^i, \nu_n) =: \eta_i'. \tag{11.7}$$

Кроме того, на основании [8, с. 166] будем полагать выполненным соотношение

$$\kappa(x, \chi) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \kappa(x, \nu_n) \quad \text{пр. в. в } X. \tag{11.8}$$

Выберем возрастающую последовательность $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\mathcal{K}\}$ такую, что $\nu_n \in \mathcal{W}(\mathcal{K}_n, a, \kappa)$ для всех n, и обозначим $F_i := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_i^n$ $\forall i$ и $\mathcal{F} := (F_1, \ldots, F_p)$. Тогда $\mathcal{F} \prec \mathcal{A}$ и $\mathcal{K}_n \uparrow \mathcal{F}$. Из последнего соотношения, леммы 4.2 из [1] и определения $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ выводим равенства

$$w_\kappa(\mathcal{F}, a) = \lim_{n\in\mathbb{N}} w_\kappa(\mathcal{K}_n, a) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|\nu_n\|^2 = w_\kappa(\mathcal{A}, a). \tag{11.9}$$

Отсюда заключаем, что $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}(\mathcal{F}, a, \kappa)$ и, следовательно,

$$\chi \in \mathcal{M}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, a, \kappa). \tag{11.10}$$

Применяя теорему 5.1 из [1] к минимальной в $(\mathcal{K}_n, a, \kappa)$-задаче мере ν_n, получаем

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \nu_n) \geq \alpha_i \kappa(\nu_n^i, \nu_n) \quad \text{пр. в. в } K_i^n, \ i \in I, \ n \in \mathbb{N}. \tag{11.11}$$

Используя упорядоченность конденсаторов $\mathcal{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$, из (11.7), (11.8) и (11.11) с помощью леммы 5.1 и следствия 2.1 из [1] находим $\alpha_i a_i \kappa(x, \chi) \geq \alpha_i \eta'_i$ пр. в. в K_i^n, $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Повторное применение леммы 5.1 и следствия 2.1 из [1] доказывает соотношения

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \chi) \geq \alpha_i \eta'_i \quad \text{пр. в. в } F_i, \quad i \in I. \tag{11.12}$$

Вследствие (11.9) $w_\kappa(\mathcal{F}, a) < +\infty$, что в силу леммы 4.3 из [1] равносильно условию $\operatorname{cap} F_i > 0$ $\forall i$. А так как потенциал $\kappa(x, \chi)$ конечен пр. в. в X, то из последнего соотношения и (11.12) получаем $\alpha_i \eta'_i < +\infty$ $\forall i$. Отсюда вследствие (11.7) находим

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \eta'_i = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I} \alpha_i \kappa(\nu_n^i, \nu_n) = w_\kappa(\mathcal{A}, a), \tag{11.13}$$

и поэтому числа η'_i, $i \in I$, конечны и удовлетворяют (11.1).

Из соотношений (11.9), (11.10), (11.12) и (11.13) следует, что доказано утверждение о существовании из теоремы 11.1 для $\mathcal{F}$. Для $\mathcal{A}$ оно будет доказано, как только будет доказано (11.2) (при $\eta_i = \eta'_i$, $i \in I$). Предположим обратное, что существует $j \in I$ (для определенности, $j = 1$) и компактное множество $K \subset A_1 \setminus F_1$ с $\operatorname{cap} K > 0$ такое, что

$$\alpha_1 a_1 \kappa(x, \chi) < \alpha_1 \eta'_1 \qquad \forall x \in K.$$

Обозначим $\mathcal{K}'_n := (K_1^n \cup K, K_2^n, \ldots, K_p^n)$, $n \in \mathbb{N}$, и зафиксируем $\lambda_n \in \mathcal{W}(\mathcal{K}'_n, a, \kappa)$, $n \in \mathbb{N}$. Из принятых определений и оценок

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \leq w_\kappa(\mathcal{K}'_n, a) \leq w_\kappa(\mathcal{K}_n, a) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

выводим, что $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}^\circ_\sigma(\mathcal{A}, a, \kappa)$ (и поэтому $\lambda_n \to \chi$ сильно). Повторяя для последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рассуждения, изложенные выше для $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, убеждаемся в существовании чисел η''_i, $i \in I$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \eta''_i = w_\kappa(\mathcal{A}, a), \tag{11.14}$$

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \chi) \geq \alpha_i \eta''_i \quad \text{пр. в. в } F'_i, \quad i \in I, \tag{11.15}$$

где $F'_1 := F_1 \cup K$ и $F'_i := F_i$ $\forall i \neq 1$. Используя (11.9), (11.10), (11.12) – (11.15) и применяя утверждение единственности из теоремы 11.1 к конденсатору $\mathcal{F}$, получаем равенства $\eta''_i = \eta'_i$ $\forall i$. Полученное противоречие с определением множества K доказывает (11.2).

Аналогично случаю D из доказанного выводим существование предела $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \kappa(\mu_n^i,\mu_n)$ $\forall(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}_\sigma^\circ(\mathcal{A},a,\kappa)$ и его инвариантность относительно выбора $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в указанном классе. Равенства (11.3) могут быть доказаны с помощью этого утверждения методом от противного. Теоремы 11.1 и 11.2 полностью доказаны.

Всюду далее η — вектор, однозначно определенный теоремой 11.1. Покажем, что утверждения теоремы 11.1 являются характеристическими для мер из $\mathcal{M}'_{\mathscr{E}}$.

Предложение 11.1. *Пусть* $\omega \in \mathscr{E}$ *и* $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_p)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$2\sum_{i\in I}\alpha_i\tau_i = \|\omega\|^2 + w_\kappa(\mathcal{A},a), \tag{11.1′}$$

$$\alpha_i a_i \kappa(x,\omega) \ge \alpha_i\tau_i \quad \textit{пр. в. в } A_i, \quad i\in I. \tag{11.2′}$$

Тогда $\omega\in\mathcal{M}'_{\mathscr{E}}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *и* $\tau=\eta$.

Доказательство. Пусть $(\mu_s)_{s\in S}\in\mathbb{M}$ и $\chi\in\mathcal{M}'_{\mathscr{E}}$. Интегрируя (11.2′) по μ_s^i, а затем суммируя по $i\in I$ и переходя к пределу по $s\in S$, получаем $\kappa(\chi,\omega)\ge\sum_{i\in I}\alpha_i\tau_i$. Отсюда и из (11.1′) заключаем, что $\|\chi-\omega\|=0$, и поэтому $\omega\in\mathcal{M}'_{\mathscr{E}}$. Соотношение $\tau=\eta$ следует из доказанного на основании утверждения единственности из теоремы 11.1.

11.2. Предположим, что выполняется случай D и κ имеет свойство (CW); тогда κ $\mathcal{A}$-согласованно вследствие леммы 9.7. Для мер из класса $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ (он не пуст в силу теоремы 10.1) теорема 11.2 допускает следующее уточнение.

Теорема 11.2′. *Для любых* $\gamma\in\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ *и* $(\mu_s)_{s\in S}\in\mathbb{M}(\mathcal{A},a,\kappa)$ *выполняется*

$$\kappa(\gamma^i,\gamma) = \lim_{s\in S}\kappa(\mu_s^i,\mu_s), \quad i\in I.$$

Доказательство. Зафиксируем $i\in I$ и $\gamma\in\mathcal{W}_*$, и пусть $(\nu_s)_{s\in S}$ — порождающая меру γ направленность. Используя сильную сходимость $(\nu_s)_{s\in S}$ к γ, сильную ограниченность $(\nu_s^i)_{s\in S}$ (лемма 9.6) и оценку $\left|\kappa(\nu_s^i,\gamma)-\kappa(\nu_s^i,\nu_s)\right| \le \left\|\nu_s^i\right\|\|\gamma-\nu_s\|$, получаем

$$\lim_{s\in S}\kappa(\nu_s^i,\gamma) = \lim_{s\in S}\kappa(\nu_s^i,\nu_s). \tag{11.16}$$

Согласно определению порождающей направленности, $\nu_s^i\to\gamma^i$ слабо. Применяя свойство (CW), получаем $\nu_s^i\to\gamma^i$ $\mathscr{E}$-слабо, и поэтому $\lim\limits_{s\in S}\kappa(\nu_s^i,\gamma) = \kappa(\gamma^i,\gamma)$. Комбинируя это равенство с (11.16) и используя теорему 11.2, получаем теорему 11.2′.

Следствие **11.1.** *В указанных выше условиях справедливы тождества*

$$\kappa(\gamma_1^i,\gamma_1) = \kappa(\gamma_2^i,\gamma_2) \quad \textit{для всех} \quad \gamma_1,\gamma_2\in\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa), \quad i\in I.$$

11.3. Предположим, что κ непрерывно на $\overline{A^+}\times\overline{A^-}$ и удовлетворяет условию:

$(\mathcal{A}_\infty)$ *для любых* $\varepsilon>0$ *и компактного множества* $K\subset X$ *существует компактное множество* $K'\subset X$ *такое, что* $|\kappa(x,y)|<\varepsilon$ *для всех* $(x,y)\in X\times X$, *принадлежащих* $(A^+\cap K)\times(A^-\setminus K')$ *либо* $(A^-\cap K)\times(A^+\setminus K')$.

Тогда в силу теоремы 4.1 из [1], для любого числа $q \in [0, +\infty)$ сужение отображения $(x, \mu) \mapsto \kappa(x, \mu)$ на $\overline{A^+} \times \mathfrak{M}^+(\overline{A^-}, \le q)$ (аналогично, на $\overline{A^-} \times \mathfrak{M}^+(\overline{A^+}, \le q)$) непрерывно.

В принятых предположениях справедлива такая теорема.

Теорема 11.3. *Пусть* $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ $\mathcal{A}$*-слабо сходится к* $\xi \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *и для каждого* $s \in S$ *существует конденсатор* $\mathcal{B}_s$ *такой, что* $\mu_s \in \mathcal{W}(\mathcal{B}_s, a, \kappa)$. *Тогда*

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \xi) \le \liminf_{s\in S} \alpha_i \kappa(\mu_s^i, \mu_s) \quad \textit{для всех} \quad x \in S(\xi^i), \ i \in I. \tag{11.17}$$

Доказательство. При необходимости рассматривая пересечения $B_i^s \cap \overline{A}_i$, $i \in I$, и меняя обозначения, будем считать, что $\mathcal{B}_s \prec \overline{\mathcal{A}}$ $\forall s \in S$. В принятых предположениях к мере $\mu_s \in \mathcal{W}(\mathcal{B}_s, a, \kappa)$ применима теорема 5.2 из [1]; на ее основании получаем

$$\alpha_i a_i \kappa(\zeta, \mu_s) \le \alpha_i \kappa(\mu_s^i, \mu_s) \qquad \forall \zeta \in S(\mu_s^i), \ i \in I, \ s \in S. \tag{11.18}$$

Зафиксируем $i \in I^+$ и $x \in S(\xi^i)$. Поскольку $\mu_s^i \to \xi^i$ слабо, то найдется сходящаяся к x направленность $(\zeta_s)_{s\in S}$ такая, что $\zeta_s \in S(\mu_s^i)$ для всех $s \in S$. Отсюда на основании упомянутой выше теоремы 4.1 из [1] и полунепрерывности снизу $\kappa(x, \nu)$ на $X \times \mathfrak{M}^+(X)$ (см. лемму 2.1 из [1]) соответственно находим

$$\kappa(x, \xi^-) = \lim_{s\in S} \kappa(\zeta_s, \mu_s^-), \qquad \kappa(x, \xi^+) \le \liminf_{s\in S} \kappa(\zeta_s, \mu_s^+).$$

Комбинируя эти соотношения с (11.18), убеждаемся в справедливости (11.17) для $i \in I^+$.

Для $i \in I^-$ доказательство аналогично. Теорема 11.3 доказана.

11.4. Предположим, что κ $\mathcal{A}$-согласованно, и пусть $\mathcal{W}_*^\circ(\mathcal{A}, a, \kappa)$ обозначает множество всех $\mathcal{A}$-слабых предельных точек направленностей $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$, где $\{\mathcal{K}\}$ — множество всех компактных конденсаторов $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$ и $\lambda_{\mathcal{K}}$ — произвольная мера из $\mathcal{W}(\mathcal{K}, a, \kappa)$. Напомним, что $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ (см. п. 11.1.). Множество $\mathcal{W}_*^\circ(\mathcal{A}, a, \kappa)$ не пусто и вследствие теоремы 10.1 содержится в $\mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

Зафиксируем $\gamma \in \mathcal{W}_*^\circ(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и дополнительно предположим, что κ непрерывно на $\overline{A^+} \times \overline{A^-}$ и удовлетворяет условию $(\mathcal{A}_\infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 11.4. *Для всех* $i \in I$ *выполняются следующие соотношения:*

(a) $\alpha_i a_i \kappa(x, \gamma) \ge \alpha_i \eta_i$ *пр. в. в* A_i;

(b) $a_i \kappa(x, \gamma) = \eta_i$ *пр. в. в* $A_i \cap S(\gamma^i)$;

(c) $\alpha_i a_i \kappa(x, \gamma) \le \alpha_i \eta_i$ *для всех* $x \in S(\gamma^i)$.

Доказательство. Теорема 11.4 следует из теорем 11.1 и 11.3.

Следствие **11.2.** *Для всех* $i \in I$ *с замкнутым множеством* A_i *выполняется*

$$a_i \kappa(\gamma^i, \gamma) = \eta_i \gamma^i(X). \tag{11.19}$$

Доказательство. Если A_i замкнуто, то вследствие соотношения (b) теоремы 11.4 γ^i-почти всюду выполняется равенство $a_i \kappa(x, \gamma) = \eta_i$. Интегрируя его по γ^i, находим (11.19).

***Следствие* 11.3.** *Пусть $\mathcal{A}$ замкнут, $j \in I$ фиксировано и $I \setminus \{j\} \subset \subset I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$. Тогда*

$$\eta_i = \kappa(\gamma^i, \gamma) \qquad \forall i \in I.$$

Если при этом, дополнительно, $j \notin I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$, то $\eta_j = \kappa(\gamma^j, \gamma) = 0$.

Доказательство. Из (11.19) и $I \setminus \{j\} \subset I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$ получаем $\eta_i = \kappa(\gamma^i, \gamma)$ $\forall i \neq j$. Учитывая равенство $\sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i = \sum_{i \in I} \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma)$, находим $\eta_j = = \kappa(\gamma^j, \gamma)$. Сравнивая это соотношение с (11.19), убеждаемся в справедливости второго утверждения следствия 11.3.

12. Условия существования минимальных мер в некомпактном случае. *12.1.* Всюду в пп. 12.1 предполагаем, что выполняется случай D. Тогда для каждой (сильно ограниченной) направленности $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ энергии $\|\mu_s^i\|^2$, $s \in S$, $i \in I$, в силу леммы 9.6 ограничены, и это существенно используется в доказательствах.

Теорема 12.1. *Пусть $\mathcal{A}$ замкнут, κ $\mathcal{A}$-согласованно и для каждого $i \in I$ выполняется одно из двух: либо A_i компактно, либо $\operatorname{cap} A_i < +\infty$. Тогда для любого a класс $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ не пуст и компактен в сильной, $\mathcal{A}$-слабой и слабой топологиях, причем $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa) = \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$.*

Доказательство. Теорема 12.1 следует из теоремы 10.1 и следующей леммы.

Лемма 12.1. *Пусть $j \in I$ фиксировано, κ удовлетворяет условию $(C_{\overline{A_j}})$ и*

$$\operatorname{cap} A_j < +\infty. \tag{12.1}$$

Тогда $\gamma^j(X) = a_j$ для всех $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

Доказательство. Зафиксируем $\gamma \in \mathcal{W}_*$ и предположим, что $\overline{A_j}$ не компактно (в противном случае утверждение очевидно). Тогда имеет место случай I, т. е. $\kappa \geq 0$.

Пусть $(\mu_t)_{t \in T}$ — порождающая γ направленность. Докажем предельное равенство

$$\lim_{(t,K) \in T \times \{K\}} \mu_t^j(X \setminus K) = 0, \tag{12.2}$$

где $\{K\}$ — направленное по отношению $\subset$ семейство всех компактных подмножеств X.

Из условий $(C_{\overline{A_j}})$ и (12.1) в силу теоремы 8.2, леммы 8.2 и следующего за леммой 8.2 замечания заключаем, что для каждого множества $K^* := A_j \setminus K$, где $K \in \{K\}$, существует ассоциированное с K^* внутреннее емкостное распределение θ_{K^*}, причем

$$\left\|\theta_{K^*} - \theta_{K_1^*}\right\|^2 \leq \left\|\theta_{K^*}\right\|^2 - \left\|\theta_{K_1^*}\right\|^2 \tag{12.3}$$

для всех $K, K_1 \in \{K\}$ таких, что $K \subset K_1$. Из (12.1), свойства (8.1) внутренних емкостных распределений и монотонности емкости получаем, что

$$\sup_{K \in \{K\}} \theta_{K^*}(X) < +\infty,$$

а направленность $\left(\left\|\theta_{K^*}\right\|^2\right)_{K\in\{K\}}$ ограничена и не возрастает и поэтому фундаментальна в $\mathbb{R}$. Вследствие (12.3) тогда $\left(\theta_{K^*}\right)_{K\in\{K\}}$ фундаментальна в $\mathcal{E}$.

Заметим также, что $\left(\theta_{K^*}\right)_{K\in\{K\}}$ содержится в $\mathfrak{M}^+(\overline{A_j})$ и слабо сходится к нулю. Действительно, если $f\in C_0$ и K_0 — компактная окрестность носителя $S(f)$, то $\theta_{K^*}(f)=0$ для всех $K\supset K_0$, откуда ввиду произвольности f следует требуемое.

Поэтому на основании $(C_{\overline{A_j}})$ $(\theta_{K^*})_{K\in\{K\}}$ сходится к нулю сильно и, следовательно,

$$\lim_{K\in\{K\}} \left\|\theta_{K^*}\right\| = 0. \tag{12.4}$$

Используя свойство (8.2) внутренних емкостных распределений, лемму 5.2 из [1], неравенство $\kappa\geq 0$ и неравенство Коши – Буняковского, выводим

$$\mu_t^j(X\setminus K) = \mu_t^j(A_j\setminus K) = \int \varphi_{K^*}\,d\mu_t^j \leq \int \kappa(x,\theta_{K^*})\,\varphi_{K^*}(x)\,d\mu_t^j(x) \leq$$
$$\leq \kappa(\theta_{K^*},\mu_t^j) \leq \left\|\theta_{K^*}\right\|\left\|\mu_t^j\right\| \quad \text{для всех} \quad (t,K)\in T\times\{K\}. \tag{12.5}$$

Учитывая ограниченность множества $\left\|\mu_t^j\right\|^2$, $t\in T$, из (12.4) и (12.5) получаем (12.2).

Ввиду слабой сходимости $(\mu_t^j)_{t\in T}$ к γ^j для каждого K из $\{K\}$ выполняется неравенство

$$\gamma^j(K) \geq \limsup_{t\in T} \mu_t^j(K),$$

что вместе с (12.2) приводит к соотношениям

$$a_j \geq \gamma^j(X) = \lim_{K\in\{K\}} \gamma^j(K) \geq \lim_{(t,K)\in T\times\{K\}} \mu_t^j(K) = a_j.$$

Лемма 12.1, а вместе с ней и теорема 12.1 доказаны.

Замечания. **1.** При дополнительных ограничениях $I^-=\varnothing$ (рассматриваемые меры положительны), попарной дизъюнктности множеств A_i, $i\in I$, а также их попарной κ-разделенности утверждение теоремы 12.1 о существовании минимальных мер доказано в [13] (теорема 3.7). В случае $I=\{1\}$ теорема 12.1 доказана в [8] (теорема 4.1).

2. Теорему 12.1 можно легко обобщить с помощью леммы 4.5 из [1], а также в направлении, указанном в теореме 10.3′. Аналогичное замечание, без дополнительных на то указаний, относится и к ряду других утверждений о разрешимости.

***Следствие* 12.1.** *Предположим, что ядро* κ $\overline{\mathcal{A}}$*-совершенное. Тогда утверждения* $\operatorname{cap}_*\mathcal{A}=+\infty$ *и* $\operatorname{cap} A_i=+\infty$ $\forall i\in I$ *равносильны.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{cap}_*\mathcal{A}=+\infty$ и предположим, что $\operatorname{cap} A_j<+\infty$ для некоторого $j\in I$. Из теорем 9.1 и 10.1 следует, что класс $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ не пуст, а из леммы 12.1 — что любой его элемент γ не равен нулю. Применяя леммы 9.1 и 9.2, получаем соотношения $w_\kappa(\mathcal{A},a)=\|\gamma\|^2\neq 0$, противоречащие предположению. Обратное утверждение справедливо для произвольного положительно определенного ядра (см. лемму 4.4 из [1]).

12.2. В случае $I^-=\varnothing$ теорема 12.1 допускает следующее обращение.

Теорема 12.2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *замкнут,* κ $\mathcal{A}$*-совершенно и* $I^-=\varnothing$. *Если существует вектор* a, *для которого* $(\mathcal{A},a,\kappa)$*-задача разрешима, то* $\operatorname{cap} A<$ $<+\infty$.

Доказательство. Как следует из леммы 9.2 и следствия 9.2, доказательство достаточно провести в случае I в предположении $m \neq 1$.

Предположим, что существует $j \in I$ с $\operatorname{cap} A_j = +\infty$. Меняя при необходимости обозначения, будем считать $j = m$. Тогда в силу $\mathcal{A}$-совершенности ядра найдется последовательность $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}^+(A_m, a_m)$, сильно и слабо сходящаяся к нулю. Обозначим $\mathcal{A}' := (A_1, \ldots, A_{m-1})$, $a' = (a_1, \ldots, a_{m-1})$, и пусть $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность из $\mathbb{M}(\mathcal{A}', a', \kappa)$. Тогда $(\nu_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и верны соотношения

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} \|\nu_n + \mu_n\|^2 = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n\|^2 = w_\kappa(\mathcal{A}', a').$$

А так как вследствие условий $I^- = \varnothing$, $\kappa \geq 0$ выполняется $w_\kappa(\mathcal{A}', a') \leq \leq w_\kappa(\mathcal{A}, a)$, то, значит, последовательность $(\nu_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. В силу теоремы 10.1 из нее можно выделить поднаправленность, порождающую некоторую меру $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$. Тогда γ^m — слабая предельная точка $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и поэтому $\gamma^m = 0$. Отсюда следует, что $\gamma \notin \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, и, значит, классы $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и $\mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$ не совпадают. Полученное противоречие с теоремой 10.2 доказывает теорему 12.2.

Замечания. **1.** В следующей части работы будет показано, что условие $I^- = \varnothing$ в теореме 12.2 существенно для справедливости ее заключения (см. также [2 – 6] по поводу соответствующих примеров для классических ядер в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$).

Кроме того, условие $\mathcal{A}$-совершенности ядра в теореме 12.2 нельзя опустить либо заменить на (более слабое) условие $\mathcal{A}$-согласованности, — это видно из теоремы 10.3′.

2. Это первая из теорем данной работы, содержащих необходимые условия разрешимости основной минимум-проблемы теории емкостей конденсаторов в X и тем самым вскрывающих ее существенно некомпактную природу. Существенная некомпактность построенной здесь теории — ее принципиальное отличие от теории емкостей множеств [8, 13].

12.3. Возвращаясь к теореме 12.1, отметим, что фигурирующее в ее формулировке условие κ-разделенности множеств A^+ и A^-, вообще говоря, нельзя снять, не нарушив при этом справедливости ее заключения, — соответствующий пример можно построить для ядра Ньютона и конденсаторов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, опираясь на результаты из [2, 3]. Следующая теорема показывает, что от этого условия тем не менее можно отказаться, если подчинить $\mathcal{A}$ и κ определенным дополнительным условиям.

Теорема 12.3. *Пусть конденсатор $\mathcal{A}$ замкнут, множество A^+ (аналогично, A^-) компактно,* $\operatorname{cap} A < +\infty$, *а ядро κ $\mathcal{A}$-согласованно и удовлетворяет условию (C_A) и принципу максимума Фростмана. Тогда справедливо заключение теоремы* 12.1.

При доказательстве теоремы 12.3 используется следующая лемма.

Лемма 12.2. *Пусть $\mathcal{A}$ замкнут, $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$, I_* — некоторое подмножество (может быть, пустое) множества $I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$ и существуют $\vartheta \in \mathcal{E}$ и $I_\vartheta \subset I^+$ (аналогично, $I_\vartheta \subset I^-$), удовлетворяющие соотношениям*

$$\kappa(x, \vartheta) = \zeta_i \quad \textit{пр. в. в } A_i, \quad i \in I, \tag{12.6}$$

где

$$\zeta_i = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad i \in I_\vartheta \cup I_*; \\ 0 & \text{для} \quad i \in I \setminus (I_\vartheta \cup I_*). \end{cases} \tag{12.7}$$

Тогда

$$I_\vartheta \subset I_{\mathrm{sol}}(\gamma).$$

Доказательство. Зафиксируем $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$. В силу следствия 10.2 $\mu_s \to \gamma$ сильно, а поэтому и $\mathcal{E}$-слабо. Применяя лемму 5.2 из [1], из (12.6) и (12.7) получаем

$$\sum_{i\in I_\vartheta \cup I_*} \alpha_i \gamma^i(X) = \kappa(\vartheta, \gamma) = \lim_{s\in S} \kappa(\vartheta, \mu_s) = \sum_{i\in I_\vartheta \cup I_*} \alpha_i a_i.$$

Согласно определениям, $\gamma^i(X) = a_i \quad \forall i \in I_*$ и $\alpha_i = \mathrm{const} \quad \forall i \in I_\vartheta$. Следовательно,

$$\sum_{i\in I_\vartheta} \gamma^i(X) = \sum_{i\in I_\vartheta} a_i,$$

что ввиду соотношений $\gamma^i(X) \le a_i \quad \forall i \in I$ и замкнутости $\mathcal{A}$ доказывает лемму 12.2.

***Доказательство теоремы* 12.3.** Зафиксируем меру γ из (непустого вследствие условия $\mathcal{A}$-согласованности) класса $\mathcal{W}_*$ и пусть, для определенности, A^+ компактно; тогда $I_{\mathrm{sol}}(\gamma) \supset I^+$. В условиях теоремы существует емкостное распределение θ_A на A, причем вследствие принципа максимума Фростмана $\kappa(x, \theta_A) = 1$ пр. в. в A (см. п. 8). Применяя лемму 12.2 при $\vartheta := \theta_A$, $I_* := I^+$ и $I_\vartheta := I^-$, получаем $I_{\mathrm{sol}}(\gamma) \supset I^-$, и поэтому $\gamma \in \mathcal{W}$. Следовательно, $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}$. Применяя теорему 10.1, получаем требуемое.

12.4. Замечание. В продолжение исследования $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи в следующей части работы будет получен ряд достаточных и (или) необходимых условий ее разрешимости в достаточно общем случае образующих критерий. При этом будет показано, что существование минимальной меры λ, вообще говоря, зависит от вектора a (ср. с теоремами 7.1, 7.1′, 10.3, 10.3′ и 12.1 – 12.3).

1. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168 – 189.
2. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. I // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350 – 1360.
3. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. II // Там же. – 1996. – **48**, № 5. – С. 603 – 613.
4. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I // Там же. – 1990. – **42**, № 4. – С. 494 – 500.
5. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. II // Там же. – № 11. – С. 1475 – 1480.
6. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Там же. – 1986. – **38**, № 4. – С. 431 – 437.
7. *Cartan H.* Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. math. France. – 1945. – **73**. – P. 74 – 106.
8. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139 – 215.
9. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
10. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
11. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир, 1964. – 212 с.
12. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
13. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135 – 352.
14. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
15. *Келли Дж. Л.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 431 с.

Получено 23.11.98