УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ТОРЕ

We prove two theorems on the existence of the unique Green function for linear extension of dynamic system on a torus and also present two examples of the construction of such a function in the explicit form.

Доведено дві теореми існування єдиної функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі, наведено також два приклади побудови такої функції в явному вигляді.

Рассмотрим линейное расширение динамической системы на торе

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{0.1}$$

где $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $P \in C(\mathcal{T}_m)$; $C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ — пространство 2π-периодических по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$\|a(\varphi) - a(\varphi')\| \leq K\|\varphi - \varphi'\|$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varphi' \in \mathcal{T}_m$, $C(\mathcal{T}_m)$ — пространство непрерывных 2π-периодических по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, функций, $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор.

Пусть $\varphi_t(\varphi)$ — решение первого уравнения (0.1), принимающее при $t = 0$ значение $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x_t(\varphi, x) = \Omega_0^t(\varphi)x$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \tag{0.2}$$

принимающее при $t = 0$ значение $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_0^t(\varphi)$ — эволюционный оператор уравнения (0.2), $\Omega_0^0(\varphi) = I$ — единичная матрица.

Следуя [1], определим функцию Грина системы (0.1) равенством

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0; \\ -\,\Omega_\tau^0(\varphi)\, C_1(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau > 0, \end{cases} \tag{0.3}$$

в котором

$$C_1(\varphi) = I - C(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{0.4}$$

и матрица $C(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ выбрана так, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ выполняется неравенство

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|\tau|}, \tag{0.5}$$

где $K = \mathrm{const} \geq 1$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$.

Достаточным условиям существования единственной функции Грина (0.3) – (0.5) системы (0.1) посвящена настоящая работа. В п. 1 доказывается общая теорема, сводящая проблему к определенному поведению решений уравнения (0.2), в п. 2 на основании результатов п. 1 и [2] излагается доказательство известной из [3 – 5] теоремы, сводящей проблему к обоснованию для (0.1) „прямой" теоремы метода Ляпунова; в п. 3 приводятся два примера конкретного построения функции Грина для системы (0.1): для случая

$$a(\varphi) \equiv 0, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{0.6}$$

и для случая, когда $m = 1$ и

$$a \equiv \text{const} = \omega > 0, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_1. \tag{0.7}$$

1. Теорема существования. Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть для системы* (0.1) *выполняются следующие условия*:

1) *найдутся постоянные* $K > 0$, $\gamma > 0$ *и матрица* $H(\varphi)$ *такие, что для всех* $\varphi \in \mathbb{R}^m$

$$\left\| \Omega_0^t(\varphi) H(\varphi) \right\| \leq K e^{-\gamma t}, \qquad t \geq 0, \tag{1.1}$$

$$\left\| \Omega_0^t(\varphi) (I - H(\varphi)) \right\| \leq K e^{\gamma t}, \qquad t < 0; \tag{1.2}$$

2) *единственным решением* $x_t(\varphi, x)$ *уравнения* (0.2), *удовлетворяющим условию*

$$\lim_{|t| \to \infty} x_t(\varphi, x) = 0,$$

является тривиальное решение

$$x_t(\varphi, x) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда равенство (0.3) *с матрицей*

$$C(\varphi) = H(\varphi)$$

определяет функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$ *системы* (0.1), *эта функция единственна и удовлетворяет неравенству* (0.5).

Переходя к доказательству теоремы, установим сначала равенства

$$H(\varphi + 2k\pi) = H(\varphi), \qquad H^2(\varphi) = H(\varphi), \tag{1.3}$$

$$H(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi) H(\varphi) \Omega_t^0(\varphi) \tag{1.4}$$

для каждого $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$, где $k \in Z^m$, Z^m — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$.

Обозначим

$$H_1(\varphi) = I - H(\varphi).$$

Очевидно, что для каждого $\varphi \in \mathbb{R}^m$

$$H(\varphi + 2k\pi) - H(\varphi) = -\left[H_1(\varphi + 2k\pi) - H_1(\varphi)\right],$$

$$H^2(\varphi) - H(\varphi) = -H(\varphi) H_1(\varphi) = -H_1(\varphi) H(\varphi).$$

Но тогда с учетом неравенств (1.1), (1.2) для каждого $\varphi \in \mathbb{R}^m$ и $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left\| \Omega_0^t(\varphi) [H(\varphi + 2k\pi) - H(\varphi)] \right\| \leq 2K e^{-\gamma |t|}, \tag{1.5}$$

$$\left\| \Omega_0^t(\varphi) [H^2(\varphi) - H(\varphi)] \right\| \leq K^2 e^{-\gamma |t|}. \tag{1.6}$$

Вследствие условия 2 теоремы неравенства (1.5) и (1.6) возможны лишь при выполнении равенств (1.3).

Для доказательства соотношения (1.4) используем свойства матрицы $\Omega_0^t(\varphi)$, установленные в [4], и представим матрицы $\Omega_0^t(\varphi) H(\varphi)$ и $\Omega_0^t(\varphi) H_1(\varphi)$ в виде

$$\Omega_0^t(\varphi) H(\varphi) = \Omega_\tau^t(\varphi) \Omega_0^\tau(\varphi) = \Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi)) \Omega_0^\tau(\varphi) H(\varphi) =$$

$$= \Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi)) \left[H(\varphi_\tau(\varphi)) + H_1(\varphi_\tau(\varphi))\right] \Omega_0^\tau(\varphi) H(\varphi),$$

$$\Omega_0^t(\varphi)H_1(\varphi) = \Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))\left[H(\varphi_\tau(\varphi)) + H_1(\varphi_\tau(\varphi))\right]\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi), \tag{1.7}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Далее имеем

$$\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))H_1(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi)H(\varphi) -$$
$$- \Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))H(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi),$$

так что согласно условию 1 теоремы отсюда следуют оценки

$$\left\|\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))H_1(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi)\right\| \le K\Big(e^{-\gamma t} +$$
$$+ e^{-\gamma(t-\tau)}\left\|\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi)\right\|\Big), \qquad t \ge \max\,[0, \tau], \tag{1.8}$$
$$\left\|\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))H_1(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi)\right\| \le Ke^{\gamma(t-\tau)} \times$$
$$\times \left\|\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi)\right\|, \qquad t \le \tau. \tag{1.9}$$

Из оценок (1.8), (1.9) вытекает

$$\lim_{|\theta|\to\infty} \left\|\Omega_0^\theta(\varphi_\tau(\varphi))H_1(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi)\right\| = 0 \tag{1.10}$$

для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Вследствие условия 2 теоремы равенство (1.10) возможно лишь тогда, когда

$$H_1(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi) = 0 \tag{1.11}$$

для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Из (1.7) следует

$$\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))H(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi)H_1(\varphi) - \Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi)) \times$$
$$\times H_1(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi).$$

Но тогда с учетом неравенств (1.1), (1.2) имеем

$$\left\|\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))H(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi)\right\| \le K\Big(e^{\gamma t} +$$
$$+ e^{\gamma(t-\tau)}\left\|\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi)\right\|\Big), \qquad t \le \min\,[0, \tau], \tag{1.12}$$
$$\left\|\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))H(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi)\right\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)} \times$$
$$\times \left\|\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi)\right\|, \qquad t \ge \tau. \tag{1.13}$$

Из оценок (1.12), (1.13) следует

$$\lim_{|\theta|\to\infty} \left\|\Omega_0^\theta(\varphi_\tau(\varphi))H(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi)\right\| = 0 \tag{1.14}$$

для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Вследствие условия 2 теоремы равенство (1.14) возможно лишь тогда, когда

$$H(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)H_1(\varphi) = 0 \tag{1.15}$$

для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$. Из равенств (1.11), (1.15) следует соотношение

$$[I - H(\varphi_\tau(\varphi))]\,\Omega_0^\tau(\varphi)H(\varphi) = H(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi)[I - H(\varphi)]$$

для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, равносильное условию (1.4).

Докажем непрерывность матрицы $H(\varphi)$. Из (1.4) и оценок (1.1), (1.2) имеем неравенства

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi) H(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi)\right\| = \left\|\Omega_\tau^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi)) H(\varphi_\tau(\varphi))\right\| \le K e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \ge \tau,$$

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi) H_1(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi)\right\| = \left\|\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi)) H_1(\varphi_\tau(\varphi))\right\| \le K e^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau \le t,$$

вследствие которых матрица

$$G_t(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi) H(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi), & t \ge \tau; \\ -\Omega_0^t(\varphi) H_1(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi), & t < \tau, \end{cases} \tag{1.16}$$

является функцией Грина уравнения (0.2), удовлетворяющей условию

$$\| G_t(\tau, \varphi) \| \le K e^{-\gamma |t-\tau|}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$. Использовав функцию (1.16), оценим разность

$$Z_t(\varphi, \varphi') = G_t(0, \varphi') - G_t(0, \varphi) \tag{1.17}$$

для произвольных $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\varphi' \in \mathbb{R}^m$. Для этого применим стандартные рассуждения [3 – 5].

Согласно формулам (1.16), (1.17) функция $Z_t(\varphi, \varphi')$ является решением уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = P(\varphi_t(\varphi'))Z + [P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_t(\varphi'))]\, G_t(0, \varphi), \tag{1.18}$$

удовлетворяющим условию

$$\| Z_t(\varphi, \varphi') \| \le 2K e^{-\gamma |t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Согласно условию 2 теоремы уравнение (1.18) может иметь лишь одно затухающее к нулю при $|t| \to \infty$ решение. Этим решением является функция

$$Z_t(\varphi, \varphi') = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \varphi')[P(\varphi_\tau(\varphi)) - P(\varphi_\tau(\varphi'))]\, G_\tau(0, \varphi)\, d\tau. \tag{1.19}$$

Утверждение следует из того, что функция (1.19) удовлетворяет уравнению (1.18) и для нее

$$\lim_{|t| \to \infty} Z_t(\varphi, \varphi') = 0$$

для каждого $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\varphi' \in \mathbb{R}^m$. Последнее следует из неравенства для подынтегрального выражения (1.19) вида

$$\begin{aligned} &\| G_t(\tau, \varphi')[P(\varphi_\tau(\varphi)) - P(\varphi_\tau(\varphi'))]\, G_\tau(0, \varphi) \| \le \\ &\le K^2 e^{-\gamma[|t-\tau| + |\tau|]} \| P(\varphi_\tau(\varphi)) - P(\varphi_\tau(\varphi')) \| \end{aligned} \tag{1.20}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\varphi' \in \mathbb{R}^m$.

Поскольку

$$Z_0(\varphi, \varphi') = H(\varphi') - H(\varphi),$$

то из (1.19) и (1.20) следует оценка

$$\|H(\varphi') - H(\varphi)\| \leq K^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma|\tau|} \|P(\varphi_\tau(\varphi)) - P(\varphi_\tau(\varphi'))\| d\tau \tag{1.21}$$

для каждого $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\varphi' \in \mathbb{R}^m$. Из сходимости интеграла и непрерывности по φ, φ' при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varphi' \in \mathcal{T}_m$ подынтегральной функции в (1.21) следует непрерывность по φ, φ' при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varphi' \in \mathcal{T}_m$ интеграла в (1.21). Тогда

$$\lim_{\varphi' \to \varphi} \|H(\varphi') - H(\varphi)\| = 0,$$

откуда следует непрерывность по φ функции $H(\varphi)$ для $\varphi \in \mathbb{R}^m$. Вместе с первым из соотношений (1.3) этого достаточно для принадлежности функции $H(\varphi)$ пространству $C(\mathcal{T}_m)$. Для завершения доказательства теоремы в (0.3) положим

$$C(\varphi) = H(\varphi) \tag{1.22}$$

и докажем оценку (0.5). Имеем

$$\Omega_\tau^0(\varphi) H(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^{-\tau}(\varphi_\tau(\varphi)) H(\varphi_\tau(\varphi)),$$

в результате чего

$$\begin{aligned} \left\|\Omega_\tau^0(\varphi) H(\varphi_\tau(\varphi))\right\| &\leq K e^{\gamma\tau}, \quad \tau \leq 0, \\ \left\|\Omega_\tau^0(\varphi) H_1(\varphi_\tau(\varphi))\right\| &\leq K e^{-\gamma\tau}, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Вместе с (1.22) неравенства (1.23) доказывают оценку (0.5).

Единственность функции Грина системы (0.1) обеспечивается условием 2 теоремы, так как согласно условиям единственности функции Грина системы (0.1), установленным в [4], неединственность функции Грина системы (0.1) приводит к существованию у этой системы „вырожденных" инвариантных торов, следовательно, гарантирует существование решений $x_t(\varphi, x)$ таких, что

$$x_t(\varphi, x) = u(\varphi_t(\varphi)),$$

где согласно определению „вырожденности" [4] $u \in C(\mathcal{T}_m)$, $u(\varphi) \not\equiv 0$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$,

$$\lim_{|t| \to \infty} u(\varphi_t(\varphi)) = 0 \tag{1.24}$$

для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Равенство (1.24) противоречит условию 2 теоремы.

2. Метод Ляпунова. „Прямая" теорема метода Ляпунова для системы (0.1) известна из работ [3–5] и утверждает следующее.

Теорема. *Пусть для системы* (0.1) *существует невырожденная симметрическая матрица* $S(\varphi)$, *принадлежащая пространству* $C^1(\mathcal{T}_m)$ *и такая, что матрица*

$$\hat{S}(\varphi) = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) + S(\varphi) P(\varphi) + P^*(\varphi) S(\varphi)$$

является отрицательно определенной для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Тогда система (0.1) *имеет функцию Грина* $G_0(\tau, \varphi)$, *эта функция единственна и удовлетворяет неравенству* (0.5).

Покажем, как из теоремы п. 1 и результатов работы [2] выводится приведенная выше теорема.

Действительно, условия теоремы гарантируют выполнение неравенств

$$\|S(\varphi)\| \le M = \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|S(\varphi)\|,$$

$$(\hat{S}(\varphi)x, x) \le -\alpha \|x\|^2, \quad \alpha = \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m, \|\eta\|=1} (\hat{S}(\varphi)\eta, \eta) > 0$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^m$, в результате чего выполняются условия теоремы [2], обеспечивающие экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$ уравнения (0.2) для произвольного $\varphi \in \mathbb{R}^m$. Это обусловливает существование для произвольного $\varphi \in \mathbb{R}^m$ проектора $H(\varphi)$, обеспечивающего ограниченность на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ матрицы решений $\Omega_0^t(\varphi)H(\varphi)$ и ограниченность на $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ матрицы решений $\Omega_0^t(\varphi)H_1(\varphi)$ при $H_1(\varphi) = I - H(\varphi)$. Из этого и леммы 2 [2] имеем оценки

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi)H(\varphi)\right\| \le K_1 e^{-\gamma t} \|H(\varphi)\|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi)H_1(\varphi)\right\| \le K_1 e^{\gamma t} \|H_1(\varphi)\|, \quad t \in \mathbb{R}_-, \tag{2.2}$$

в которых φ — произвольное значение $\mathbb{R}^m$, K_1 и γ — положительные постоянные, зависящие лишь от M и α.

Докажем теперь неравенство

$$\|H(\varphi)\| \le M_1, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m, \tag{2.3}$$

где $M_1 > 0$ — некоторая постоянная. Предположим для этого, что неравенство (2.3) не имеет места. Тогда для некоторой последовательности $\varphi^{(\nu)} \in \mathbb{R}^m$, $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\|H(\varphi^{(\nu)})\right\| = \infty.$$

Не нарушая строгости рассуждений, можно считать, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi^{(\nu)} (\mathrm{mod}\, 2\pi) = \varphi_0$$

и

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{H(\varphi^{(\nu)})}{\left\|H(\varphi^{(\nu)})\right\|} = H.$$

Тогда $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$, $\|H\| = 1$ и из неравенств (2.1), (2.2) следует

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\| \Omega_0^t(\varphi^{(\nu)}) \frac{H(\varphi^{(\nu)})}{\left\|H(\varphi^{(\nu)})\right\|} \right\| = \left\|\Omega_0^t(\varphi_0)H\right\| \le Ke^{-\gamma t} \tag{2.4}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ и

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\| \Omega_0^t(\varphi^{(\nu)}) \frac{H_1(\varphi^{(\nu)})}{\left\|H(\varphi^{(\nu)})\right\|} \right\| = \left\|\Omega_0^t(\varphi_0)H\right\| \le Ke^{\gamma t} \tag{2.5}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}_-$. Из (2.4), (2.5) следует

$$\lim_{|t| \to \infty} \left\|\Omega_0^t(\varphi_0)H\right\| = 0. \tag{2.6}$$

Но уравнение (0.2) э-дихотомично на $\mathbb{R}$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}^m$ и поэтому согласно [2] удовлетворяет условию 2 теоремы из п. 1. Это противоречит равенству (2.6), так как в нем $\|H\| = 1$.

Из (2.1) – (2.3) следуют неравенства (1.1), (1.2) для матриц $\Omega_0^t(\varphi)H(\varphi)$ и $\Omega_0^t(\varphi)H_1(\varphi)$ с постоянными $\gamma > 0$ и $K = K_1 M_1 > 0$. Это обеспечивает выполнение условия 1 теоремы из п. 1.

Из изложенного следует, что условия доказываемой теоремы обеспечивают выполнение всех условий теоремы из п. 1, что гарантирует справедливость этой теоремы.

3. Примеры. *1°.* Рассмотрим систему (0.1) при условии (0.6). В этом случае

$$\Omega_0^t(\varphi) = e^{P(\varphi)t}$$

и уравнение (0.2) э-дихотомично для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ при условии, что спектр $\sigma(\varphi)$ матрицы $P(\varphi)$ для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ распадается на два спектральных множества

$$\sigma(\varphi) = \sigma_1(\varphi) \cup \sigma_2(\varphi),$$

одно из которых лежит в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z < 0, \tag{3.1}$$

а другое — в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > 0 \tag{3.2}$$

комплексной плоскости.

Построим функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$ системы (0.1) в рассматриваемом случае.

Пусть Γ — окружность радиуса ρ с центром на вещественной оси комплексной плоскости, выбранная так, что она лежит в полуплоскости (3.1) и содержит внутри себя множество $\sigma_1(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, Γ_1 — аналогичная окружность, лежащая в полуплоскости (3.2) и содержащая внутри себя множество $\sigma_2(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Следуя [6], определим проекторы

$$C(\varphi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (P(\varphi) - zI)^{-1}\,dz, \tag{3.3}$$

$$C_1(\varphi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (P(\varphi) - zI)^{-1}\,dz \tag{3.4}$$

и докажем, что функция

$$G_0(\tau, \varphi) = -\begin{cases} e^{-P(\varphi)\tau} C(\varphi), & \tau \le 0; \\ -e^{-P(\varphi)\tau} C_1(\varphi), & \tau > 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

является функцией Грина рассматриваемой системы (0.1).

Из (3.3), (3.4) следует, что $C(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ и

$$C(\varphi) + C_1(\varphi) = I, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Оценим матрицу $e^{P(\varphi)t} C(\varphi)$ при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $t \in \mathbb{R}_+$. По формуле Данфорда – Тейлора [6] имеем

$$e^{P(\varphi)t} C(\varphi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{zt} (P(\varphi) - zI)^{-1}\,dz,$$

что с учетом определения Γ приводит к равенству

$$e^{P(\varphi)t}C(\varphi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z+\beta|=\rho} e^{zt}(P(\varphi)-zI)^{-1}dz =$$

$$= -\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{(-\beta+\rho e^{i\psi})t}[P(\varphi)+(\beta-\rho e^{i\psi})I]^{-1}e^{i\psi}d\psi, \tag{3.6}$$

в котором $z=-\beta$ — центр окружности Γ, $\beta>0$.

Определим постоянную $\gamma>0$ условием, что множества $\operatorname{Re}\sigma_1(\varphi)$ и $\operatorname{Re}\sigma_2(\varphi)$ при всех $\varphi\in\mathcal{T}_m$ принадлежат отрезкам $[-M_2,-\gamma]$, и $[\gamma, M_2]$ соответственно, а $M_2 = \max\limits_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\|P(\varphi)\|$, и положим

$$\rho = \beta-\gamma+\varepsilon$$

при достаточно большом β и сколь угодно малом $\varepsilon>0$. При таком выборе γ и ρ для всех $t\in\mathbb{R}_+$ имеем

$$\left|e^{(-\beta+\rho e^{i\psi})t}\right| \le e^{(-\gamma+\varepsilon)t}$$

и из (3.6) для всех $\varphi\in\mathcal{T}_m$ следует оценка

$$\left\|e^{P(\varphi)t}C(\varphi)\right\| \le \frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\|[P(\varphi)+(\beta-\rho e^{i\psi})I]^{-1}\right\|d\psi,$$

$$e^{(-\gamma+\varepsilon)t} \le K e^{(-\gamma+\varepsilon)t}, \qquad t\in\mathbb{R}_+, \tag{3.7}$$

где

$$K = \frac{\rho}{2\pi}\max_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\int\limits_0^{2\pi}\left\|[P(\varphi)+(\beta-\rho e^{i\psi})I]^{-1}\right\|d\psi.$$

Аналогичным образом доказывается оценка для всех $\varphi\in\mathcal{T}_m$ вида

$$\left\|e^{P(\varphi)t}C_1(\varphi)\right\| \le Ke^{(\gamma-\varepsilon)t}, \qquad t\in\mathbb{R}_-. \tag{3.8}$$

Оценки (3.7), (3.8) доказывают неравенство (0.5) для функции (3.5). Единственность функции Грина (3.5) очевидна.

2°. Рассмотрим систему (0.1) при условии (0.7). Наряду с этой системой запишем уравнение

$$\frac{dx}{d\varphi} = \mu P(\varphi)x, \tag{3.9}$$

где

$$\mu = 1/\omega.$$

В этом случае

$$\Omega_0^t(\varphi) = U(\omega t+\varphi)U^{-1}(\varphi), \tag{3.10}$$

где $U(\varphi)$ — эволюционный оператор уравнения (3.9). Согласно теории Флоке–Ляпунова

$$U(\varphi) = \Phi(\varphi)e^{A\varphi}, \tag{3.11}$$

где Φ и A — вещественные матрицы,

$$A = \frac{1}{4\pi}\ln U^2(2\pi),$$

Φ — периодическая по φ матрица периода 2π или 4π. Из (3.10), (3.11) следует

$$\Omega_0^t(\varphi) = \Phi(\omega t+\varphi)e^{A\omega t}\Phi^{-1}(\varphi). \tag{3.12}$$

Но тогда рассматриваемая система (0.1) удовлетворяет всем условиям теоремы, приведенной в п. 1, всякий раз, когда собственные числа матрицы A имеют отличные от нуля вещественные части. Таким образом, в рассматриваемом случае система (0.1) имеет функцию Грина $G_0(\tau,\varphi)$, определяемую равенством

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases}\Omega_\tau^0(\varphi)\,C(\omega t+\varphi), & \tau\le 0;\\ -\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,C_1(\omega t+\varphi), & \tau>0,\end{cases}$$

в котором $\Omega_0^t(\varphi)$ — матрица (3.12),

$$C(\varphi) = \Phi(\varphi)\,H\,\Phi^{-1}(\varphi),$$

H — вещественный проектор, определяемый равенством

$$H = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A-zI)^{-1}\,dz,$$

Γ — окружность из примера 1°, содержащая внутри себя собственные числа матрицы A с отрицательной вещественной частью.

1. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Международной конф. по нелинейным колебаниям. Аналитические методы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – Т. 1. – С. 495 – 499.
2. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Укр. мат. журн. – 2001. – **54**, № 3. – С. 356 – 371.
3. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* К вопросу существования функции Грина задачи об инвариантном торе // Там же. – 1975. – **27**, № 3. – С. 348–359.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
6. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Получено 25.12.2000