УДК 517.53

П. В. Філевич (Львів. ун-т)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ З ВИНЯТКОВИМИ ЗНАЧЕННЯМИ У СПІВВІДНОШЕННІ БОРЕЛЯ

Let $M_f(r)$ and $\mu_f(r)$ be maximum modulus and maximal term of an entire function f, respectively, and let $l(r)$ be a continuously differentiable function convex with respect to $\ln r$. We establish that in order for the relation $\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r)$, $r \to +\infty$, to hold for every entire function f such that $\ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, it is necessary and sufficient that $\ln(rl'(r)) = o(l(r))$, $r \to +\infty$.

Нехай $M_f(r)$ і $\mu_f(r)$ — відповідно максимум модуля і максимальний член цілої функції f, а $l(r)$ — неперервно диференційовна і опукла відносно $\ln r$ функція. Встановлено, що для того щоб $\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r)$, $r \to +\infty$, для кожної цілої функції f такої, що $\ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, необхідно і досить, щоб $\ln(rl'(r)) = o(l(r))$, $r \to +\infty$.

Вступ. Нехай T — клас трансцендентних цілих функцій, а $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$ — максимум модуля $f \in T$. Розвинемо функцію f у степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

і нехай $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{n \geq 0 : |a_n| r^n = \mu_f(r)\}$ — відповідно максимальний член і центральний індекс f.

Нехай, далі, H — клас неперервних на $(0; +\infty)$ дійсних функцій h, для яких $h(r) \nearrow +\infty$, $r \to +\infty$. Через L_0 позначимо підклас H, що складається з опуклих відносно логарифма функцій l, для яких $\ln r = o(l(r))$, $r \to +\infty$. Зауважимо, що $\ln \mu_f \in L_0$ для кожної $f \in T$, оскільки

$$\ln \mu_f(r) - \ln \mu_f(r_0) = \int_{r_0}^{r} x^{-1} \nu_f(x)\, dx, \quad r > r_0 > 0,$$

а ν_f — неперервна справа на $[0; +\infty)$ функція, причому $\nu_f(r) \nearrow +\infty$ $(r \to +\infty)$.

Як стверджує класична теорема Вімана – Валірона (див., наприклад, [1]), для довільної $f \in T$ і кожного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r), \quad r > 1, \quad r \notin E_f(\varepsilon),$$

де $E_f(\varepsilon)$ — множина виняткових значень, яка має скінченну логарифмічну міру, тобто для цієї множини справедлива оцінка $\int_{E_f(\varepsilon)} r^{-1} dr < +\infty$. Звідси, зважаючи на нерівність Коші $\mu_f(r) \leq M_f(r)$, $r \geq 0$, отримуємо відоме співвідношення Бореля

$$\ln \mu_f(r) \sim \ln M_f(r), \quad r \to +\infty, \quad r \notin E_f, \tag{2}$$

де E_f — деяка множина скінченної логарифмічної міри. (Зауважимо, що, як показано в [2], співвідношення (2) завжди виконується з множиною E_f, для якої $\int_{E_f} r^n dr < +\infty$, $n \geq 1$; при $n = 1$ це твердження встановлено в [3].)

Нагадаємо також (див., наприклад, [1]), що коли функція $f \in T$ має скінченний порядок ρ_f,

$$\rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r},$$

то співвідношення (2) не містить виняткову множину, тобто для таких функцій

$$\ln \mu_f(r) \sim \ln M_f(r), \qquad r\to+\infty. \tag{3}$$

Звідси, використовуючи формулу Коші–Адамара

$$\rho_f = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{n\ln n}{-\ln|a_n|},$$

отримуємо таке твердження: для кожної цілої функції $f\in T$ вигляду (1), коефіцієнти якої задовольняють умову

$$|a_n| \le e^{-nh(n)}, \qquad n \ge n_0, \tag{4}$$

де $h\in H$, причому

$$\ln r = O(h(r)), \qquad r\to+\infty, \tag{5}$$

виконується співвідношення (3).

Як випливає з результатів М. М. Шеремети [4], умова (5) в останньому твердженні є необхідною: якщо $h\in H$ і $\ln r \ne O(h(r))$, $r\to+\infty$, то існує ціла функція $f\in T$ вигляду (1), коефіцієнти якої задовольняють умову (4) і для якої

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln\mu_f(r)} > 1. \tag{6}$$

У цьому напрямку відмітимо ще наступний результат П. Локгарта і Е. Г. Страуса [5]: для довільної функції двох змінних Ψ, визначеної на $\mathbb{R}_+^2$, існує $f\in T$ така, що $M_f(r_n) \ge \Psi(r_n, \ln\mu_f(r_n))$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності $\{r_n\}$.

З іншого боку, як показав Ж. Клуні [6], для довільної $l\in L_0$ існує $f\in T$ з невід'ємними дійсними коефіцієнтами a_n в (1) така, що $\ln\mu_f(r)\sim l(r)$, $r\to$ $\to+\infty$, і для f виконується співвідношення (3). Отже, жодні умови на зростання логарифма максимального члена не можуть забезпечити виконання співвідношення (6). У зв'язку з цим виникає наступне запитання: при яких умовах на функцію $l\in L_0$ знайдеться $f\in T$ така, що $\ln\mu_f(r)\sim l(r)$, $r\to+\infty$, і для f виконується (6) (чи, навпаки, при яких умовах на функцію $l\in L_0$ для кожної $f\in T$ такої, що $\ln\mu_f(r)\sim l(r)$, $r\to+\infty$, виконується (3))?

У даній статті отримано повну відповідь на це запитання; крім того, розглянуто низку суміжних з даним питань.

1. Основні результати. Нехай L — підклас класу L_0, що складається з функцій l, для яких існує $h\in H$ така, що

$$l(r) = \int_1^r \frac{h(x)}{x}dx, \qquad r>1. \tag{7}$$

Тоді з (7) випливає $h(r) = rl'(r)$, $r>1$.

Нехай також

$$\alpha(l) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln(rl'(r))}{l(r)}$$

для кожної $l\in L$. Якщо ж $l_0\in L_0$, то, як легко бачити, знайдеться $l\in L$ така, що $l_0(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$. Покладемо $\alpha(l_0) = \alpha(l)$. Коректність останнього означення випливає з того, що для кожних двох функцій l_1, $l_2 \in L$, для яких $l_1(r) \sim l_2(r)$, $r \to +\infty$, справедлива рівність $\alpha(l_1) = \alpha(l_2)$ (див. лему 3). Якщо $h \in H$, то нехай

$$\beta(h) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln h(r)}{l(r)},$$

де l — функція з L, що визначається по h з (7). Зрозуміло, що $\alpha(l) = \beta(h)$.

Введемо також для кожної $f \in T$ позначення

$$G_f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

Оскільки $M_f(r) \le G_f(r)$, $r \ge 0$, з одного боку, і $G_f(r) = M_g(r)$, $r \ge 0$, де

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n,$$

з іншого, то всі наведені нижче твердження стосовно співвідношення

$$\ln \mu_f(r) \sim \ln G_f(r), \qquad r \to +\infty, \tag{8}$$

будуть справедливими і стосовно співвідношення (3). Перші два з цих тверджень дають повну відповідь на поставлене у вступі запитання.

Теорема 1. *Нехай $l \in L_0$ і $\alpha(l) = 0$. Тоді для кожної $f \in T$, для якої $\ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, виконується співвідношення* (8).

Умова $\alpha(l) = 0$ в теоремі 1 є необхідною, на що вказує наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $l \in L_0$ і $\alpha(l) > 0$. Тоді існує $f \in T$ така, що $\ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, і для f співвідношення* (8) *не виконується.*

Нехай $f \in T$, а $h \in H$ — така, що $\nu_f(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$. Тоді за правилом Лопіталя $\ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, де l — функція з L, яка зв'язана з h співвідношенням (7). У зв'язку з цим з теореми 1 легко отримати наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай $h \in L_0$ і $\beta(h) = 0$. Тоді для кожної $f \in T$, для якої $\nu_f(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$, виконується співвідношення* (8).

З іншого боку, використання правила Лопіталя дає можливість отримати теорему 2 з наведеної нижче теореми 4, яка, окрім того, вказує на необхідність умови $\beta(h) = 0$ у теоремі 3.

Теорема 4. *Нехай $h \in H$ і $\beta(h) > 0$. Тоді існує $f \in T$ така, що $\nu_f(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$, і для f співвідношення* (8) *не виконується.*

Для доведення теорем 1 та 4 нам будуть потрібні деякі допоміжні результати, що встановлюються в наступному пункті.

2. Допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай $h, p \in H$, а $a > 0$ — довільне число таке, що $p(a) > 0$. Тоді якщо*

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{h(r)}{p(r)} > \varepsilon > 0,$$

то для множини $E(\varepsilon) = \{r > a : h(r) = \varepsilon p(r)\}$ виконуються рівності

$$\int_{E(\varepsilon)} d(\ln h(r)) = +\infty, \qquad \int_{E(\varepsilon)} d(\ln p(r)) = +\infty. \tag{9}$$

Доведення. Твердження леми 1, як легко бачити, справедливе у випадку, коли

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{p(r)} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{p(r)}. \tag{10}$$

Припустимо, що (10) не виконується, і виберемо довільні δ і ω так, щоб

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{p(r)} > \delta > \omega > \max\left\{ \varliminf_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{p(r)};\, \varepsilon \right\}.$$

Тоді зрозуміло, що множина $E(\omega)$ містить множину $E(\omega) = \{r > a : h(r) > \omega p(r)\}$, і тому досить показати, що рівності, аналогічні рівностям (9), справедливі і для $E(\omega)$.

Зауважимо, насамперед, що множина $E(\omega)$ є відкритою, а тому її можна подати у вигляді об'єднання зліченної кількості інтервалів, які взаємно не перетинаються. Отже, як легко бачити, знайдеться послідовність інтервалів $\{(x_n; y_n)\}$, для якої при довільному $n \ge 0$ виконуються такі умови:

1) $(x_n; y_n) \subset E(\omega)$;

2) $h(x_n) = \omega p(x_n)$, $h(y_n) = \omega p(y_n)$;

3) $h(t_n) = \delta p(t_n)$ для деякої точки $t_n \in (x_n; y_n)$.

Тоді

$$\ln p(y_n) - \ln p(x_n) = \ln h(y_n) - \ln h(x_n) \ge$$

$$\ge \ln h(t_n) - \ln h(x_n) > \ln \delta + \ln p(t_n) - \ln \omega - \ln p(x_n) > \ln(\delta/\omega),$$

звідки

$$\int\limits_{E(\omega)} d(\ln h(r)) \ge \int\limits_{\bigcup_{n=0}^{+\infty}(x_n;y_n)} d(\ln h(r)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln h(y_n) - \ln h(x_n)) = +\infty,$$

а отже, першу з рівностей (9) встановлено. Аналогічно встановлюється і друга рівність. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $l \in L$, *а* k — *довільна неперервна, невід'ємна на* $[a; +\infty)$ *дійсна функція,* $a > 0$. *Тоді при довільному* $\varepsilon > 0$ *для множини* $E(\varepsilon) = \{r > a : l'(r) > k(r) l(r) \ln^{1+\varepsilon} l(r)\}$ *виконується оцінка* $\int_{E(\varepsilon)} k(r)\, dr < +\infty$.

Доведення. Виберемо довільне $b \in [a; +\infty)$ так, щоб виконувалась нерівність $l(b) \ge e$, і нехай $C = \int_a^b k(r)\, dr$. Тоді

$$\int\limits_{E(\varepsilon)} k(r)\, dr < C + \int\limits_b^{+\infty} \frac{l'(r)\, dr}{l(r) \ln^{1+\varepsilon} l(r)} = C + \int\limits_b^{+\infty} \frac{d(\ln l(r))}{\ln^{1+\varepsilon} l(r)} < +\infty,$$

що й слід було довести.

Лема 3. *Нехай* $l, d \in L$. *Якщо* $l(r) \sim d(r)$, $r \to +\infty$, *то* $\alpha(l) = \alpha(d)$.

Доведення. Припустимо, що твердження леми 3 хибне, і нехай, для визначеності, $\alpha(l) > \alpha(d)$. Тоді, як легко бачити, існують додатні дійсні числа b і c такі, що $\alpha(l) > b > c > \alpha(d)$.

Виберемо дійсне число $a > 0$ так, щоб для довільного $r > a$ одночасно виконувались нерівності

$$(b - c) d(r) \ge \ln l(r) + 2 \ln\ln l(r), \quad c d(r) \ge \ln(r d'(r)), \quad d(r) \ge 1, \tag{11}$$

і нехай $k(r) = d'(r)$, $r \geq a$. Тоді за лемою 2 для множини $E_1 = \{r > a : l'(r) > d'(r)\, l(r) \ln^2 l(r)\}$ справедлива оцінка

$$\int_{E_1} d'(r)dr < +\infty. \tag{12}$$

Розглянемо тепер множину $E_2 = \{r > a : \ln(rl'(r)) > bd'(r)\}$. За лемою 1, а також за третьою з нерівностей (11) для цієї множини

$$\int_{E_2} d'(r)dr \geq \int_{E_2} d(\ln d(r)) = +\infty.$$

Це суперечить оцінці (12), оскільки, як легко бачити, $E_2 \subset E_1$. Дійсно, якщо $r \in E_2$, то за двома першими з нерівностей (11)

$$\ln(rl'(r)) > bd(r) = cd(r) + (b-c)d(r) \geq \ln(rd'(r)l(r)\ln^2 l(r)),$$

тобто $r \in E_1$. Лему доведено.

Лема 4. *Нехай* $f \in T$. *Тоді*

$$G_f(r) \leq |f(0)| + 2\sqrt{\mu_f(r)\, G_f'(r)}, \qquad r > 0. \tag{13}$$

Доведення. Нехай f має вигляд (1). Тоді для довільного $K > 0$

$$G_f(r) \leq \sum_{n<K} |a_n| r^n + K^{-1} \sum_{n \geq K} n |a_n| r^n \leq |a_0| + K\mu_f(r) + K^{-1} r G_f'(r).$$

Звідси, вибираючи $K = \sqrt{r G_f'(r) / \mu_f(r)}$, і отримуємо нерівність (13).

3. Доведення теорем 1 і 4. ***Доведення теореми* 1.** Нехай $l \in L_0$ і $\alpha(l) = 0$, а $f \in T$ — довільна ціла функція, для якої $\ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$. Доведемо, що для f виконується співвідношення (8).

Припустимо, всупереч цьому, що

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln G_f(r)}{\ln \mu_f(r)} > 1 + \delta \tag{14}$$

для деякого $\delta > 0$, і будемо вважати, не зменшуючи загальності, що $f(0) = 0$.

Нехай $h \in H$ така, що $\nu_f(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$. Тоді, враховуючи рівність $\alpha(l) = 0$, за лемою 3 і правилом Лопіталя отримуємо

$$\ln h(r) = o(\ln \mu_f(r)), \qquad r \to +\infty. \tag{15}$$

Завдяки (15) і співвідношенню $\ln r = o(\ln G_f(r))$, $r \to +\infty$, ми можемо знайти таке $a \geq 1$, шо для всіх $r > a$ виконуються нерівності

$$\ln(4rh(r)\ln^2 G_f(r)) \leq \delta(1+\delta)^{-1} \ln G_f(r), \tag{16}$$

$$\ln \mu_f(r) > 1, \quad \min\{h(r); \nu_f(r)\} > 0. \tag{17}$$

Нехай, далі, $E_1 = \{r > a : G_f'(r) > h(r)\, G_f(r) \ln^2 G_f(r)\}$. Враховуючи другу з нерівностей (17), за лемою 2 отримуємо

$$\int_{E_1} h(r)dr < +\infty,$$

а тому і

$$\int_{E_1} \nu_f(r)\,dr < +\infty. \tag{18}$$

Розглянемо тепер множину $E_2 = \{r > a : \ln G_f(r) > (1+\delta)\ln\mu_f(r)\}$. Враховуючи першу з нерівностей (17) і співвідношення (14), за лемою 1 одержуємо

$$\int_{E_2} \nu_f(r)\,dr \ge \int_{E_2} d(\ln\ln\mu_f(r)) = +\infty. \tag{19}$$

Для отримання суперечності досить показати, зважаючи на (18) та (19), що $E_2 \subset E_1$. Дійсно, використовуючи послідовно нерівності (13) та (16), для довільного $r > a$, $r \notin E_1$, отримуємо

$$\ln G_f(r) \le \ln\mu_f(r) + \ln\frac{4rG_f'(r)}{G_f(r)} \le$$

$$\le \ln\mu_f(r) + \ln\left(4rh(r)\ln^2 G_f(r)\right) \le \ln\mu_f(r) + \delta(1+\delta)^{-1}\ln G_f(r),$$

звідки $\ln G_f(r) \le (1+\delta)\ln\mu_f(r)$, тобто $r \notin E_2$. Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 4.** Нехай $h \in H$ і припустимо, що при деякому $\gamma > 0$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln h(r)}{l(r)} > \gamma; \tag{20}$$

тут l — функція, яка зв'язана з h співвідношенням (7). Доведемо, що знайдеться ціла функція f, для якої $\nu_f(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$, але співвідношення (8) не виконується.

Можемо вважати, не зменшуючи загальності, що $h(1) < 1$. Нехай тоді $\lambda_n = n^2$, $n \ge 0$, а $\{c_n\}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних дійсних чисел така, що $\lambda_{n+1} = h(c_n)$, $n \ge 0$. Зрозуміло, що $c_0 > 1$.

Покладемо $a_0 = 1$, $a_n = \left(c_0^{\lambda_1-\lambda_0}c_1^{\lambda_2-\lambda_1}\ldots c_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\right)^{-1}$, $n \ge 1$. Оскільки

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^{-1}} = c_n \uparrow +\infty, \qquad n \to +\infty,$$

то функція

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

є цілою, і, що добре відомо, $\mu_g(r) = a_n r^{\lambda_n}$, $\nu_f(r) = \lambda_n$ для всіх $r \in [c_{n-1}; c_n)$. Отже, $\nu_g(r) \le h(r)$, $r \ge c_0$. З іншого боку,

$$h(r)/\nu_g(r) \le (\lambda_{n+1}+1)/\lambda_n = 1 + 2n^{-1} + 2n^{-2}$$

для всіх $r \in [c_{n-1}; c_n)$. Тому $\nu_g(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$; тоді $\ln\mu_g(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, за правилом Лопіталя. Звідси і з (20) отримуємо

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\nu_g(c_n)}{\ln\mu_g(c_n)} > \gamma. \tag{21}$$

Розглянемо тепер цілу функцію

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lambda_{n+1}-\lambda_n-1} a_n c_n^{-k} z^{\lambda_n+k}.$$

Легко бачити, що $\mu_f(r) = \mu_g(r)$, $\nu_f(r) = \nu_g(r)$ для всіх $r \geq 0$. Отже,

$$G_f(c_m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lambda_{n-1}-\lambda_n-1} a_n c_n^{-k} c_n^{\lambda_n+k} \geq$$

$$\geq (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\mu_f(c_m) > \sqrt{\lambda_{m+1}}\,\mu_f(c_m) = \sqrt{\nu_f(c_m)}\,\mu_f(c_m).$$

Звідси, використовуючи співвідношення (21), одержуємо

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \frac{\ln G_f(c_m)}{\ln \mu_f(c_m)} > 1 + \frac{\gamma}{2},$$

що й слід було довести.

4. Суміжні результати і наслідки. *1°.* Нехай, як звичайно,

$$\rho(h) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln h(r)}{\ln r}$$

— порядок функції $h \in H$. Отже, порядок цілої функції f — це порядок логарифма її максимуму модуля: $\rho_f = \rho(\ln M_f)$.

Використовуючи співвідношення (2) і враховуючи, що множина E_f у цьому співвідношенні має скінченну логарифмічну міру, легко отримати відому рівність

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln r} \tag{22}$$

(див., наприклад, [7, с. 17]). Звідси випливає, що порядок цілої функції можна означити також і як порядок логарифма її максимального члена: $\rho_f = \rho(\ln \mu_f)$. Рівність (22) узагальнено у наступній теоремі.

Теорема 5. *Нехай* $l \in L_0$, $\alpha(l) = 0$. *Тоді*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r)}{l(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{l(r)} \tag{23}$$

для кожної $f \in T$.

Теорема 6. *Нехай* $l \in L_0$, $\alpha(l) > 0$. *Тоді існує така* $f \in T$, *що рівність* (23) *не виконується.*

Зауважимо, що теорема 6, яка вказує на необхідність умови $\alpha(l) = 0$ у теоремі 5, легко отримується з теореми 2.

***Доведення теореми* 5.** Нехай $l \in L_0$, $\alpha(l) = 0$. Припустимо, що для деякої $f \in T$ співвідношення (23) не виконується і нехай b та c — додатні дійсні числа такі, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r)}{l(r)} > b > c > \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{l(r)}.$$

Можемо вважати, не зменшуючи загальності, що $f(0) = 0$, $l \in L$.

Нехай $a > 0$ — довільне число таке, що для кожного $r \geq a$ виконуються нерівності

$$\ln \mu_f(r) < cl(r), \qquad 2\ln\ln G_f(r) \leq \frac{b-c}{2b} \ln G_f(r), \tag{24}$$

$$\int\limits_{E_1} \nu_f(r)\,dr < +\infty. \tag{18}$$

Розглянемо тепер множину $E_2 = \{r > a : \ln G_f(r) > (1+\delta)\ln\mu_f(r)\}$. Враховуючи першу з нерівностей (17) і співвідношення (14), за лемою 1 одержуємо

$$\int\limits_{E_2} \nu_f(r)\,dr \geq \int\limits_{E_2} d(\ln\ln\mu_f(r)) = +\infty. \tag{19}$$

Для отримання суперечності досить показати, зважаючи на (18) та (19), що $E_2 \subset E_1$. Дійсно, використовуючи послідовно нерівності (13) та (16), для довільного $r > a$, $r \notin E_1$, отримуємо

$$\ln G_f(r) \leq \ln\mu_f(r) + \ln\frac{4rG_f'(r)}{G_f(r)} \leq$$

$$\leq \ln\mu_f(r) + \ln\left(4rh(r)\ln^2 G_f(r)\right) \leq \ln\mu_f(r) + \delta(1+\delta)^{-1}\ln G_f(r),$$

звідки $\ln G_f(r) \leq (1+\delta)\ln\mu_f(r)$, тобто $r \notin E_2$. Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 4.** Нехай $h \in H$ і припустимо, що при деякому $\gamma > 0$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln h(r)}{l(r)} > \gamma; \tag{20}$$

тут l — функція, яка зв'язана з h співвідношенням (7). Доведемо, що знайдеться ціла функція f, для якої $\nu_f(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$, але співвідношення (8) не виконується.

Можемо вважати, не зменшуючи загальності, що $h(1) < 1$. Нехай тоді $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$, а $\{c_n\}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних дійсних чисел така, що $\lambda_{n+1} = h(c_n)$, $n \geq 0$. Зрозуміло, що $c_0 > 1$.

Покладемо $a_0 = 1$, $a_n = \left(c_0^{\lambda_1-\lambda_0} c_1^{\lambda_2-\lambda_1} \ldots c_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\right)^{-1}$, $n \geq 1$. Оскільки

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^{-1}} = c_n \uparrow +\infty, \quad n \to +\infty,$$

то функція

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

є цілою, і, що добре відомо, $\mu_g(r) = a_n r^{\lambda_n}$, $\nu_f(r) = \lambda_n$ для всіх $r \in [c_{n-1}; c_n)$. Отже, $\nu_g(r) \leq h(r)$, $r \geq c_0$. З іншого боку,

$$h(r)/\nu_g(r) \leq (\lambda_{n+1}+1)/\lambda_n = 1 + 2n^{-1} + 2n^{-2}$$

для всіх $r \in [c_{n-1}; c_n)$. Тому $\nu_g(r) \sim h(r)$, $r \to +\infty$; тоді $\ln\mu_g(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, за правилом Лопіталя. Звідси і з (20) отримуємо

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\nu_g(c_n)}{\ln\mu_g(c_n)} > \gamma. \tag{21}$$

Розглянемо тепер цілу функцію

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lambda_{n+1}-\lambda_n-1} a_n c_n^{-k} z^{\lambda_n+k}.$$

Легко бачити, що $\mu_f(r) = \mu_g(r)$, $\nu_f(r) = \nu_g(r)$ для всіх $r \geq 0$. Отже,

$$G_f(c_m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lambda_{n-1}-\lambda_n-1} a_n c_n^{-k} c_n^{\lambda_n+k} \geq$$

$$\geq (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\mu_f(c_m) > \sqrt{\lambda_{m+1}}\,\mu_f(c_m) = \sqrt{\nu_f(c_m)}\,\mu_f(c_m).$$

Звідси, використовуючи співвідношення (21), одержуємо

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \frac{\ln G_f(c_m)}{\ln \mu_f(c_m)} > 1 + \frac{\gamma}{2},$$

що й слід було довести.

4. Суміжні результати і наслідки. *1°.* Нехай, як звичайно,

$$\rho(h) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln h(r)}{\ln r}$$

— порядок функції $h \in H$. Отже, порядок цілої функції f — це порядок логарифма її максимуму модуля: $\rho_f = \rho(\ln M_f)$.

Використовуючи співвідношення (2) і враховуючи, що множина E_f у цьому співвідношенні має скінченну логарифмічну міру, легко отримати відому рівність

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln r} \tag{22}$$

(див., наприклад, [7, с. 17]). Звідси випливає, що порядок цілої функції можна означити також і як порядок логарифма її максимального члена: $\rho_f = \rho(\ln \mu_f)$. Рівність (22) узагальнено у наступній теоремі.

Теорема 5. *Нехай* $l \in L_0$, $\alpha(l) = 0$. *Тоді*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r)}{l(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{l(r)} \tag{23}$$

для кожної $f \in T$.

Теорема 6. *Нехай* $l \in L_0$, $\alpha(l) > 0$. *Тоді існує така* $f \in T$, *що рівність* (23) *не виконується.*

Зауважимо, що теорема 6, яка вказує на необхідність умови $\alpha(l) = 0$ у теоремі 5, легко отримується з теореми 2.

***Доведення теореми* 5.** Нехай $l \in L_0$, $\alpha(l) = 0$. Припустимо, що для деякої $f \in T$ співвідношення (23) не виконується і нехай b та c — додатні дійсні числа такі, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r)}{l(r)} > b > c > \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{l(r)}.$$

Можемо вважати, не зменшуючи загальності, що $f(0) = 0$, $l \in L$.

Нехай $a > 0$ — довільне число таке, що для кожного $r \geq a$ виконуються нерівності

$$\ln \mu_f(r) < cl(r), \qquad 2\ln\ln G_f(r) \leq \frac{b-c}{2b} \ln G_f(r), \tag{24}$$

$$l(r) > 1, \quad l'(r) > 0, \quad \ln(4rl'(r)) \leq \frac{b-c}{2} l(r). \tag{25}$$

Розглянемо множини $E_1 = \{r > a : \ln G_f(r) > bl(r)\}$ та $E_2 = \{r > a : G'_f(r) > l'(r) G_f(r) \ln^2 G_f(r)\}$. За лемами 1 та 2, враховуючи перші дві з нерівностей (25), маємо

$$\int_{E_1} l'(r)\,dr = +\infty, \quad \int_{E_2} l'(r)\,dr < +\infty,$$

а тому для отримання суперечності досить показати, що $E_1 \subset E_2$.

Дійсно, нехай $r > a$, $r \notin E_2$. Тоді, використовуючи нерівності (13), (24) та третю з нерівностей (25), отримуємо

$$\ln G_f(r) \leq \ln\left(4r\mu_f(r)\frac{G'_f(r)}{G_f(r)}\right) \leq$$

$$\leq \ln(4rl'(r)) + \ln\mu_f(r) + 2\ln\ln G_f(r) \leq \frac{b+c}{2} l(r) + \frac{b-c}{2b}\ln G_f(r),$$

звідки легко одержуємо $\ln G_f(r) \leq bl(r)$, тобто $r \notin E_1$. Отже, $E_1 \subset E_2$. Теорему доведено.

2°. Розглянемо наступне питання: при якій умові на функцію $l \in L$ для кожної $f \in T$ такої, що $\ln G_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, виконується співвідношення (8)? Достатню умову вказано у наведеній нижче теоремі 7 і ця умова збігається з достатньою умовою в теоремі 1. Питання про необхідність даної умови у теоремі 7 залишається відкритим.

Теорема 7. *Нехай* $l \in L_0$ *і* $\alpha(l) = 0$. *Тоді для кожної* $f \in T$, *для якої* $\ln G_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, *виконується співвідношення* (8).

У зв'язку з теоремами 7 та 5 наведемо також наступну теорему.

Теорема 8. *Нехай* $l \in L_0$, $\alpha(l) = 0$. *Тоді*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r)}{l(r)} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\mu_f(r)}{l(r)}$$

для кожної $f \in T$.

Як і в теоремі 7, питання про необхідність умови $\alpha(l) = 0$ в теоремі 8 залишається відкритим. Зауважимо лише, що якщо ця умова є все ж необхідною у теоремі 7, то вона є необхідною і в теоремі 8.

***Доведення теореми* 7.** Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $l \in L$, і нехай $\alpha(l) = 0$. Розглянемо довільну цілу функцію $f \in T$, для якої $\ln G_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$. За лемою 3

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left(r G'_f(r) G_f^{-1}(r)\right)}{\ln G_f(r)} = \alpha(l) = 0,$$

а тому, використовуючи нерівність (13), легко встановлюємо, що для f виконується співвідношення (8).

***Доведення теореми* 8.** Нехай $l \in L$ і $\alpha(l) = 0$, і припустимо, що твердження теореми 8 невірне. Тоді ми зможемо знайти b і c такі, що

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r)}{l(r)} > b > c > \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\mu_f(r)}{l(r)}.$$

Будемо вважати, не зменшуючи загальності, що $f(0) = 0$.

Нехай $a > 0$ — довільне число таке, що при $r > a$ виконуються нерівності $l(r) > 1$, $l'(r) > 0$, $\ln G_f(r) > bl(r)$, а також

$$2\ln\ln G_f(r) \le \frac{b-c}{2b}\ln G_f(r), \qquad \ln(4rl'(r)) \le \frac{b-c}{2}l(r), \tag{26}$$

Розглянемо множини $E_1 = \{r > a : \ln\mu_f(r) < cl(r)\}$ та $E_2 = \{r > a : G_f'(r) > > l'(r)\,G_f(r)\ln^2 G_f(r)\}$. За лемами 1 та 2

$$\int_{E_1} l'(r)\,dr = +\infty, \qquad \int_{E_2} l'(r)\,dr < +\infty,$$

а тому для отримання суперечності досить показати, що $E_1 \subset E_2$.

Дійсно, нехай $r > a$, $r \in E_1$. Тоді, використовуючи нерівності (13) та (26), отримуємо

$$\ln\frac{G_f'(r)}{G_f(r)} \ge \left(\frac{b+c}{2b} + \frac{b-c}{2b}\right)\ln G_f(r) - \ln(4r) - \ln\mu_f(r) >$$

$$> \frac{b+c}{2}l(r) + 2\ln\ln G_f(r) - \frac{b-c}{2}l(r) + \ln l'(r) - cl(r) = \ln\left(l'(r)\ln^2 G_f(r)\right),$$

звідки випливає, що $r \in E_2$. Теорему доведено.

1. *Hayman W. K.* The local growth of power series; a survey of the Wiman – Valiron method // Can. Math. Bull. – 1974. – **17**, № 3. – P. 317 – 358.
2. *Філевич П. В.* До теореми Лондона про співвідношення Бореля для цілих функцій // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1578 – 1580.
3. *London R.* Note on a lemma of Rosenbloom // Quart. J. Math. – 1970. – **21**, № 81. – P. 67 – 69.
4. *Шеремета М. Н.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 5. – С. 141 – 148.
5. *Lockhart P., Straus E. G.* Relations between the maximum modulus and maximum term of entire functions // Pacif. J. Math. – 1985. – **118**, № 2. – P. 479 – 485.
6. *Clunie J.* On integral functions having prescribed asymptotic growth // Can. J. Math. – 1965. – **17**, № 3. – P. 396 – 404.
7. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.

Одержано 24.05.99