УДК 517.537.72

М. М. Шеремета (Львів. ун-т)

ПРО ДВОЧЛЕННУ АСИМПТОТИКУ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Let $M(\sigma)$ be the maximum modulus and let $\mu(\sigma)$ be the maximal term of an entire Dirichlet series with nonnegative exponents λ_n increasing to ∞. We establish a condition on λ_n which implies the equivalence of the relations $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi_1(\sigma)+(1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$ $(\sigma\to+\infty)$ and $\ln M(\sigma,F)\le\Phi_1(\sigma)+(1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$ $(\sigma\to+\infty)$ under some conditions on the functions Φ_1 and Φ_2.

Нехай $M(\sigma)$ — максимум модуля і $\mu(\sigma)$ — максимальний член цілого ряду Діріхле з невід'ємними зростаючими до ∞ показниками λ_n. Знайдено умову на λ_n для еквівалентності співвідношень $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi_1(\sigma)+(1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$ $(\sigma\to+\infty)$ і $\ln M(\sigma,F)\le\Phi_1(\sigma)+(1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$ $(\sigma\to+\infty)$ при деяких умовах на функції Φ_1 і Φ_2.

1. Вступ. Нехай $\Lambda=(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0=0)$, а $S(\Lambda)$ — клас цілих рядів Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\},\qquad s=\sigma+it. \tag{1}$$

Покладемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:\ t\in\mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):\ n\ge0\}$ — максимальний член, а $\nu(\sigma,F)=\max\{n:\ |a_n|\exp(\sigma\lambda_n)=\mu(\sigma)\}$ — центральний індекс ряду (1).

В [1] доведено, що для того щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda)$ співвідношення

$$\ln M(\sigma,F)\le T\exp\{\rho_R\sigma\}+(1+o(1))\tau\exp\{\rho\sigma\},\qquad \sigma\to+\infty,$$

$$\ln\mu(\sigma,F)\le T\exp\{\rho_R\sigma\}+(1+o(1))\tau\exp\{\rho\sigma\},\qquad \sigma\to+\infty,$$

де $0<\rho<\rho_R<+\infty$, $T\in(0,+\infty)$, $\tau\in\mathbb{R}$, були рівносильними, необхідно і досить, щоб $\ln n(x)=o(x^{\rho/\rho_R})$, $x\to+\infty$, де $n(x)=\sum_{\lambda_n\le x}1$ — лічильна функція послідовності Λ.

В даній роботі ми узагальнимо цей результат на випадок довільної двочленної асимптотики.

Нехай Ω — клас додатних необмежених на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Для $\Phi\in\Omega$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [2, 3] функція Ψ неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$, а функція φ неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(0,+\infty)$. Для $\Phi_j\in\Omega$ через φ_j і Ψ_j будемо позначати відповідні визначені вище функції.

Через L^0 позначимо клас додатних неперервних на $[x_0,+\infty)$ функцій l таких, що $l((1+o(1))x)=(1+o(1))l(x)$, $x\to+\infty$.

Нарешті, будемо говорити, що додатна двічі неперервно диференційовна зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$ функція Φ_2 підпорядкована функції $\Phi_1\in\Omega$, якщо $\Phi_2'(\varphi_1)\in L^0$, $\Phi_2'(\sigma)=o(\sigma\Phi_1''(\sigma))$ і $\Phi_2''(\sigma)=o(\Phi_1''(\sigma))$ при $\sigma\to+\infty$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Phi_1\in\Omega$, $\varphi_1'\in L^0$, функція Φ_2 підпорядкована функції*

Φ_1, $\Phi_1'(\sigma)/\Phi_2(\sigma) \nearrow +\infty$, *і при* $\sigma \to +\infty$

$$\Phi_2(\sigma) = O\left(\Phi_2\left(\sigma - (1+o(1))\frac{\Phi_1(\sigma)}{\Phi_1'(\sigma)}\right)\right),$$
$$\Phi_2\left(\sigma + O\left(\frac{\Phi_1'(\sigma)}{\Phi_1''(\sigma)}\right)\right) = O(\Phi_2(\sigma)). \tag{2}$$

Припустимо також, що $\ln\sigma = O(\Phi_2(\sigma))$ *і* $\ln(\Phi_1''(\sigma)/\Phi_2'(\sigma)) = O(\Phi_2(\sigma))$ *при* $\sigma \to +\infty$. *Тоді для того щоб для кожної функції* $F \in S(\Lambda)$ *співвідношення*

$$\ln\mu(\sigma, F) \le \Phi_1(\sigma) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \tag{3}$$

$$\ln M(\sigma, F) \le \Phi_1(\sigma) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \tag{4}$$

були еквівалентними, необхідно і досить, щоб

$$\ln n(t) = o(\Phi_2(\varphi_1(t))), \quad t \to +\infty. \tag{5}$$

2. Допоміжні твердження. І при доведенні необхідності, і при доведенні достатності умови (5) буде використовуватись така лема.

Лема 1 [2, 3]. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Для того щоб* $\ln\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \ge \sigma_0$, *необхідно і досить, щоб* $\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \ge n_0$.

Використовуючи цю лему, доведемо спочатку наступне твердження, яке має і самостійне значення.

Теорема 2. *Нехай* $\Phi_1 \in \Omega$, $\varphi_1' \in L^0$, *а функція* Φ_2 *підпорядкована функції* Φ_1. *Для того щоб виконувалось співвідношення* (3), *необхідно і досить, щоб*

$$\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi_1(\varphi_1(\lambda_n)) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\varphi_1(\lambda_n)), \quad n \to +\infty. \tag{6}$$

Доведення. Розглянемо функцію $\Phi(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \tau\Phi_2(\sigma)$. Оскільки $\Phi_1 \in \Omega$ і $\Phi_2''(\sigma) = o(\Phi_1''(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$, то $\Phi''(\sigma) = (1+o(1))\Phi_1''(\sigma)$, $\Phi_2'(\sigma) = o(\Phi_1'(\sigma))$ і $\Phi_2(\sigma) = o(\Phi_1(\sigma))$ при $\sigma_0 \le \sigma \to +\infty$, а звідси, зокрема, випливає, що функція Φ' є додатною і зростає до $+\infty$ на $[\sigma_0, +\infty)$. Для простоти будемо вважати (і це не зменшує загальності), що $\sigma_0 = -\infty$, тобто $\Phi \in \Omega$.

Зрозуміло, що обернена до Φ' функція φ задовольняє рівняння

$$\Phi_1'(\sigma) + \tau\Phi_2'(\sigma) = x. \tag{7}$$

Оскільки $\Phi_2'(\sigma) = o(\Phi_1'(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, то ми шукаємо розв'язок рівняння (8) у вигляді

$$\sigma = \varphi_1(x-y), \quad y = y(x) = o(x), \quad x \to +\infty. \tag{8}$$

Підставляючи (8) в (7) і враховуючи умову $\Phi_2'(\varphi_1) \in L^0$, отримуємо

$$y = \tau\Phi_2'(\varphi_1(1+o(1))x) = (1+o(1))\tau\Phi_2'(\varphi_1(x)), \quad x \to +\infty.$$

Тому з (8) з огляду на умову $\varphi_1' \in L^0$ маємо

$$\varphi(x) = \varphi_1(x - (1+o(1))\tau\Phi_2'(\varphi_1(x))) =$$
$$= \varphi_1(x) - \{\varphi_1(x) - \varphi_1(x - (1+o(1))\tau\Phi_2'(\varphi_1(x)))\} =$$
$$= \varphi_1(x) - \varphi_1'(x + O(\Phi_2'(\varphi_1(x))))(1+o(1))\tau\Phi_2'(\varphi_1(x))),$$

звідки на підставі співвідношення $\Phi_2'(\sigma) = o(\Phi_1'(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, і умови $\varphi_1' \in L^0$ випливає

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - (1+o(1))\tau\Phi_2'(\varphi_1(x)))\varphi_1'(x), \qquad x \to +\infty. \tag{9}$$

(Зауважимо, що з рівності $\Phi_1''(\varphi_1(x))\varphi_1'(x) \equiv 1$ і умови $\Phi_2'(\sigma) = o(\sigma\Phi_1''(\sigma))$, $\sigma \to \to +\infty$, випливає, що $\Phi_2'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x) = o(\varphi_1(x))$, $x \to +\infty$.) Але

$$x\Psi(\varphi(x)) - x_0\Psi(\varphi(x_0)) = \int_{x_0}^{x}(t\varphi(t) - \Phi(\varphi(t)))'dt = \int_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt.$$

Тому з (9) маємо

$$x\Psi(\varphi(x)) = \int_{x_0}^{x}\varphi_1(t)\,dt - \int_{x_0}^{x}(1+o(1))\tau\Phi_2'(\varphi_1(t)))\varphi_1'(t)\,dt + O(1) =$$

$$= x\Psi_1(\varphi_1(x)) - (1+o(1))\tau\Phi_2(\varphi_1(x))) + O(1), \qquad n \to +\infty. \tag{10}$$

Звідси на підставі леми 1 легко отримуємо висновок теореми 2.

Для доведення необхідності умови (5) нам потрібні дві леми.

Лема 2. *Нехай* γ *— додатна, неперервна, зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція, а*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1. \tag{11}$$

Тоді існує підпослідовність (λ_k^*) *послідовності* (λ_n) *така, що*

$$k \le \exp\{\gamma(\lambda_k^*)\} + 1, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

і

$$k_j \ge \exp\left\{\gamma\left(\lambda_{k_j}^*\right)\right\} \tag{13}$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) *натуральних чисел.*

При $\gamma(x) = Ax$ цю лему доведено в [4]. Легко побачити, що якщо в лемі 4 з [4] взяти $A = 1$ і $\gamma(\lambda_n)$ замість λ_n, то отримаємо лему 2.

Лема 3. *Якщо* $l \in L^0$, *то для кожного* $\lambda \in [1, +\infty)$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{l(\lambda x)}{l(x)} = c(\lambda) < +\infty.$$

Доведення. Нехай $2^n \le \lambda \le 2^{n+1}$. Тоді

$$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} \le \frac{l(2^{n+1}x)}{l(x)} = \frac{l(2^{n+1}x)}{l(2^n x)}\cdots\frac{l(2x)}{l(x)}t,$$

звідки легко випливає, що $c(\lambda) \le c^n(2)$, тобто досить довести, що $c(2) < +\infty$.

Припустимо від супротивного, що $c(2) = +\infty$, тобто існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) така, що $\dfrac{l(2x_k)}{l(x_k)} = \omega(x_k) \to +\infty$, $k \to \infty$. Можемо вважати, що (x_k) настільки швидко зростає, що $2x_k < x_{k+1}$, $k \ge 1$, і $\sqrt[k]{\omega(x_k)} \to +\infty$, $k \to \infty$.

Розіб'ємо проміжок $[x_k, 2x_k]$ на k рівних частин точками

$$x_k^0 = x_k, \qquad x_k^1 = x_k + \frac{1}{k}x_k, \ldots, x_k^j = x_k + \frac{j}{k}x_k, \ldots, x_k^k = 2x_k.$$

Тоді існує j_k, $0 \le j_k \le k-1$, таке, що $l(x_k^{(j_k+1)})/l(x_k^{(j_k)}) \ge \sqrt[k]{\omega(x_k)}$. (Справді, якщо б для всіх j, $0 \le j \le k-1$, виконувалась нерівність $l(x_k^{(j+1)})/l(x_k^{(j)}) < < \sqrt[k]{\omega(x_k)}$, то ми мали б

$$\omega(x_k) = \frac{l(x_k^{(k)})}{l(x_k^{(0)})} = \frac{l(x_k^{(k)})}{l(x_k^{(k-1)})} \cdots \frac{l(x_k^{(1)})}{l(x_k^{0})} < (\sqrt[k]{\omega(x_k)})^k = \omega(x_k),$$

що неможливо.) Тому

$$\frac{l(x_k^{(j_k+1)})}{l(x_k^{(j_k)})} \to +\infty, \quad k \to \infty,$$

і оскільки

$$\frac{x_k^{(j_k+1)}}{x_k^{(j_k)}} = \frac{1+(j_k+1)/k}{1+j_k/k} = 1 + \frac{1}{k+j_k} \to 1, \quad k \to \infty,$$

то з цих співвідношень видно, що $l \notin L^0$. Лему 3 доведено.

3. Доведення теореми 1. Почнемо з *необхідності* умови (5). З огляду на нерівність Коші нам треба показати, що якщо послідовність Λ не задовольняє умову (5), то існує ряд Діріхле (1) з показниками λ_n, для якого виконується (3), а (4) не виконується.

Якщо послідовність Λ не задовольняє умову (5), то існує $\beta \in (0, 1)$ таке, що

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\Phi_2(\varphi_1(\lambda_n))} > \beta.$$

Тому за лемою 2 існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що

$$k \le \exp\{\beta\Phi_2(\varphi_1(\lambda_k^*))\} + 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

і

$$k_j \ge \exp\{\beta\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*))\}$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Покладемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \ne \lambda_k^*$ і $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, де

$$a_k^* = \exp\{-\lambda_k^*\Psi_1(\varphi_1(\lambda_k^*)) + \tau\Phi_2(\varphi_1(\lambda_k^*))\}.$$

Для ряду Діріхле (1) з такими коефіцієнтами за теоремою 2 виконується співвідношення (3).

Покладемо тепер $m_j = \left[k_j - \sqrt{k_j}\,\right]$. Тоді

$$\lambda_{m_j}^* \ge \Phi_1'\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{\ln(m_j-1)}{\beta}\right)\right) \ge \Phi_1'\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{\ln(k_j-\sqrt{k_j}-2)}{\beta}\right)\right) \ge$$

$$\ge \Phi_1'\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{\ln k_j}{\beta}\right)\right) - \left\{\Phi_1'\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{\ln k_j}{\beta}\right)\right) - \Phi_1'\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{\ln k_j - 2/\sqrt{k_j}}{\beta}\right)\right)\right\} \ge \lambda_{k_j}^* - \delta_j,$$

де

$$\delta_j = \frac{\Phi_1''(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}{\Phi_2'(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}\frac{2}{\beta\sqrt{k_j}}, \qquad \frac{\ln k_j}{\beta} - \frac{2}{\beta\sqrt{k_j}} \le \xi_j \le \frac{\ln k_j}{\beta}.$$

Покладемо, нарешті, $\sigma_j = \varphi_1(\lambda_{k_j}^*)$. Як було зауважено при доведенні теореми 2, $\Phi_2'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x) = o(\varphi_1(x))$, $x \to +\infty$. Тому функція $t\Psi_1(\varphi_1(t)) - \tau\Phi_2(\varphi_1(t))$ неспадна на $[t_0, +\infty)$ і

$$M(\sigma_j, F) \geq \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda_k^* \Psi_1(\varphi_1(\lambda_k^*)) + \tau\Phi_2(\varphi_1(\lambda_k^*)) + \sigma_j \lambda_k^*\} \geq$$

$$\geq (k_j - m_j + 1)\exp\{-\lambda_{k_j}^* \Psi_1(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) + \tau\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) + \sigma_j \lambda_{m_j}^*\} \geq$$

$$\geq \exp\left\{\frac{\beta}{2}\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) - \lambda_{k_j}^* \Psi_1(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) + \tau\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) + \right.$$

$$\left. + \varphi_1(\lambda_{k_j}^*)\lambda_{k_j}^* - \varphi_1(\lambda_{k_j}^*)\delta_j\right\} =$$

$$= \exp\left\{\Phi_1(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) + \left(\tau + \frac{\beta}{2}\right)\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) - \varphi_1(\lambda_{k_j}^*)\delta_j\right\}. \qquad (14)$$

Оскільки $\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) \geq \frac{1}{\beta}\ln(k_j - 1) = \xi_j + o(1)$, $j \to \infty$, то з огляду на умови $\ln\sigma = o(\Phi_2(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, і $\ln(\Phi_1''(\sigma)/\Phi_2'(\sigma)) = o(\Phi_2(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, маємо

$$\frac{\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)\delta_j}{\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*))} = \frac{\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)\Phi_1''(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}{\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*))\Phi_2'(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}\frac{2}{\beta}\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*))\right\} =$$

$$= o\left(\frac{\Phi_1''(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}{\Phi_2'(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\Phi_2(\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)) + \ln\varphi_1(\lambda_{k_j}^*)\right\}\right) \leq$$

$$\leq o\left(\frac{\Phi_1''(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}{\Phi_2'(\Phi_2^{-1}(\xi_1))}\exp\left\{-\frac{(1+o(1)\beta\xi_j)}{2}\right\}\right) \to 0, \quad j \to \infty.$$

Тому з (14) отримуємо

$$\ln M(\sigma_j, F) \geq \Phi_1(\sigma_j) + \left(\tau + \frac{\beta}{3}\right)\Phi_2(\varphi_1(\sigma_j))$$

для всіх досить великих j, тобто співвідношення (4) не виконується. Необхідність умови (5) доведено.

Доведемо тепер її *достатність*. Покладемо $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$, $\beta(\sigma) = \Phi_2(\varphi_1(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))))/\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$. Внаслідок умови $\Phi_1'(\sigma)/\Phi_2(\sigma) \nearrow +\infty$, з (5) випливає, що $\ln n(t) = o(t)$, $t \to +\infty$, і за лемою 1 маємо

$$M(\sigma, F) \leq \left(\sum_{\lambda_n \leq \gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)}\right)|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)}\exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\lambda_n)) - \sigma)\} \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)}\exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\gamma(\sigma))) - \sigma)\} =$$

$$= \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)}\exp\{-\lambda_n\beta(\sigma)\} \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \int_{\gamma(\sigma)}^{\infty}\exp\{-t\beta(\sigma)\}dn(t) \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \beta(\sigma)\int_{\gamma(\sigma)}^{\infty}n(t)\exp\{-t\beta(\sigma)\}dt \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \beta(\sigma) \int\limits_{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}^{\infty} \exp\{-t\beta(\sigma) + o(\Phi_2(\varphi_1(t))\}\,dt \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \beta(\sigma) \int\limits_{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\beta(\sigma) - \frac{\Phi_2(\varphi_1(t))}{2t}\right)\right\}dt \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \beta(\sigma) \int\limits_{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\beta(\sigma) - \frac{\Phi_2(\varphi_1(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))))}{2\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}\right)\right\}dt =$$

$$= \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \beta(\sigma) \int\limits_{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}^{\infty} \exp\{-t\beta(\sigma)/2\}\,dt =$$

$$= \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \frac{1}{2}\exp\{-\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))\beta(\sigma)/2\} \leq \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \frac{1}{2},$$

тобто, якщо виконується (3), то

$$\ln M(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma) + \ln n(\gamma(\sigma)) + o(1) \leq$$
$$\leq \Phi_1(\sigma) + (1 + o(1))\tau\Phi_2(\sigma) + \ln n(\gamma(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \to +\infty,$$

і, щоб отримати (4), нам залишилось показати, що $\ln n(\gamma(\sigma)) = o(\Phi_2(\sigma))$, $\sigma \to \to +\infty$.

Оскільки $\varphi_1' \in L^0$, то

$$\varphi_1(\Phi'(\sigma)) = \varphi_1(\Phi_1'(\sigma) + \varphi_1'(\Phi_1'(\sigma) + O(\Phi_2'(\sigma)))\tau\Phi_2'(\sigma) =$$

$$= \sigma + (1 + o(1))\tau\varphi_1'(\Phi_1'(\sigma))\Phi_2'(\sigma) = \sigma + (1 + o(1))\tau\frac{\Phi_2'(\sigma)}{\Phi_1''(\sigma)}, \quad \sigma \to +\infty,$$

і на підставі (2) $\Phi_2(\varphi_1(\Phi'(\sigma)) = O(\Phi_2(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$. Оскільки $\Phi'(\sigma) \sim \sim \Phi_1'(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, звідси випливає

$$\beta(\sigma) = \frac{\Phi_2(\varphi_1(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} \leq K_1\frac{\Phi_2(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi_1'(\Psi^{-1}(\sigma))}, \quad K_1 \equiv \text{const} > 0.$$

Тому для всіх досить великих σ

$$\Phi_2(\sigma + \beta(\sigma)) \leq \Phi_2\left(\Psi(\Psi^{-1}(\sigma) + K_1\frac{\Phi_2(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi_1'(\Psi^{-1}(\sigma))}\right) \leq$$

$$\leq \Phi_2\left(\Psi^{-1}(\sigma) - \frac{\Phi(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} + K_1\frac{\Phi_2(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi_1'(\Psi^{-1}(\sigma))}\right) \leq$$

$$\leq \Phi_2\left(\Psi^{-1}(\sigma) - (1 + o(1))\frac{\Phi_1(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi_1'(\Psi^{-1}(\sigma))} + K_1\frac{\Phi_2(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi_1'(\Psi^{-1}(\sigma))}\right) \leq \Phi_2(\Psi^{-1}(\sigma)).$$

З іншого боку, внаслідок (2) маємо

$$\frac{\Phi_2(x)}{\Phi_2(\Psi(x))} = \frac{\Phi_2(x)}{\Phi_2\left(x - \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)}\right)} = \frac{\Phi_2(x)}{\Phi_2\left(x - (1 + o(1))\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1'(x)}\right)} = O(1), \quad x \to +\infty.$$

Тому

$$\frac{\Phi_2(\sigma + \beta(\sigma))}{\Phi_2(\sigma)} \leq \frac{\Phi_2(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi_2(\sigma)} \leq K_2 \equiv \text{const}.$$

Нарешті, з (10) і (2) маємо

$$\frac{\Phi_2(\varphi_1(x))}{\Phi_2(\Psi(\varphi(x)))} = \frac{\Phi_2(\varphi_1(x))}{\Phi_2\left(\Psi_1(\varphi_1(x)) - (1+o(1))\tau\dfrac{\Phi_2(\varphi_1(x))}{x}\right)} =$$

$$= \frac{\Phi_2(\varphi_1(x))}{\Phi_2\left(\Psi_1(\varphi_1(x)) - \dfrac{\Phi_1(\varphi_1(x))}{x} - (1+o(1))\tau\dfrac{\Phi_2(\varphi_1(x))}{x}\right)} =$$

$$= \frac{\Phi_2(\varphi_1(x))}{\Phi_2\big(\Psi_1(\varphi_1(x)) - (1+o(1))\Phi_1(\varphi_1(x))\Phi_1'(x)\big)} \le K_3 \equiv \text{const}.$$

Використовуючи ці співвідношення, отримуємо

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{\Phi_2(\sigma)} \le \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln n(\Phi'(\Psi(\sigma+\beta(\sigma))))}{\Phi_2(\sigma+\beta(\sigma))}\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\Phi_2(\sigma+\beta(\sigma))}{\Phi_2(\sigma)} \le$$

$$\le K_2\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln n(x)}{\Phi_2(\Psi(\varphi(x)))} \le K_2\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln n(x)}{\Phi_2(\varphi_1(x))}\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\Phi_2(\varphi_1(x))}{\Phi_2(\Psi(\varphi(x)))} \le$$

$$\le K_2K_3\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln n(x)}{\Phi_2(\varphi_1(x))} = 0.$$

Отже, з (3) випливає (4), а з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma,f)\le M(\sigma,F)$ з (4) випливає (3). Теорему 1 повністю доведено.

3. Доповнення. Використовуючи достатність теореми 1 і нерівність Коші, легко довести справедливість наступного наслідку.

Наслідок. *Нехай $\Phi_1\in\Omega$, $\varphi_1'\in L^0$, функція Φ_2 підпорядкована функції Φ_1, $\Phi_1'(\sigma)/\Phi_2(\sigma)\nearrow+\infty$, і при $\sigma\to+\infty$ виконуються умови* (2). *Тоді для того щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda)$ співвідношення*

$$\ln\mu(\sigma,F) = \Phi_1(\sigma)+(1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma), \quad \sigma\to+\infty, \tag{15}$$

і

$$\ln M(\sigma,F) = \Phi_1(\sigma)+(1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma), \quad \sigma\to+\infty, \tag{16}$$

були еквівалентними, досить, щоб виконувалась умова (5).

Наступна теорема доповнює цей наслідок для випадку, коли функція Φ_2 зростає не швидше показникової функції.

Теорема 3. *Нехай $\Phi_1\in\Omega$, $\varphi_1'\in L^0$, функція Φ_2 підпорядкована функції Φ_1 і $\Phi_2(\sigma+O(1)) = O(\Phi_2(\sigma))$, $\sigma\to+\infty$. Якщо показники цілого ряду Діріхле* (1) *задовольняють умову* (5), *то співвідношення* (15) *і* (16) *є рівносильними.*

Доведення. Для всіх σ і $\lambda_n>2\lambda_{\nu(\sigma+1)}$ $(\nu(\sigma)=\nu(\sigma,F))$ маємо

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n} = |a_n|e^{(\sigma+1)\lambda_n}e^{-\lambda_n} \le \mu(\sigma+1,F)e^{-\lambda_n} =$$

$$= |a_{\nu(\sigma+1)}|e^{\sigma\lambda_{\nu(\sigma+1)}}e^{(\lambda_{\nu(\sigma+1)}-\lambda_n)} \le \mu(\sigma,F)e^{(\lambda_n/2-\lambda_n)} = \mu(\sigma,F)e^{-\lambda_n/2}$$

і, оскільки $\ln n(t)=o(t)$, $t\to+\infty$,

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)} \le \sum_{\lambda_n\le2\lambda_{\nu(\sigma+1)}}\frac{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}}{\mu(\sigma,F)} + \sum_{\lambda_n>2\lambda_{\nu(\sigma+1)}}\frac{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}}{\mu(\sigma,F)} \le$$

$$\le n(2\lambda_{\nu(\sigma+1)}) + \sum_{\lambda_n>2\lambda_{\nu(\sigma+1)}}e^{-\lambda_n/2} \le n(2\lambda_{\nu(\sigma+1)}) + \int_{2\lambda_{\nu(\sigma+1)}}^{\infty}e^{-t/2}dn(t) \le$$

$$\leq n(2\lambda_{\nu(\sigma+1)}) + \frac{1}{2}\int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+1)}}^{\infty} n(t)e^{-t/2}d(t) =$$

$$= n(2\lambda_{\nu(\sigma+1)}) + o(1), \quad \sigma \to +\infty. \tag{17}$$

Далі, використовуючи відому рівність

$$\ln \mu(\sigma, F) - \ln \mu(\sigma_0, F) = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)}\, dt, \quad \sigma_0 < \sigma,$$

отримуємо

$$\ln \frac{\mu(\sigma+2, F)}{\mu(\sigma+1, F)} = \int\limits_{\sigma+1}^{\sigma+2} \lambda_{\nu(t)}\, dt \geq \lambda_{\nu(\sigma+1)}. \tag{18}$$

Нарешті, завдяки нерівності Коші і співвідношенню $\ln n(t) = o(t)$, $t \to +\infty$, маємо [5, с. 184] $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma+1, F)$, $\sigma \geq \sigma_0$, і з (18) для всіх досить великих σ одержуємо

$$\ln \frac{M(\sigma+2, F)}{M(\sigma, F)} \geq \lambda_{\nu(\sigma+1)}. \tag{19}$$

Припустимо тепер, що виконується співвідношення (15). Тоді за нерівністю Коші $\ln M(\sigma, F) \geq \Phi_1(\sigma) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, і щоб отримати (16), нам залишилось довести протилежну нерівність. З (18) і (15) маємо

$$\lambda_{\nu(\sigma+1)} \leq \ln \frac{\mu(\sigma+2, F)}{\mu(\sigma+1, F)} \leq$$

$$\leq \Phi_1(\sigma+2) - \Phi_1(\sigma+1) + (1+o(1))\tau\{\Phi_2(\sigma+2) - \Phi_2(\sigma+1)\} \leq$$

$$\leq \Phi_1'(\sigma+2) + (1+o(1))\tau\Phi_2'(\xi) = (1+o(1))\Phi_1'(\sigma+2), \quad \sigma \to +\infty,$$

де $\sigma+1 \leq \xi \leq \sigma+2$. Тому з (17), завдяки (5) і (15), отримуємо

$$\ln M(\sigma, F) \leq \ln \mu(\sigma, F) + \ln n(2\lambda_{\nu(\sigma)+1}) + o(1) \leq$$

$$\leq \ln \mu(\sigma, F) + \ln n(3\Phi_1'(\sigma+2)) + o(1) \leq$$

$$\leq \Phi_1(\sigma) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma) + o(\Phi_2(\varphi_1(3\Phi_1'(\sigma+2)))) + o(1), \quad \sigma \to +\infty.$$

Оскільки $\Phi_2'(\varphi_1) \in L^0$ і $\varphi_1' \in L^0$, то $\Phi_2(\varphi_1) \in L^0$ і завдяки лемі 3 з останнього співвідношення дістаємо

$$\ln M(\sigma, F) \leq \Phi_1(\sigma) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma) + o(\Phi_2(\sigma+2)) + o(1), \quad \sigma \to +\infty,$$

тобто з огляду на умову $\Phi_2(\sigma + O(1)) = O(\Phi_2(\sigma))$ отримуємо потрібну нерівність $\ln M(\sigma, F) \leq \Phi_1(\sigma) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$.

Аналогічно, використовуючи нерівність (14), доводимо, що з (16) випливає (15). Теорему 3 доведено.

1. *Sheremeta M. M.* On the second term of asymptotic behaviour of entire Dirichlet series // J. Analysis. – 1995. – **3**. – P. 213–218.
2. *Шеремета М. Н., Федыняк С. И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 1. – С. 206–223.
3. *Шеремета М. М.* Про зростання цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1148–1152.
4. *Шеремета М. Н.* О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 2. – С. 283–296.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

Одержано 07.10.99