УДК 519.6

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА – САМОЙЛЕНКО ЗАДАЧИ ОБ ИНВАРИАНТНОМ ТОРЕ

Under assumption that a linear homogeneous system defined on the direct product of torus and Euclidean space is exponentially dichotomous on the semiaxes, we obtain a condition for the existence of the unique Green–Samoilenko function of problem of an invariant torus. We find the expression of this function in terms of projectors which determine the dichotomy on the semiaxes.

У припущенні, що лінійна однорідна система, яка визначена на прямому добутку тора та евклідового простору, є експоненціально-дихотомічною на півосях, отримано умову існування єдиної функції Гріна – Самойленка задачі про інваріантний тор та знайдено її вираз через проектори, що визначають дихотомію на півосях.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

заданную в прямом произведении m-мерного тора $\mathcal{T}_m$ и евклидового пространства R^n в предположении, что $a(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, $P(\varphi)$, $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$; $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$.

Известно [1], что задача о существовании и построении инвариантного тора $x = u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, системы (1) при произвольной $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ может быть решена с помощью функции Грина – Самойленко. Для единственности последней необходимо отсутствие вырожденных инвариантных торов однородной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x. \tag{2}$$

Это означает, что при любой $\varphi \in \mathcal{T}_m$ система

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x \tag{3}$$

экспоненциально-дихотомична (э-дихотомична) на всей оси $R = (-\infty, +\infty)$, т. е. что [1, 2] существует проектор $C(\varphi)$ $\left(C^2(\varphi) = C(\varphi)\right)$ и не зависящие от φ, τ константы $K \geq 1$, $\alpha > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} \left\| \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi) \right\| \leq K e^{-\alpha(t-\tau)}, \qquad t \geq \tau, \\ \left\| \Omega_0^t(\varphi)(I - C(\varphi)) \Omega_\tau^0(\varphi) \right\| \leq K e^{-\alpha(\tau - t)}, \qquad \tau \geq t, \end{gathered} \tag{4}$$

для любых $t, \tau \in R$; $\Omega_\tau^t(\varphi)$ $\left(\Omega_\tau^\tau(\varphi) = I_n\right)$ — $(n \times n)$-мерная фундаментальная матрица системы (3); $\varphi_t(\varphi)$— решение задачи Коши $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$.

Предположим, что система (3) э-дихотомична на полуосях R_- и R_+ с проекторами соответственно $C_-(\varphi)$ и $C_+(\varphi)$ $\left(C_\pm^2(\varphi) = C_\pm(\varphi)\right)$, удовлетворяющими условиям типа (4) на полуосях. Найдем условия, при которых система (3) будет э-дихотомичной на всей оси R; тем самым определим условия существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе системы (1), ее выражение через проекторы $C_-(\varphi)$ и $C_+(\varphi)$ и, в итоге, единственный инвариантный тор системы (1).

Основной результат. Непосредственной проверкой легко убедиться, что общее решение задачи

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)), \tag{5}$$

ограниченное на полуосях R_- и R_+, имеет вид

$$x(t,\varphi,\xi) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi)C_+(\varphi)\xi + \int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)C_+(\varphi_\tau(\varphi))f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau - \\ \qquad - \int_t^\infty \Omega_\tau^t(\varphi)(I - C_+(\varphi_\tau(\varphi)))f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau, & t \geq 0; \\ \Omega_0^t(\varphi)(I - C_-(\varphi))\xi + \int_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(\varphi)C_-(\varphi_\tau(\varphi))f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau - \\ \qquad - \int_t^0 \Omega_\tau^t(\varphi)(I - C_-(\varphi_\tau(\varphi)))f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau, & t \leq 0; \end{cases} \tag{6}$$

где

$$C_+(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^\tau(\varphi)C_+(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi), \qquad C_-(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^\tau(\varphi)C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi). \tag{7}$$

Решение (6) будет ограниченным на всей оси R, если векторная константа $\xi = \xi(\varphi) \in R^n$ удовлетворяет алгебраической системе, которая получается из (6) при $t = 0$:

$$[\,C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))\,]\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \int_0^\infty (I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau. \tag{8}$$

Предположим, что матрица $D(\varphi) = C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))$ неособенная; тогда система (8) однозначно разрешима относительно $\xi \in R^n$ при любой правой части:

$$\xi = D^{-1}(\varphi)\left\{ \int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \int_0^\infty (I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau \right\}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получаем [3], что при любой неоднородности $f(\varphi_\tau(\varphi)) \in C(\mathcal{T}_m)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, единственное ограниченное на R решение системы (4) имеет вид

$$x(t,\varphi) =$$
$$= \Omega_0^t(\varphi) \begin{cases} \int_0^t C_+(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau - \int_t^\infty (I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \\ \quad + C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)\left\{ \int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \right. \\ \quad \left. + \int_0^\infty (I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau \right\}, & t \geq 0; \\ \int_{-\infty}^t C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau - \int_t^0 (I - C_-(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \\ \quad + (I - C_-(\varphi))D^{-1}(\varphi)\left\{ \int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \right. \\ \quad \left. + \int_0^\infty (I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau \right\}, & t \leq 0; \end{cases} \tag{10}$$

Покажем, что выражение $x(0,\varphi)$, получаемое из (10) при $t=0$, определяет при любом $\varphi\in\mathcal{T}_m$ инвариантный тор системы (1). При $t=0+$ имеем

$$u_0(\varphi) = \int_0^\infty \left[C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)-I\right](I-C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \\ + \int_{-\infty}^0 C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau; \tag{11}$$

при $t=0-$

$$u_0(\varphi) = \int_0^\infty (I-C_-(\varphi))D^{-1}(\varphi)(I-C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau + \\ + \int_{-\infty}^0 \left[I+(I-C_-(\varphi))D^{-1}(\varphi)\right]C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau. \tag{12}$$

Учитывая, что $\left[C_+(\varphi)-(I-C_-(\varphi))\right]D^{-1}(\varphi)=I$, находим

$$C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi) = I+(I-C_-(\varphi))D^{-1}(\varphi),$$

$$C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)-I = (I-C_-(\varphi))D^{-1}(\varphi).$$

Поэтому выражения (11) и (12) совпадают. Перепишем (11) в виде

$$u_0(\varphi) = \int_{-\infty}^\infty G_0(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau, \tag{13}$$

где

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau\le 0; \\ \left[C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)-I\right](I-C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau>0. \end{cases} \tag{14}$$

Покажем, что

$$C(\varphi) = C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) = C^2(\varphi),$$
$$\left[C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)-I\right](I-C_+(\varphi)) = C(\varphi)-I, \tag{15}$$
$$C(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)\Omega_t^0(\varphi).$$

Действительно, учитывая соотношения

$$\Omega_\tau^t(\varphi_s(\varphi)) = \Omega_{\tau+s}^{t+s}(\varphi), \qquad \Omega_\tau^t(\varphi)\Omega_s^\tau(\varphi) = \Omega_s^t(\varphi), \qquad \varphi_\tau(\varphi_s(\varphi)) = \varphi_{\tau+s}(\varphi),$$

$$D(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi)D(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) \qquad \text{(в силу (7))},$$

$$D^{-1}(\varphi_t(\varphi)) = \left[\Omega_0^t(\varphi)D(\varphi)\Omega_t^0(\varphi)\right]^{-1} = \Omega_0^t(\varphi)D^{-1}(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) \qquad (\det D(\varphi)\neq 0),$$

легко убедиться в том, что

$$\left(C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi)\right)^2 = C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi)C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) = \\ = C_+(\varphi)\left[I+D^{-1}(\varphi)(I-C_+(\varphi))\right]C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) = \\ = C_+^2(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) = C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi),$$

$$\left[C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi) - I\right](I - C_+(\varphi)) = C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)(I - C_+(\varphi)) - (I - C_+(\varphi)) =$$

$$= C_+(\varphi)\left[D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) - I\right] - I + C_+(\varphi) = C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) - I = C(\varphi) - I.$$

Здесь использованы равенства

$$D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) = I + D^{-1}(\varphi)(I - C_+(\varphi)),$$

$$D^{-1}(\varphi)(I - C_+(\varphi)) = D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi) - I,$$

которые следуют из тождества $D^{-1}(\varphi)[C_-(\varphi) - (I - C_+(\varphi))] = I$. Последнее из свойств (15) доказывается с учетом (7):

$$C(\varphi_\tau(\varphi)) = C_+(\varphi_\tau(\varphi))D^{-1}(\varphi_\tau(\varphi))C_-(\varphi_\tau(\varphi)) =$$

$$= \Omega_0^\tau(\varphi)C_+(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)\Omega_0^\tau(\varphi)D^{-1}(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)\Omega_0^\tau(\varphi)C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) =$$

$$= \Omega_0^\tau(\varphi)C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) = \Omega_0^\tau(\varphi)C(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi).$$

Свойства (15), как известно [1], определяют единственную функцию Грина – Самойленко задачи (1) об инвариантном торе.

Теорема. *Пусть система* (3) *э-дихотомична на полуосях* R_- *и* R_+ *с проекторами* $C_-(\varphi)$ *и* $C_+(\varphi)$ *соответственно. Тогда если выполнено условие*

$$\det\{D(\varphi) = C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))\} \neq 0,$$

то:

а) *система* (3) *э-дихотомична на всей оси* R *с проектором*

$$C(\varphi) = C_+(\varphi)D^{-1}(\varphi)C_-(\varphi);$$

б) *задача* (1) *имеет единственную, удовлетворяющую свойствам* (15) *функцию Грина – Самойленко* (14), *с помощью которой инвариантный тор* $u_0(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, *системы* (1) *выражается в виде* (13).

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
2. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**. – P. 225 – 256.
3. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 1. – С. 3 – 10.

Получено 17.12.99