УДК 517.91

В. В. Слюсарчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

УМОВИ НЕСТІЙКОСТІ ІНВАРІАНТНОГО ТОРОЇДАЛЬНОГО МНОГОВИДУ ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We find conditions of instability of an invariant toroidal manifold of discrete dynamical system.

Знайдено умови нестійкості інваріантного тороїдального многовиду дискретної динамічної системи.

1. Постановка задачі. Нехай E — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_E$. Розглянемо різницеве рівняння

$$x(n+1) = X(x(n)), \qquad n \geq 0, \tag{1}$$

де $X: E \to E$ — C^r-відображення, $r \geq 2$, і многовид $\mathcal{M} \subset E$ класу C^r [1]. Будемо вважати, що:

1) многовид $\mathcal{M}$ інваріантний по відношенню до відображення X, тобто $Xa \in \mathcal{M}$ для всіх $a \in \mathcal{M}$;

2) многовид $\mathcal{M}$ C^r-дифеоморфний m-вимірному тору

$$\mathcal{T}_m = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{m \text{ разів}} \subset \mathbb{R}^{2m}$$

(S^1 — коло одиничного радіуса), тобто існує C^r-відображення $f: \mathcal{T}_m \to \mathcal{M}$, яке має обернене C^r-відображення $f^{-1}: \mathcal{M} \to \mathcal{T}_m$.

З цих обмежень випливає, що $\mathcal{M}$ є компактним m-вимірним многовидом.

За допомогою рівності

$$\operatorname{dist}(x_0, \mathcal{M}) = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x_0 - y\|_E$$

визначимо відстань від точки x_0 до $\mathcal{M}$.

Інваріантний многовид $\mathcal{M}$ динамічної системи (1) називається *асимптотично стійким* або *атрактором* (див., наприклад, [2, с. 206]), якщо він має такі властивості:

а) $\mathcal{M}$ *стійкий за Ляпуновим*, тобто для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\nu > 0$, що $\operatorname{dist}\left(X^n x_0, \mathcal{M}\right) < \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, якщо $\operatorname{dist}(x_0, \mathcal{M}) < \nu$;

б) якщо точка x_0 досить близька до $\mathcal{M}$, то

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{dist}\left(X^n x_0, \mathcal{M}\right) = 0.$$

Тут

$$X^n x_0 = \underbrace{X(X(\ldots X}_{n \text{ разів}}(x_0)\ldots)).$$

Інваріантний многовид $\mathcal{M}$ динамічної системи (1) називається *нестійким*, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для кожного числа $\nu > 0$ знайдуться точка $x_0 \in E$ і число $n \in \mathbb{N}$ такі, що справджуються нерівності $\operatorname{dist}(x_0, \mathcal{M}) < \nu$ і $\operatorname{dist}\left(X^n x_0, \mathcal{M}\right) \geq \varepsilon$.

В роботі [3] наведено умови, за яких інваріантний многовид $\mathcal{M}$ динамічної системи (1) є атрактором.

Мета даної статті — знаходження умов, при виконанні яких інваріантний многовид $\mathcal{M}$ динамічної системи (1) є нестійким. При цьому істотне значення матиме канонічне зображення різницевого рівняння (1) в околі многовиду $\mathcal{M}$.

2. Канонічне зображення рівняння (1). Нехай φ — довільна точка тора $\mathcal{T}_m$. Тоді $f(\varphi) \in \mathcal{M}$. Позначимо через $T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ дотичний простір до многовиду $\mathcal{M}$ в точці $f(\varphi)$. Можна уявити собі m-вимірну площину в E, яка найкращим чином апроксимує $\mathcal{M}$ поблизу $f(\varphi)$. Тоді, як і в [4, с. 182], $T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ — паралельна їй площина, яка проходить через точку 0. Аналогічно визначається $T(\mathcal{T}_m)_\varphi$. Відповідне відображення $df_\varphi\colon T(\mathcal{T}_m)_\varphi \to T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$, яке є похідною відображення $f\colon \mathcal{T}_m \to \mathcal{M}$ в точці φ [1], є лінійним C^{r-1}-відображенням. Оскільки відображення $f\colon \mathcal{T}_m \to \mathcal{M}$ є C^r-дифеоморфізмом, то відображення $df_\varphi\colon T(\mathcal{T}_m)_\varphi \to T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ має обернене відображення $(df_\varphi)^{-1}\colon T\mathcal{M}_{f(\varphi)} \to$ $\to T(\mathcal{T}_m)_\varphi$, яке, як і відображення df_φ, також є C^{r-1}-відображенням.

Завдяки скінченновимірності дотичного простору $T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ (простір $T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ є m-вимірним на підставі m-вимірності тора $\mathcal{T}_m$ та дифеоморфності $\mathcal{T}_m$ і $\mathcal{M}$ [1]) банахів простір E для кожного $\varphi \in \mathcal{T}_m$ можна подати у вигляді прямої суми $T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ та деякого підпростору E_φ [5]:

$$E = T\mathcal{M}_{f(\varphi)} \dotplus E_\varphi.$$

Позначимо через I одиничний оператор, що діє в просторі E, а через $P(\varphi)$ проектор на E_φ паралельно $T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ [6]. Тоді $I - P(\varphi)$ — проектор на $T\mathcal{M}_{f(\varphi)}$ паралельно E_φ.

Зауважимо, що вибір підпростору E_φ здійснюється неєдиним способом, тому будемо вважати, що справджується така вимога: *кожному $\varphi \in \mathcal{T}_m$ можна поставити у відповідність підпростір E_φ так, що проектор $P(\varphi)$ буде C^{r-1}-відображенням.*

Позначимо через $S_\varepsilon(y)$ відкриту кулю радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $y \in$ $\in E$, тобто множину $\{x \in E\colon \|x-y\|_E < \varepsilon\}$. Розглянемо множини

$$U_\varepsilon(\mathcal{M}) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in \mathcal{M}} S_\varepsilon(y),$$

$$V_\varepsilon(\mathcal{T}_m) \overset{\text{def}}{=} \left\{(\varphi, h)\colon \varphi \in \mathcal{T}_m,\ h \in E_\varphi,\ \|h\|_E < \varepsilon\right\}$$

і C^r-відображення

$$T \overset{\text{def}}{=} f^{-1} X f$$

таке, що T діє із $\mathcal{T}_m$ в $\mathcal{T}_m$. Легко перевірити, що

$$X(f(\varphi)) = f(T\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Аналогічно, як і в [7], при досить малому ε за допомогою відображень $\mathcal{S}\colon V_\varepsilon \to \mathcal{S}V_\varepsilon$ і $\mathcal{F}\colon V_\varepsilon \to \mathcal{F}V_\varepsilon$ ($\mathcal{F}V_\varepsilon \supset U_\mu(\mathcal{M})$ для деякого $\mu \in (0, \varepsilon)$), визначених на $V_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ відповідно рівностями

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi + V(\varphi, h)h, \\ \delta &= P(\varphi + V(\varphi, h)h)h, \end{aligned} \tag{2}$$

і

$$x = f(\varphi) + P(\varphi)h, \tag{3}$$

які є локальними C^{r-1}-дифеоморфізмами (в рівностях (2) $V(\varphi, h)$ є розв'язком операторного рівняння

$$\Omega Y(\varphi, h) = A(\varphi, h) + Y(T\varphi + A(\varphi, h)h, B(\varphi, h)h)B(\varphi, h),$$

в якому $\Omega: \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ — ортогональне відображення [8], звуження якого на тор $\mathcal{T}_m$ збігається з T, $A(\varphi, h)$ і $B(\varphi, h)$ — лінійні при фіксованих $(\varphi, h) \in \in V_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ обмежені відображення, що діють із E_φ відповідно в $\mathbb{R}^{2m}$ і $E_{T\varphi + A(\varphi, h)h}$, є C^{r-1}-відображеннями по відношенню до (φ, h) на $V_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ і задовольняють умови

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| A(\varphi, h) - (df)^{-1}_{T\varphi}(I - P(T\varphi))(dX)_{f(\varphi)} P(\varphi) \right\|_{L\left(E_\varphi, \mathbb{R}^{2m}\right)} = o(h),$$

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| B(\varphi, h) - P(T\varphi)(dX)_{f(\varphi)} P(\varphi) \right\|_{L\left(E_\varphi, E\right)} = o(h)$$

при $h \to 0$), встановлюється така теорема.

Теорема 1. *Для досить малого* $\varepsilon > 0$ *різницеве рівняння* (1) *за допомогою* (2) *та* (3) *в околі* $V_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ *подається у вигляді*

$$\begin{aligned} \psi(n+1) &= T\psi(n), \\ \delta(n+1) &= C(\psi(n), \delta(n))\delta(n), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де $C(\psi, \delta)$ — *лінійне неперервне відображення для кожних* $(\psi, \delta) \in V_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$, *що діє із* E_ψ *в* $E_{T\psi}$, *яке є* C^{r-1}-*відображенням по відношенню до змінних* $(\psi, \delta) \in V_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ *і задовольняє співвідношення*

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{(\psi, \delta) \in V_\rho(\mathcal{T}_m)} \left\| C(\psi, \delta) - P(T\psi)(dX)_{f(\psi)} P(\psi) \right\|_{L\left(E_\psi, E_{T\psi}\right)} = 0. \tag{5}$$

Зауважимо, що в роботі [7] тор $\mathcal{T}_m$ визначається як фактор-множина $\mathbb{R}^m / 2\pi\mathbb{Z}^m$ (неявно!), а відображення T — рівністю

$$T\varphi = \varphi + \omega, \tag{6}$$

де ω — довільний елемент простору $\mathbb{R}^m$. Тому перше рівняння системи (4) в [7] (див. також [9]) мало вигляд

$$\psi(n+1) = \psi(n) + \omega.$$

3. Теореми про нестійкість многовиду $\mathcal{M}$. Нехай E_1 і E_2 — банахові простори і $L(E_1, E_2)$ — банахів простір лінійних неперервних операторів $D: E_1 \to E_2$ з нормою

$$\| D \|_{L(E_1, E_2)} = \sup\left\{ \| Dx \|_{E_2} : \| x \|_{E_1} = 1 \right\}.$$

Нижньою нормою оператора $D \in L(E_1, E_2)$ називається число

$$\| D \|_{0,\, L(E_1,\, E_2)} = \inf\left\{ \| Dx \|_{E_2} : \| x \|_{E_1} = 1 \right\}.$$

Позначимо через $C_n(\psi)$ добуток операторів $P(T^n\psi)(dX)_{f(T^n\psi)}P(T^{n-1}\psi)$, $P(T^{n-1}\psi)(dX)_{f(T^{n-1}\psi)}P(T^{n-2}\psi)$, ... , $P(T\psi)(dX)_{f(\psi)}P(\psi)$, тобто оператор

$$P(T^n\psi)(dX)_{f(T^n\psi)}P(T^{n-1}\psi)(dX)_{f(T^{n-1}\psi)}P(T^{n-2}\psi)\ldots(dX)_{f(\psi)}P(\psi).$$

Тут враховано властивість проектора $P(\varphi)$:

$$P^2(\varphi) = P(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Теорема 2. *Нехай в системі* (4) *оператор* $C(\psi, h)$ *не залежить від* h, *тобто*

$$C(\psi, h) = P(T\psi)(dX)_{f(\psi)}P(\psi)$$

для всіх $h \in E_\psi$ *і* $\psi \in \mathcal{T}_m$, *і*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sup_{\psi\in\mathcal{T}_m} \| C_n(\psi) \|_{L\left(E_\psi,\, E_{T^n\psi}\right)} = \infty. \tag{7}$$

Тоді інваріантний многовид $\mathcal{M}$ *динамічної системи* (1) *нестійкий.*

Теорема 3. *Якщо*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \inf_{\psi\in\mathcal{T}_m} \| C_n(\psi) \|_{0,\, L\left(E_\psi,\, E_{T^n\psi}\right)} = \infty, \tag{8}$$

то інваріантний многовид $\mathcal{M}$ *динамічної системи* (1) *нестійкий.*

Зауважимо, що співвідношення (8) виконується, якщо, наприклад, відображення $C_1(\psi) : E_\psi \to E_{T\psi}$ має обернене неперервне відображення $C_1^{-1}(\psi)$ для кожного $\psi \in \mathcal{T}_m$ і для деякого $p \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\psi\in\mathcal{T}_m} \left\| C_1^{-1}(\psi) \right\|_{L\left(E_{T^p\psi},\, E_\psi\right)} < 1.$$

Випадок, коли відображення T визначається рівністю (6), розглянуто в [10].

4. Допоміжне твердження.

Лема. *Інваріантний многовид* $\mathcal{M}$ *динамічної системи* (1) *нестійкий тоді і тільки тоді, коли нестійкий інваріантний многовид* $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ *динамічної системи* (4).

Це твердження випливає з того, що відображення $\mathcal{F}$ і $\mathcal{S}$ є локальними C^{r-1}-дифеоморфізмами.

5. Доведення теореми 2. Зауважимо, що кожний розв'язок системи (4) подається у вигляді

$$\psi(n) = T^n\psi(0),$$

$$\delta(n) = C_n(\psi(0))\delta(0), \qquad n \in \mathbb{N},$$

де $(\psi(0), \delta(0)) \in \mathcal{T}_m \times E_{\psi(0)}$. Тому властивості інваріантного многовиду $\mathcal{T}_m \times \times \{0\}$ дискретної системи (4), зокрема, нестійкість цього многовиду та відповідно многовиду $\mathcal{M}$ залежать від властивостей $C_n(\psi)$. Розглянемо довільне як завгодно мале число $\nu > 0$. Згідно з (7) знайдуться такі число $n = n(\nu) \in \mathbb{N}$ і точка $\psi = \psi(\nu) \in \mathbb{N}$ тора $\mathcal{T}_m$, що

$$\left\| C_{n(\nu)}(\psi(\nu)) \right\|_{L\left(E_{\psi(\nu)},\, E_{T^{n}\psi(\nu)}\right)} \geq \frac{3}{\nu},$$

тобто

$$\left\| C_{n(\nu)}(\psi(\nu)) y_0 \right\|_{E_{T^{n(\nu)}\psi(\nu)}} \geq \frac{2}{\nu}$$

для деякого нормованого вектора $y_0 \in E_{\psi(\nu)}$. Звідси випливає, що для вектора $x_0 = (\nu/2) y_0 \in E_{\psi(\nu)}$, для якого, очевидно,

$$\| x_0 \|_{E_{\psi(\nu)}} = \frac{\nu}{2},$$

виконується нерівність

$$\left\| C_{n(\nu)}(\psi(\nu)) x_0 \right\|_{E_{T^{n(\nu)}\psi(\nu)}} \geq 1,$$

тобто з урахуванням довільності вибору числа ν інваріантний многовид $\mathcal{T}_m \times \times \{0\}$ дискретної динамічної системи (4) є нестійким. Тоді на підставі леми нестійким буде і інваріантний многовид $\mathcal{M}$ динамічної системи (1).

Теорему 2 доведено.

6. Доведення теореми 3. Позначимо через $C_n(\psi, \delta)$ відображення, яке для кожних фіксованих $(\psi, \delta) \in V_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ (ε — досить мале число) діє із E_ψ в $E_{T^n\psi}$ і визначається співвідношеннями

$$C_1(\psi, \delta) = C(\psi, \delta),$$
$$C_2(\psi, \delta) = C(T\psi, C_{(1)}(\psi, \delta)\delta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_n(\psi, \delta) = C(T^n\psi, C_{n-1}(\psi, \delta)\delta).$$

Із (8) випливає, що знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\inf_{\psi \in \mathcal{T}_m} \left\| C_{n_0}(\psi) \right\|_{0,\, L\left(E_\psi,\, E_{T^{n_0}\psi}\right)} > 1. \tag{9}$$

Оскільки на підставі (5)

$$\overline{\lim_{\mu \to 0}} \inf_{(\psi, \delta) \in V_\mu(\mathcal{T}_m)} \left\| C_{n_0}(\psi, \delta) - C_{n_0}(\psi) \right\|_{L\left(E_\psi,\, E_{T^{n_0}\psi}\right)} = 0,$$

то згідно з (9)

$$Q \overset{\text{def}}{=} \inf_{(\psi, \delta) \in V_\gamma(\mathcal{T}_m)} \left\| C_{n_0}(\psi, \delta) \right\|_{L\left(E_\psi,\, E_{T^{n_0}\psi}\right)} > 1 \tag{10}$$

для деякого додатного числа γ. Розглянемо довільні як завгодно мале число $\nu \in (0,\, Q^{-1}\gamma)$ і точку $(\psi, \delta(0)) \in V_\nu(\mathcal{T}_m) \setminus V_{\nu/2}(\mathcal{T}_m)$. Нехай p_0 — найменше натуральне число, для якого

$$\frac{\nu}{2} Q^{p_0} \in (Q^{-1}\gamma, \gamma).$$

Тоді на підставі (10)

$$\max_{k \in \{1, 2, \ldots, p_0\}} \left\| C_{kn_0}(\psi, \delta(0))\delta(0) \right\|_{E_{T^{kn_0}\psi}} \geq Q^{p_0} \|\delta(0)\|_{E_\psi} \geq Q^{p_0} \frac{\nu}{2} \geq Q^{-1}\gamma,$$

тобто для розв'язку

$$\psi(n) = T^n\psi,$$

$$\delta(n) = C_n(\psi(0), \delta(0))\delta(0), \qquad n \in \mathbb{N},$$

системи (4) виконуються співвідношення

$$\|\delta(0)\|_{E_\psi} \in [\nu/2, \nu]$$

і

$$\max_{k \in \{1, 2, \ldots, p_0 n_0\}} \|\delta(k)\|_{E_{T^k\psi}} \geq Q^{-1}\gamma.$$

Звідси та з довільності вибору числа ν випливає нестійкість інваріантного многовиду $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ динамічної системи (4). Тоді на підставі леми нестійким буде і інваріантний многовид $\mathcal{M}$ динамічної системи (1).

Теорему 3 доведено.

1. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 280 с.
2. *Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З.* Гладкие динамические системы // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1985. – **1**. – С. 151 – 242.
3. *Самойленко А. М., Слюсарчук В. В.* Дискретные динамические системы с инвариантным асимптотически устойчивым тороидальным многообразием // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 466 – 471.
4. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972. – 278 с.
5. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
6. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
7. *Самойленко А. М., Слюсарчук В. Е., Слюсарчук В. В.* Исследование нелинейного разностного уравнения в банаховом пространстве в окрестности квазипериодического решения // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 12. – С. 1661 – 1676.
8. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
9. *Самойленко А. М.* Исследование дискретной динамической системы в окрестности квазипериодической траектории // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 12. – С. 1702 – 1711.
10. *Самойленко А. М., Слюсарчук В. Е., Слюсарчук В. В.* Об одном операторном уравнении теории дискретных динамических систем // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 2. – С. 241 – 251.

У статті А. М. Самойленка „Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$" („Український математичний журнал", № 3, 2001 рік) допущено деякі редакційні описки.

Сторінка	Надруковано	Має бути
359		
ф-ла (2.7):	$\upsilon(t)$	$\upsilon(\tau)$
ф-ла (2.9):	$\upsilon(t)$	$\upsilon(\tau)$
360		
ф-ла (2.12):	$\beta_1(t)$	$\beta_1(\tau)$
ф-ла (2.13):	m	1