УДК 517.9

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА И ФУНКЦИИ ТОКА СТОКСА В ОБЛАСТЯХ МЕРИДИАННОЙ ПЛОСКОСТИ. I*

We obtain new integral representations for axially symmetric potential and the Stockes flow function in arbitrary simple-connected domain of the meridianal plane. For domains with the Jordan closed rectifiable boundary, we investigate boundary properties of these integral representations.

Одержано нові інтегральні зображення осесиметричного потенціалу та функції течії Стокса в довільній однозв'язній області меридіанної площини. Для областей із замкненою спрямлюваною жордановою межею досліджуються межові властивості цих інтегральних зображень.

Основными характеристиками пространственного потенциального соленоидального поля, симметричного относительно оси Ox, в его меридианной плоскости xOy являются потенциал $\varphi(x, y)$ и функция тока Стокса $\psi(x, y)$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$y\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}, \qquad y\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}. \tag{1}$$

Функция $\psi(x, y)$ должна также удовлетворять условию

$$\psi(x, 0) \equiv 0, \tag{2}$$

которое соответствует ее физической природе. Например, в модели течения идеальной жидкости условие (2) выражает отсутствие перетекания жидкости через ось Ox.

Из системы (1) при условии существования и непрерывности частных производных второго порядка функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ следуют уравнение для осесимметричного потенциала

$$y\Delta\varphi(x, y) + \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

и уравнение для функции тока Стокса

$$y\Delta\psi(x, y) - \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

где $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Количественная теория для решений системы (1) развита в значительно меньшей степени, чем для решений системы Коши – Римана [1, с. 18]. Поэтому разработка новых методов этой теории является актуальной проблемой.

В работе [2] построена бесконечномерная коммутативная банахова алгебра H над полем действительных чисел, в которой выделено двумерное подпространство μ такое, что компоненты полинома $P(\zeta)$ переменной $\zeta \in \mu$ порождают решения системы (1). Развивая идеи работы [2], авторы работ [3 – 5] изучили основные алгебраико-аналитические свойства моногенных функций, принимающих значения в комплексификации $H_{\mathbb{C}}$ алгебры H, и получили новые интегральные представления решений системы (1).

* Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда INTAS, грант № 99-00089.

Пусть D — область меридианной плоскости xOy, *правильная* в направлении оси Oy. Последнее означает, что область D вместе с каждой своей точкой (x, y) содержит также отрезок, соединяющий точки (x, y) и $(x, -y)$. Через D_z обозначим область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$. Аналогично обозначим через D_ζ область гиперкомплексной "плоскости" μ, конгруэнтную области D, при этом точка $\zeta \in D_\zeta$ имеет те же координаты, что и соответствующая ей точка $(x, y) \in D$.

В работе [5] получено в явном виде разложение по элементам базиса алгебры $H_{\mathbb{C}}$ главного продолжения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(t)(t-\zeta)^{-1}dt, \quad \zeta \in D_\zeta, \tag{5}$$

в область D_ζ функции F, аналитической в области D_z. Интегрирование в выражении (5) проводится по замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ такой, что $\gamma \subset D_z$ и область, ограниченная кривой γ, содержит спектр элемента ζ алгебры $H_{\mathbb{C}}$. При этом, как установлено в [3, 5], компоненты интеграла (5) порождают решения φ, ψ системы (1) в области D, которые выражаются формулами

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt & \text{при } y \neq 0; \\ F(x) & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt & \text{при } y \neq 0; \\ 0 & \text{при } y = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $z = x + iy$, $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ означает непрерывную ветвь аналитической функции $G(t) = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ с разрезом вдоль отрезка, который соединяет точки z и $\bar{z}$ и является спектром элемента ζ алгебры $H_{\mathbb{C}}$.

В данной работе показано, что, изменяя форму разреза для функции $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, можно получить решения системы (1) вида (6), (7) в произвольной односвязной области меридианной плоскости xOy, симметричной относительно оси Ox (т. е. область не обязана быть правильной в направлении оси Oy).

Кроме того, исследуются граничные свойства интегральных представлений осесимметричного потенциала $\varphi(x, y)$ и функции тока Стокса $\psi(x, y)$ в областях меридианной плоскости.

1. Интегральные представления осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. Пусть D — область меридианной плоскости xOy, симметричная относительно оси Ox. Область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$, будем обозначать D_z. Замыкания областей D и D_z обозначим соответственно через $\overline{D}$ и $\overline{D_z}$, а их границы — через ∂D и ∂D_z. Положительным направлением обхода границы ∂D_z будем считать такое направление, при котором область D_z остается слева.

Условимся, что всюду в дальнейшем область D_z является односвязной.

Зададим в области D_z гомотопическое семейство $\{\Gamma_{z\bar z}\}$ жордановых спрямляемых кривых, каждая кривая $\Gamma_{z\bar z}$ которого симметрична относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и соединяет точки z и $\bar z$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$. Как известно, гомотопность двух кривых означает возможность непрерывно деформировать их друг в друга внутри области D_z.

В случае, если граница ∂D_z имеет непустое пересечение с вещественной прямой, обозначим $b_1 := \min_{z\in\partial D_z \cap \mathbb{R}} \operatorname{Re} z$ и $b_2 := \max_{z\in\partial D_z \cap \mathbb{R}} \operatorname{Re} z$. Если при этом область D_z не ограничена, а ее граница ∂D_z — ограничена, то условимся также, что все кривые $\Gamma_{z\bar z}$ пересекают вещественную прямую на интервале $(-\infty, b_1)$.

Если $z \in D_z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}$ понимаем как непрерывную ветвь аналитической функции $G(t) = \sqrt{(t-z)(t-\bar z)}$ с разрезом вдоль кривой $\Gamma_{z\bar z}$ такую, что $G(t) > 0$, при всех $t \in \mathbb{R}:\ t > \max_{z\in\Gamma_{z\bar z}} \operatorname{Re} z$.

Интегралы по локально спрямляемой кривой γ, $\gamma \subset \mathbb{C}$, понимаются в смысле главного значения. Например,

$$\int\limits_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt \ := \lim_{N\to\infty,\,\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{t\in\gamma:\,|t|\le N,\,|t-z|\ge\varepsilon\}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \gamma,$$

при условии, что предел в правой части равенства существует.

Обозначим через $L_p(\gamma)$ банахово пространство суммируемых в степени p функций $f:\ \gamma \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int\limits_\gamma |f(t)|^p\,|dt|\right)^{1/p},$$

а через $L_\infty(\gamma)$ банахово пространство существенно ограниченных функций $f:\ \gamma \to \mathbb{C}$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in\gamma} |f(t)|$.

Рассмотрим сначала область D с жордановой локально спрямляемой границей. Справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1 в [3].

Теорема 1. *Пусть область D (как ограниченная, так и неограниченная) имеет жорданову локально спрямляемую границу ∂D и $f \in L_1(\partial D_z)$. Тогда пара функций*

$$\varphi(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}}\,dt & \text{при } y \neq 0; \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{t-x}\,dt & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом} \\ b_1 < x < b_2 \text{ или } x < b_1 < b_2, \text{ а также} \\ \text{в случае неограниченной границы } \partial D_z;\end{array} \\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{t-x}\,dt & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом} \\ b_1 < b_2 < x,\end{array} \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} f(t)\left(1 - \dfrac{t-x}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}}\right) dt & \text{при } y \neq 0; \\ 0 & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом} \\ b_1 < x < b_2 \text{ или } x < b_1 < b_2, \text{ а также} \\ \text{в случае неограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z;\end{array} \\ \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} f(t)\, dt & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом} \\ b_1 < b_2 < x,\end{array} \end{cases} \tag{9}$$

является решением системы (1) *в области* D. *Кроме того, функции* (8), (9) *являются соответственно решениями уравнений* (3), (4) *в области* D.

В следующей теореме ослабляется условие $f \in L_1(\partial D_z)$ теоремы 1 в случае, когда граница ∂D является неограниченной кривой.

Теорема 2. *Пусть граница* ∂D *области* D *является неограниченной жордановой локально спрямляемой кривой. Если функция* $f : \partial D_z \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{\partial D_z} \frac{|f(t)|}{|t-a|^2} |dt| < \infty, \tag{10}$$

где a *— некоторая точка, не принадлежащая границе* ∂D_z, *то функция* (9) *является решением уравнения* (4) *в области* D. *Если же вместо условия* (10) *выполняется условие*

$$\int_{\partial D_z} \frac{|f(t)|}{|t-a|} |dt| < \infty,$$

то пара функций (8), (9) *является решением системы* (1) *при* $(x, y) \in D$.

Теорема 2 доказывается по аналогии с теоремами 2 и 3 из работы [3].

В случае области D, граница которой может быть как спрямляемой кривой, так и локально неспрямляемой, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Каждой голоморфной в области* D_z *функции* F *соответствует пара* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *решений системы* (1) *в области* D:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} & \text{при } y \neq 0; \\ F(x) & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом} \\ b_1 < x < b_2 \text{ или } x < b_1 < b_2, \text{ а также} \\ \text{в случае неограниченной границы } \partial D_z;\end{array} \\ -F(x) & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом } b_1 < b_2 < x,\end{array} \end{cases} \tag{11}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} dt & \text{при } y \neq 0; \\ 0 & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где $(x, y) \in D$, $z = x + iy$, γ — *произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая ограничивает область* D'_z *такую, что* $\Gamma_{z\bar{z}} \subset D'_z$ *и* $\overline{D'_z} \subset D_z$. *При этом функции* (11), (12) *являются соответственно решениями уравнений* (3), (4) *в области* D.

Доказательство. Пусть

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \min_{t \in \partial D_z, \xi \in \Gamma_{z\bar{z}}} |t - \xi|.$$

В силу компактности кривой $\Gamma_{z\bar{z}}$ существует ее покрытие конечным числом открытых кругов $B_\varepsilon(z_j)$ радиуса ε с центрами в точках $z_j \in \Gamma_{z\bar{z}}$. Заметим, что в качестве кривой γ можно взять, по крайней мере, границу области, являющейся объединением указанных кругов $B_\varepsilon(z_j)$. Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 1.

Отметим, что формулами (11), (12) выражаются, по существу, все решения уравнений (3), (4) в области D. Для областей специального вида (правильных в направлении оси Oy или являющихся дополнением к замыканию таковых) это доказано в [3, 4]. Доказательство этого факта в случае произвольной односвязной области D автор предполагает изложить в последующих работах.

Очевидно, что если D_z — ограниченная область со спрямляемой границей, а функция F в области D_z принадлежит классу Смирнова E_1 [6, с. 205], то равенства (11), (12) при любом $(x, y) \in D$ преобразуются к виду

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}} dt & \text{при } y \neq 0; \\ F(x) & \text{при } y = 0, \end{cases}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)(t - x)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}} dt & \text{при } y \neq 0; \\ 0 & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $z = x + iy$, $F(t)$ — угловые граничные значения функции F, которые, как известно [6, с. 205], существуют почти во всех точках $t \in \partial D_z$.

Если же D_z — неограниченная область с локально спрямляемой жордановой границей и функция F в области D_z принадлежит классу Смирнова E_1, то при $(x, y) \in D$ и при условии

$$\lim_{z \to \infty,\, z \in D_z} F(z) = 0$$

равенство (11) приводится к виду

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}} dt & \text{при } y \neq 0; \\ F(x) & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом} \\ b_1 < x < b_2 \text{ или } x < b_1 < b_2, \text{ а также} \\ \text{в случае неограниченной границы } \partial D_z; \end{array} \\ -F(x) & \begin{array}{l}\text{при } y = 0 \text{ в случае ограниченной} \\ \text{границы } \partial D_z, \text{ если при этом } b_1 < b_2 < x, \end{array} \end{cases}$$

а равенство (12) будет иметь вид (13) при условии

$$\lim_{z\to\infty,\, z\in D_z} zF(z) = 0.$$

2. Граничные свойства осесимметричного потенциала в областях с ограниченной границей. Рассмотрим теперь в качестве области D_z области с замкнутой жордановой спрямляемой границей.

Из двух дуг замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ, соединяющих точки $z_1, z_2 \in \gamma$, через $\gamma_{z_1 z_2}$ обозначим дугу не большей длины. Обозначим через $l(z_1, z_2)$ длину дуги $\gamma_{z_1 z_2}$, а через $d(z_1, z_2) := \sup_{t, z\in\gamma_{z_1z_2}} |t-z|$ диаметр этой дуги.

Широко распространенной метрической характеристикой жордановой спрямляемой кривой γ является $\theta(\varepsilon) := \sup_{z\in\gamma}\theta_z(\varepsilon)$, где $\theta_z(\varepsilon) := \mathrm{mes}\,\{t \in \gamma\colon |t-z| \le \varepsilon\}$, а mes обозначает линейную меру Лебега на кривой γ (см., например, [7, 8]). Введем в рассмотрение модуль непрерывности

$$\omega(f, E, \varepsilon) := \sup_{t_1, t_2 \in E, |t_1-t_2|\le\varepsilon} |f(t_1) - f(t_2)|$$

функции f на множестве $E \subset \gamma$, а также локальный центрированный (относительно точки $\xi \in \gamma$) модуль непрерывности

$$\omega_\xi(f, E, \varepsilon) := \sup_{t\in E, |t-\xi|\le\varepsilon} |f(t) - f(\xi)|.$$

Рассмотрим теперь замкнутую жорданову спрямляемую кривую γ, симметричную относительно вещественной прямой. При этом через D_z^+ обозначим ограниченную область, а через D_z^- — неограниченную область, общей границей которых является кривая γ. Заметим, что в соответствии с принятым выше соглашением границы ∂D_z^+ и ∂D_z^- имеют противоположную ориентацию.

Чтобы описать граничные свойства осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях D_z^+ и D_z^-, определим $\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ при $z\in\gamma$, $\mathrm{Im}\, z \ne 0$. В этом случае рассмотрим разрез плоскости $\mathbb{C}$ вдоль разомкнутой кривой $\Gamma_{z\overline{z}}^\gamma$ с концами z и $\overline{z}$ такой, что $\Gamma_{z\overline{z}}^\gamma \subset \gamma$ и $b_1 \in \Gamma_{z\overline{z}}^\gamma$. Теперь $\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ будем понимать как непрерывную ветвь аналитической функции $G(t) = \sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ с разрезом вдоль кривой $\Gamma_{z\overline{z}}^\gamma$ такую, что $G(t) > 0$ при всех $t\in\mathbb{R}: t > \max_{z\in\Gamma_{z\overline{z}}^\gamma} \mathrm{Re}\, z$. Введем также обозначение

$$\left(\sqrt{(\tau-z)(\tau-\overline{z})}\right)^{\pm} := \lim_{t\to\tau,\, t\in D_z^{\pm}} \sqrt{(t-z)(t-\overline{z})} \quad \text{при} \quad \tau\in\gamma\setminus\{z, \overline{z}\}.$$

В следующей теореме приведены достаточные условия непрерывной продолжимости функции

$$f_{\mathrm{pot}}^{\pm}(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z^{\pm}} \dfrac{f(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt & \text{при } z\in D_z^{\pm},\ \mathrm{Im}\, z\ne 0; \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z^{\pm}} \dfrac{f(t)}{t-z}\,dt & \text{при } \mathrm{Im}\, z = 0 \text{ в случае } \\ & b_1 < z < b_2 \text{ или } z < b_1 < b_2, \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z^{-}} \dfrac{f(t)}{t-z}\,dt & \text{при } \mathrm{Im}\, z = 0 \text{ в случае } b_1 < b_2 < z \end{cases}$$

из области $D_z^{\pm}$ на границу $\partial D_z^{\pm}$.

Теорема 4. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая симметрична относительно вещественной прямой и такая, что* $\theta(\varepsilon) =$

$= O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. *Если* $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p \le \infty$, *то функция* $f^{\pm}_{\text{pot}}$ *непрерывно продолжается из области* $D^{\pm}_z$ *в точки множества* $\partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1; b_2\}$ *и ее граничные значения при* $z \in \partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1; b_2\}$ *выражаются формулой*

$$f^{\pm}_{\text{pot}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D^{\pm}_z} \frac{f(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\mp}} dt. \tag{14}$$

При этом для каждой точки $z_0 \in \partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1; b_2\}$ *и любой точки* $z_1 \in \partial D^{\pm}_z$, *для которой* $|z_1 - z_0| \le \frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|$, *имеет место неравенство*

$$\left| f^{\pm}_{\text{pot}}(z_1) - f^{\pm}_{\text{pot}}(z_0) \right| \le c \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}} \Omega(z_0, z_1), \tag{15}$$

где $\Omega(z_0, z_1) = \left(d(z_0, z_1)\right)^{(p-2)/2p}$ *при* $2 < p < \infty$ *и*

$$\Omega(z_0, z_1) = \sqrt{d(z_0, z_1)} + \sqrt{|z_1 - z_0|} \ln \frac{1}{|z_1 - z_0|}$$

при $p = \infty$, *а постоянная* c *зависит только от кривой* γ.

Если, кроме того, функция f *в точке* b_j, *где* $j = 1$ *или* $j = 2$, *имеет предел* $\lim_{t \to b_j, t \in E_f} f(t) =: f(b_j)$ *по некоторому множеству* $E_f \subset \gamma$ *такому, что линейная мера Лебега разности* $\gamma \setminus E_f$ *равна нулю, существует сингулярный интеграл* $\int\limits_{\gamma} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j} dt$, *а также выполняется асимптотическое соотношение*

$$\int\limits_{|\operatorname{Im} z|}^{d(z, b_j)} \frac{\omega_z(f, E_f, \tau)}{\tau} d\tau \to 0, \quad z \to b_j, \; z \in E_f, \tag{16}$$

то функция $f^{\pm}_{\text{pot}}$ *непрерывно продолжается из области* $D^{\pm}_z$ *также в точку* b_j *и при этом*

$$\lim_{z \to b_j, z \in \partial D^{+}_z} f^{+}_{\text{pot}}(z) = f(b_j) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D^{+}_z} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j} dt, \tag{17}$$

$$\lim_{z \to b_j, z \in \partial D^{-}_z} f^{-}_{\text{pot}}(z) = \frac{(-1)^{j-1}}{2\pi i} \int\limits_{\partial D^{-}_z} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j} dt. \tag{18}$$

Поясним здесь, что в равенстве (14) в подынтегральном выражении при $t \in \gamma_{z\bar{z}}$ предельные значения $\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\mp}$ совпадают со значениями функции $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ на правом относительно положительного направления обхода границы $\partial D^{\pm}_z$ краю разреза. Отметим также, что интеграл в соотношении (16) понимается как верхний интеграл Дарбу.

***Доказательство теоремы* 4.** Если $f \in L_{\infty}(\gamma)$, то очевидно, что значения функции, определяемой равенством (14), конечны во всех точках $z \in \partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1; b_2\}$.

Пусть теперь $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p < \infty$, и $z \in \partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1; b_2\}$. Обозначим $q := \frac{p}{p-1}$, $\gamma_+ := \{t \in \gamma \colon \operatorname{Im} t > 0\}$ и $\gamma_- := \{t \in \gamma \colon \operatorname{Im} t < 0\}$. Тогда с учетом неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{\partial D_z^{\pm}} \left| \frac{f(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^{\mp}} \right| |dt| \leq \left(\int\limits_{\partial D_z^{\pm}} |f(t)|^p |dt| \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\partial D_z^{\pm}} \frac{|dt|}{\left| \left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^{\mp} \right|^q} \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \|f\|_{L_p} \left(\int\limits_{\gamma_+} \frac{|dt|}{\sqrt{|t-z|^q |t-\overline{z}|^q}} + \int\limits_{\gamma_-} \frac{|dt|}{\sqrt{|t-z|^q |t-\overline{z}|^q}} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{19}$$

Поскольку одна из точек z и $\overline{z}$ принадлежит множеству γ_+, а вторая — множеству γ_-, то, не ограничивая общности, считаем, что $z \in \gamma_+$. Тогда с учетом леммы 1 работы [7] получаем оценку интеграла по множеству γ_+:

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{|dt|}{\sqrt{|t-z|^q |t-\overline{z}|^q}} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_{\gamma_+} \frac{|dt|}{|t-z|^{q/2}} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_0^d \frac{d\theta_z(\tau)}{\tau^{q/2}}, \tag{20}$$

в которой $d := \max_{t,\, z \in \gamma} |t-z|$, а интеграл по мере $\theta_z(\tau)$ понимается как несобственный интеграл Римана – Стильтьеса. Аналогичная оценка имеет место и для интеграла по множеству γ_-.

Теперь оценим несобственный интеграл Римана – Стильтьеса с учетом предложения 1 работы [9] (см. также доказательство теоремы 1 в [10]) так, что будем иметь

$$\frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_0^d \frac{d\theta_z(\tau)}{\tau^{q/2}} \leq \frac{1}{2(2^{q/2}-1)|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_0^d \frac{\theta_z(2\tau)}{\tau} \frac{d\tau}{\tau^{q/2}}. \tag{21}$$

Здесь интеграл в правой части неравенства существует, по крайней мере, как несобственный верхний интеграл Дарбу.

Из полученных оценок и условия $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, очевидным образом следует, что при $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p < \infty$, значения функции, определяемой равенством (14), конечны во всех точках $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$.

Для доказательства непрерывной продолжимости функции $f_{\mathrm{pot}}^{\pm}$ в точки множества $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ рассмотрим точку $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1; b_2\}$ и точку $z_1 \in$ $\in D_z^{\pm}$ такую, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \leq \frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|$. Обозначим через z_2 одну из ближайших к точке z_1 точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma_1 := \left\{ t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \leq 2\varepsilon \right\} \cup \gamma_{z_0 z_2}, \qquad \overline{\Gamma}_1 := \{\overline{t} : t \in \Gamma_1\},$$

$$\Gamma_2 := \left\{ t \in \partial D_z^{\pm} : 2\varepsilon < |t - z_0| \leq |\operatorname{Im} z_0| \right\} \setminus \gamma_{z_0 z_2}, \qquad \overline{\Gamma}_2 := \{\overline{t} : t \in \Gamma_2\},$$

$$\Gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus \left(\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma}_2\right)$$

и рассмотрим разность

$$f_{\mathrm{pot}}^{\pm}(z_1) - f_{\mathrm{pot}}^{\pm}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}} dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overline{\Gamma}_1} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}} dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overline{\Gamma}_1} \frac{f(t)}{\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(t)\left(\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\right)^{\mp} - \sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\right)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\right)^{\mp}} dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(t)\Big(\big(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\,\big)^{\mp}-\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\Big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\,\big(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\,\big)^{\mp}}\,dt\,+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3}\frac{f(t)\Big(\big(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\,\big)^{\mp}-\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\Big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\overline{z}_1)}\,\big(\sqrt{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\,\big)^{\mp}}\,dt. \qquad (22)$$

Далее непрерывная продолжимость функции $f_{\text{pot}}^{\pm}$ в точки множества $\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1;b_2\}$ и равенство (14) для ее граничных значений, а также неравенство (15) устанавливаются аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1 [11]. При этом используются оценки вида (19)–(21) так, что соответствующие интегралы оцениваются сверху сначала интегралами Римана–Стильтьеса по аналогии с полученной оценкой (20), а затем аналогично оценке (21) — верхними интегралами Дарбу.

Перейдем теперь к доказательству равенства (17) (заметим, что равенство (18) доказывается аналогично).

Рассмотрим точку $z\in D_z^{+}$ такую, что $\operatorname{Im} z\neq 0$ и $\delta:=\left|z-b_j\right|<(b_2-b_1)/10$. Обозначим $\rho:=\min_{t\in\gamma}|t-z|$ и зафиксируем произвольную точку $\xi\in E_f$, удовлетворяющую неравенству $|\xi-z|\le 5\rho/4$. Обозначим также $\gamma_{6\delta}(b_j):=$ $:=\left\{t\in\partial D_z^{+}:\left|t-b_j\right|\le 6\delta\right\}$ и рассмотрим разность

$$f_{\text{pot}}^{+}(z)-f(b_j)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^{+}}\frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt\;=\;f(\xi)-f(b_j)\,+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^{+}}\frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^{+}}\frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt\;=$$

$$=\;f(\xi)-f(b_j)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{6\delta}(b_j)}\frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt\,-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{6\delta}(b_j)}\frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^{+}\setminus\gamma_{6\delta}(b_j)}\frac{f(\xi)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt\,+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma_{\xi b_j}\cup\gamma_{\overline{\xi} b_j})\setminus\gamma_{6\delta}(b_j)}\frac{\big(f(t)-f(\xi)\big)\Big(t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\Big)}{(t-b_j)\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt\,+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^{+}\setminus(\gamma_{6\delta}(b_j)\cup\gamma_{\xi b_j}\cup\gamma_{\overline{\xi} b_j})}\frac{\big(f(t)-f(\xi)\big)\Big(t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\Big)}{(t-b_j)\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt\;=:$$

$$=:\;f(\xi)-f(b_j)+I_1-I_2-I_3+I_4+I_5. \qquad (23)$$

Для интеграла I_3 в силу теоремы 1 [12] справедлива оценка

$$|I_3|\le\left|f(\xi)-f(b_j)\right|.$$

При оценке модуля интеграла I_5 используются двойные неравенства

$$\frac{5}{6}\left|t-b_j\right|\le|t-z|\le\frac{7}{6}\left|t-b_j\right|$$

и

$$\frac{5}{6}\left|t-b_j\right| \le |t-\bar{z}| \le \frac{7}{6}\left|t-b_j\right|,$$

а также неравенство

$$\left|t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right| \le c\sqrt{\delta\left(|t-z|+\left|t-b_j\right|\right)},$$

которые выполняются при всех $t \in \partial D_z^+ \setminus \left(\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right)$ (c — некоторая абсолютная постоянная). С учетом этих неравенств по аналогии с оценками (20), (21) получаем

$$|I_5| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D_z^+ \setminus \left(\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right)} \frac{|f(t)-f(\xi)|\left|t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right|}{\left|t-b_j\right|\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}|dt| \le$$

$$\le c \int\limits_{E_f \setminus \left(\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right)} \frac{|f(t)-f(\xi)|\sqrt{\delta\left(\frac{7}{6}\left|t-b_j\right|+\left|t-b_j\right|\right)}}{\left|t-b_j\right|\sqrt{\frac{5}{6}\left|t-b_j\right|\frac{5}{6}\left|t-b_j\right|}}|dt| \le$$

$$\le c\sqrt{\delta} \int\limits_{E_f \setminus \left(\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right)} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\left|t-b_j\right|^{3/2}}|dt| \le c\sqrt{\delta}\int\limits_{6\delta}^{d} \frac{\omega_{b_j}(f, E_f, \tau)}{\tau^{3/2}}\, d\theta_{b_j}(\tau) \le$$

$$\le c\sqrt{\delta}\int\limits_{6\delta}^{2d} \frac{\omega_{b_j}(f, E_f, \tau)}{\tau^{3/2}}\, d\tau.$$

Здесь и далее в доказательстве через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от δ и z, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Если $\left(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j) = \varnothing$, то $I_4 = 0$. В случае, когда $\left(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j) \ne \varnothing$, при оценке модуля интеграла I_4 используются двойные неравенства

$$\frac{4}{5}|t-\xi| \le |t-z| \le \frac{4}{3}|t-\xi|, \quad \frac{4}{5}|t-\xi| \le |t-\bar{z}| \le \frac{4}{3}|t-\xi|$$

и

$$\frac{8}{11}|t-\xi| \le \left|t-b_j\right| \le \frac{8}{5}|t-\xi|,$$

которые выполняются при всех $t \in \partial D_z^+ \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)$. С учетом этих неравенств по аналогии с оценками (20), (21) получаем

$$|I_4| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\left(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{|f(t)-f(\xi)|\left(\left|t-b_j\right|+\left|\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right|\right)}{\left|t-b_j\right|\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}|dt| \le$$

$$\le c \int\limits_{E_f \cap \left(\left(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}\right) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)\right)} \frac{|f(t)-f(\xi)|\left(\frac{8}{5}|t-\xi|+\sqrt{\frac{4}{3}|t-\xi|\frac{4}{3}|t-\xi|}\right)}{\frac{8}{11}|t-\xi|\sqrt{\frac{4}{5}|t-\xi|\frac{4}{5}|t-\xi|}}|dt| \le$$

$$\leq c \int\limits_{E_f \cap \left((\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\overline{\xi} b_j}) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)\right)} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{|t-\xi|}|dt| \leq$$

$$\leq c \int\limits_{3\delta}^{3\delta+d(\xi, b_j)} \frac{\omega_\xi(f, E_f, \tau)}{\tau} d\theta_{b_j}(\tau) \leq$$

$$\leq c \int\limits_{3\delta}^{6\delta+2d(\xi, b_j)} \frac{\omega_\xi(f, E_f, \tau)}{\tau} d\tau.$$

Оценим теперь модуль интеграла I_4. Если $\rho \geq \delta/4$, то

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\overline{z}|}}|dt| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E_f \cap \gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{\frac{\delta}{4}\frac{\delta}{4}}}|dt| \leq$$

$$\leq \frac{4\theta_{b_j}(6\delta)}{\pi\delta}\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta) \leq c\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta).$$

В случае, когда $\frac{1}{6}|\operatorname{Im}\xi| \leq \rho < \delta/4$, введем в рассмотрение множества $\gamma_1 :=$ $:= \{t \in \partial D_z^+ : |t-\xi| \leq 18\rho, \operatorname{Im} t \operatorname{Im}\xi > 0\}$, $\overline{\gamma}_1 := \{\overline{t} : t \in \gamma_1\}$, $\gamma_2 :=$ $:= \gamma_{6\delta}(b_j) \setminus (\gamma_1 \cup \overline{\gamma}_1)$ и представим I_1 суммой трех интегралов:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\gamma}_1} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}dt =: I_1' + I_1'' + I_1'''.$$

Оценивая $|I_1'|$ и учитывая при этом неравенство $|t-b_j| < 6\delta$ для всех $t \in \gamma_1$, получаем

$$|I_1'| \leq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\overline{z}|}}|dt| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E_f \cap \gamma_1} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{\rho\rho}}|dt| \leq$$

$$\leq \frac{\theta_\xi(18\rho)}{\pi\rho}\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta) \leq c\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta).$$

Такая же оценка имеет место и для интеграла I_1''.

Учитывая, что при $t \in \gamma_2$ имеют место неравенства $|t-z| \geq \frac{67}{72}|t-\xi|$ и $|t-\overline{z}| \geq \frac{1}{8}|t-\xi|$, оценим модуль интеграла I_1''' по аналогии с оценками (20), (21):

$$|I_1'''| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\overline{z}|}}|dt| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E_f \cap \gamma_2} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{\frac{67}{72}|t-\xi|\frac{1}{8}|t-\xi|}}|dt| \leq$$

$$\leq \frac{12}{\pi\sqrt{67}} \int\limits_{18\rho}^{10|\xi-b_j|} \frac{\omega_\xi(f, E_f \cap \gamma_2, \tau)}{\tau} d\theta_\xi(\tau) \leq c \int\limits_{18\rho}^{20|\xi-b_j|} \frac{\omega_\xi(f, E_f \cap \gamma_2, \tau)}{\tau} d\tau \leq$$

$$\leq c\left(\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta) + \int\limits_{|\mathrm{Im}\,\xi|}^{|\xi - b_j|} \frac{\omega_\xi(f, E_f, \tau)}{\tau}\, d\tau\right).$$

Наконец, в случае, когда $\rho < \frac{1}{6}|\mathrm{Im}\,\xi|$, введем в рассмотрение множества $\gamma_3 := \{t \in \partial D_z^+ : |t - \xi| \leq 2\rho,\ \mathrm{Im}\,t\,\mathrm{Im}\,\xi > 0\}$, $\bar{\gamma}_3 := \{\bar{t} : t \in \gamma_3\}$, $\gamma_4 := \{t \in \partial D_z^+ : 2\rho < |t - \xi| \leq 3|\mathrm{Im}\,\xi|,\ \mathrm{Im}\,t\,\mathrm{Im}\,\xi > 0\}$, $\bar{\gamma}_4 := \{\bar{t} : t \in \gamma_4\}$, $\gamma_5 := \gamma_{6\delta}(b_j) \setminus (\gamma_3 \cup \bar{\gamma}_3 \cup \gamma_4 \cup \bar{\gamma}_4)$ и представим I_1 в виде суммы пяти интегралов:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_3} \frac{f(t) - f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{\gamma}_3} \frac{f(t) - f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_4} \frac{f(t) - f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{\gamma}_4} \frac{f(t) - f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_5} \frac{f(t) - f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt =: I_1^{I} + I_1^{II} + I_1^{III} + I_1^{IV} + I_1^{V}.$$

Модули интегралов I_1^{I}, I_1^{II} оцениваются аналогично модулю интеграла I_1'. Поскольку при всех $t \in \gamma_5$ имеют место неравенства $|t - z| \geq \frac{3}{8}|t - \xi|$ и $|t - \bar{z}| \geq \frac{1}{8}|t - \xi|$, то интеграл I_1^{V} оценивается таким же способом, как и интеграл I_1'''.

При оценке интеграла I_1^{III} используются неравенства $|t - \bar{z}| \geq |\mathrm{Im}\,z| \geq \frac{19}{24}|\mathrm{Im}\,\xi|$ и $|t - z| \geq \frac{3}{8}|t - \xi|$, которые выполняются при всех $t \in \gamma_4$. Учитывая эти неравенства, по аналогии с оценками (20), (21) получаем

$$\left|I_1^{III}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_4} \frac{|f(t) - f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}|dt| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_f \cap \gamma_4} \frac{|f(t) - f(\xi)|}{\sqrt{\frac{19}{24}|\mathrm{Im}\,\xi|\frac{3}{8}|t-\xi|}}|dt| \leq$$

$$\leq \frac{8}{\pi\sqrt{19}\sqrt{|\mathrm{Im}\,\xi|}}\,\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta)\int\limits_{2\rho}^{3|\mathrm{Im}\,\xi|} \frac{d\theta_\xi(\tau)}{\sqrt{\tau}} \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Im}\,\xi|}}\,\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta)\int\limits_{\rho}^{3|\mathrm{Im}\,\xi|} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \leq c\,\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta).$$

Для интеграла I_1^{IV} имеет место такая же оценка, как и для интеграла I_1^{III}.

Из полученных оценок для $|I_1|$, $|I_3|$, $|I_4|$, $|I_5|$ и равенства (23) следует неравенство

$$\left|f_{\mathrm{pot}}^+(z) - f(b_j) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j}\, dt\right| \leq$$

$$\leq c\left(\omega_{b_j}(f, E_f, 6\delta) + \left|\int\limits_{\gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j}\, dt\right| +\right.$$

$$+\sqrt{\delta}\int_{6\delta}^{2d}\frac{\omega_{b_j}(f,E_f,\tau)}{\tau^{3/2}}d\tau+\int_{|\operatorname{Im}\xi|}^{6\delta+2d(\xi,b_j)}\frac{\omega_\xi(f,E_f,\tau)}{\tau}d\tau\Bigg), \tag{24}$$

которое установлено в предположении $\operatorname{Im} z \neq 0$. Заметим, что при условии $\operatorname{Im} z = 0$ неравенство (24) устанавливается аналогично. Поскольку правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\delta \to 0$, то его следствием является равенство (17) и доказательство теоремы завершено.

Жорданову спрямляемую кривую называют *k-кривой*, если отношение не большей из длин ее дуг, которые стягиваются произвольной хордой, к длине этой хорды ограничено числом k. Будем также называть такую кривую *k-кривой типа „дуга-хорда"*.

Следуя [13], рассмотрим жорданову спрямляемую кривую Γ, у которой отношение $d(z_1, z_2)/|z_1 - z_2|$ ограничено числом k при любом выборе точек z_1, $z_2 \in \Gamma$. Кривые, удовлетворяющие такому условию, назовем *k-кривыми типа „диаметр-хорда"*. Очевидно, что в классе k-кривых типа „диаметр-хорда" содержатся все k-кривые типа „дуга-хорда". С другой стороны, легко строятся примеры k-кривых типа „диаметр-хорда", которые не являются k-кривыми типа „дуга-хорда".

Заметим, что в случае, когда кривая γ является k-кривой типа „диаметр-хорда", оценка (15) очевидным образом упрощается, а условие (16) теоремы 4 можно заменить более слабым условием:

$$\int_{|\operatorname{Im} z|}^{|z-b_j|}\frac{\omega_z(f,E_f,\tau)}{\tau}d\tau \to 0, \quad z \to b_j, \quad z \in E_f. \tag{25}$$

Отметим, что такие же поправки и уточнения в теореме 4 могут быть сделаны и для областей более общего вида, чем области, ограниченные k-кривыми типа „диаметр-хорда".

Область G назовем *k-областью*, если любые две точки ее замыкания $\overline{G}$ можно соединить k-кривой типа „диаметр-хорда" с фиксированным значением k, и при этом все точки указанной кривой, за исключением, быть может, концов, принадлежат области G. В работе [14] рассматривалось замкнутое множество, любые две точки которого можно соединить k-кривой типа „дуга-хорда", проходящей через точки этого множества.

Заметим, что область, ограниченная k-кривой типа „диаметр-хорда", является k-областью, однако, граница k-области может не быть k-кривой типа „диаметр-хорда". При этом граница k-области G может, в частности, образовывать нулевые углы, направленные своими вершинами в сторону дополнения к замыканию области G.

В случае, когда кривая γ ограничивает область, пересечение которой с полуплоскостью $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая симметрична относительно вещественной прямой и такая, что $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Пусть при этом область $\{z \in D_z^+ : \operatorname{Im} z > 0\}$ (или $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} z > 0\}$) является k-областью. Если $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p \leq \infty$, то непрерывное продолжение функции f_{pot}^+ (или соответственно f_{pot}^-) в каждой точке $z_0 \in \gamma \setminus \{b_1; b_2\}$ при любом $z_1 \in \gamma$ таком, что $|z_1 - z_0| \leq \dfrac{1}{2k}|\operatorname{Im} z_0|$, удовлетворяет неравенству*

$$\left| f^{\pm}_{\mathrm{pot}}(z_1) - f^{\pm}_{\mathrm{pot}}(z_0) \right| \le c \| f \|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}} \omega(|z_1 - z_0|). \tag{26}$$

Здесь $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^{(p-2)/2p}$ *при* $2 < p < \infty$ *и* $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\ln(1/\varepsilon)$ *при* $p = \infty$, *а постоянная* c *зависит только от кривой* γ.

Если, кроме того, функция f *в точке* b_j, *где* $j = 1$ *или* $j = 2$, *имеет предел* $\lim_{t \to b_j, t \in E_f} f(t) =: f(b_j)$ *по некоторому множеству* $E_f \subset \gamma$ *такому, что линейная мера Лебега разности* $\gamma \setminus E_f$ *равна нулю, существует сингулярный интеграл* $\int_\gamma \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j} dt$, *а также выполняется асимптотическое соотношение* (25), *то функция* f^+_{pot} (*или соответственно* f^-_{pot}) *непрерывно продолжается из области* D^+_z (*соответственно* D^-_z) *также в точку* b_j *и при этом имеет место равенство* (17) *(или соответственно* (18)*)*.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1; b_2\}$, а точка $z_1 \in \partial D^{\pm}_z$ такая, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \le \frac{1}{2k} |\operatorname{Im} z_0|$. Представим приращение функции $f^{\pm}_{\mathrm{pot}}$ в точке z_0 равенством (22), в котором

$$\Gamma_1 := \{ t \in \partial D^{\pm}_z : |t - z_0| \le 2k\varepsilon \}, \quad \overline{\Gamma}_1 := \{ \bar{t} : t \in \Gamma_1 \},$$

$$\Gamma_2 := \{ t \in \partial D^{\pm}_z : 2k\varepsilon < |t - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0| \}, \quad \overline{\Gamma}_2 := \{ \bar{t} : t \in \Gamma_2 \},$$

$$\Gamma_3 := \partial D^{\pm}_z \setminus \left(\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma}_2 \right),$$

а вместо выражения $\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}$ содержатся граничные значения $\left(\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\right)^{\mp}$.

Отметим, что из предположения о том, что область $\{ z \in D^{\pm}_z : \operatorname{Im} z > 0 \}$ является k-областью, следует неравенство

$$\left| \left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp} - \left(\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\right)^{\mp} \right| \le c\sqrt{\varepsilon(|t - z_1| + |t - \overline{z}_0|)}$$

$$\forall\, t \in \{ \tau \in \partial D^{\pm}_z : |\tau - z_0| > 2k\varepsilon, |\tau - \overline{z}_0| > 2k\varepsilon \}, \tag{27}$$

в котором c — некоторая абсолютная постоянная. Действительно, соединим точки z_0 и z_1 k-кривой $\Gamma_{z_0 z_1}$, все точки которой, за исключением концов, принадлежат области $D^{\pm}_z$, и обозначим $\overline{\Gamma}_{z_0 z_1} := \{ \bar{z} : z \in \Gamma_{z_0 z_1} \}$. В случае $\Gamma^{\gamma}_{z_0 \bar{z}_0} \subset \Gamma^{\gamma}_{z_1 \bar{z}_1}$ заменим разрез $\Gamma^{\gamma}_{z_1 \bar{z}_1}$ разрезом плоскости $\mathbb{C}$ вдоль кривой $\Gamma_{z_0 z_1} \cup \cup\, \Gamma^{\gamma}_{z_0 \bar{z}_0} \cup \overline{\Gamma}_{z_0 z_1}$, не меняя значений функции $\left(\sqrt{(t - z_1)(t - \overline{z}_1)}\right)^{\mp}$ при $t \in \partial D^{\pm}_z$. Аналогично в случае $\Gamma^{\gamma}_{z_1 \bar{z}_1} \subset \Gamma^{\gamma}_{z_0 \bar{z}_0}$ заменим разрез $\Gamma^{\gamma}_{z_0 \bar{z}_0}$ разрезом плоскости $\mathbb{C}$ вдоль кривой $\Gamma_{z_0 z_1} \cup \Gamma^{\gamma}_{z_1 \bar{z}_1} \cup \overline{\Gamma}_{z_0 z_1}$, не меняя значений функции $\left(\sqrt{(t - z_0)(t - \overline{z}_0)}\right)^{\mp}$ при $t \in \partial D^{\pm}_z$. Теперь в обоих случаях неравенство (27) следует из того, что точки множества $\{ \tau \in \partial D^{\pm}_z : |\tau - z_0| > 2k\varepsilon, |\tau - \overline{z}_0| > 2k\varepsilon \}$ удалены от кривых $\Gamma_{z_0 z_1}$ и $\overline{\Gamma}_{z_0 z_1}$ на расстояние, не меньше чем $k\varepsilon$.

Далее, неравенство (26) с учетом оценки (27) устанавливается аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 4 и теоремы 1 в [11].

Для доказательства равенства (17) рассмотрим точку $z \in \partial D^+_z$ такую, что $\operatorname{Im} z_0 \ne 0$ и $\delta := |z - b_j| < \frac{b_2 - b_1}{10k}$. Как и при доказательстве теоремы 4, обозначим $\rho := \min_{t\in\gamma} |t-z|$ и зафиксируем произвольную точку $\xi \in E_f$, удовлетворяющую неравенству $|\xi - z| \le 5\rho/4$. Обозначим также $\gamma_{6k\delta}(b_j) := \{\tau \in \partial D_z^+ : |t-b_j| \le 6k\delta\}$ и рассмотрим разность

$$f^+_{\mathrm{pot}}(z) - f(b_j) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+} \frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt =$$

$$= f(\xi) - f(b_j) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+\setminus\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{f(\xi)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+\setminus\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{\big(f(t)-f(\xi)\big)\big(t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\big)}{\big(t-b_j\big)\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt =:$$

$$=: f(\xi) - f(b_j) + I_6 - I_7 - I_8 + I_9.$$

При условии, что область $\{z \in D_z^+ : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ является k-областью, аналогично оценке (27) устанавливается неравенство $\left|t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right| \le c\sqrt{\delta\big(|t-z|+|t-b_j|\big)}$ для всех $t \in \partial D_z^+ \setminus \gamma_{6k\delta}(b_j)$, в котором c — некоторая абсолютная постоянная.

Теперь интегралы I_6, I_8 и I_9 оцениваются подобно тому, как при доказательстве теоремы 4 оценены соответственно интегралы I_1, I_3 и I_5. Следствием указанных оценок является равенство (17). Поскольку равенство (18) доказывается аналогично, то доказательство теоремы завершено.

Отметим некоторые условия, достаточные для выполнения асимптотического соотношения (25). В частности, соотношение (25) выполняется, если функция f непрерывна на кривой γ и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию Дини

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(f,\gamma,\tau)}{\tau}\,d\tau < \infty.$$

Асимптотическое соотношение (25) также выполняется при более слабом предположении о том, что локальный центрированный относительно точки b_j модуль непрерывности функции f удовлетворяет условию

$$\omega_{b_j}\big(f, E_f, 2|z-b_j|\big) = o\left(\ln\frac{|z-b_j|}{|\mathrm{Im}\, z|}\right), \quad z \to b_j, \quad z \in E_f. \tag{28}$$

Если при этом кривая γ такова, что на ней функция $l(z) := \ln\dfrac{|z-b_j|}{|\mathrm{Im}\, z|}$ ограничена в некоторой окрестности точки b_j, то условие (28) является следствием существования предела $f(b_j) = \lim\limits_{t\to b_j,\, t\in E_f} f(t)$. Заметим, что функция $l(z)$ ограничена на кривой γ в указанной окрестности точки b_j, по крайней мере, в случае, когда кривая γ имеет в точке b_j односторонние касательные, угол между которыми не равен нулю. Из последнего замечания очевидным образом следует, что асимптотическое соотношение (25) также имеет место и при тех предположениях, которые сделаны в теореме 1 работы [11].

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
2. *Мельниченко И. П.* Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 98–102.
3. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1518–1529.
4. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Там же. – № 12. – С. 1695–1703.
5. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III // Там же. – 1997. – **49**, № 2. – С. 228–243.
6. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
7. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365–380.
8. *David G.* Operateurs intégraux sur certaines courbes du plan complexe // Ann. sci. de l'Ecole Supérieure, 4 ser. – 1984. – **14**, № 1. – P. 157–189.
9. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спиралеобразном контуре. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1509–1517.
10. *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Там же. – 1978. – **30**, № 5. – С. 594–601.
11. *Плакса С. А.* Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Там же. – 2000. – **52**, № 4. – С. 492–511.
12. *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // Мат. заметки. – 1982. – **31**, № 4. – С. 571–580.
13. *Герус О. Ф.* О модуле непрерывности телесных производных интеграла типа Коши // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 476–484.
14. *Tamrazov P. M.* Structural and approximational properties of functions in the complex domain // Linear Spaces and Approximation. – Basel: Birkhäuser Verlag Basel, 1978. – P. 503–514.

Получено 05.04.2000