УДК 517.98

**А. В. Чайковський** (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

# ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We present an extension of some facts of the theory of generalized functions of slow growth to the case of operator-valued test functions. We suggest the construction of regular generalized functions with values in the Banach space. We use the obtained results in describing slowly growing solutions of linear homogeneous differential equations with the displacement of argument and a bounded operator coefficient in the Banach space.

Викладено узагальнення деяких фактів теорії узагальнених функцій повільного зростання на випадок операторнозначних основних функцій. Запропоновано побудову регулярних узагальнених функцій зі значеннями в банаховому просторі. Отримані результати застосовано для опису повільно зростаючих розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі зсувом аргументу та обмеженим операторним коефіцієнтом у банаховому просторі.

**1. Допоміжні твердження.** Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(B)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $B$, $I \in L(B)$ — одиничний оператор, $A \in L(B)$ — деякий фіксований оператор, $H(A) \subset L(B)$ — замикання множини всіх аналітичних функцій від оператора $A$, визначених згідно з теорією Ріса – Данфорда (див., наприклад, [1]).

У цьому пункті викладено деякі факти теорії швидко спадних основних функцій у випадку функцій, що набувають значень у просторі $H(A)$, і відповідних узагальнених функцій повільного зростання. Серед останніх виділено клас регулярних узагальнених функцій, що набувають значень у банаховому просторі $B$. Отримані результати в наступному пункті застосовано для відшукання повільно зростаючих розв'язків певного класу диференціальних рівнянь у банаховому просторі.

**Означення 1.** *Простором основних функцій* $S_B(R)$ *назвемо множину функцій* $\varphi: R \to H(A)$, *що задовольняють такі умови*:

1) $\varphi \in C^\infty(R, H(A))$;

2) $\varphi$ *допускає аналітичне продовження у смугу* $P(\rho) = \{z \in C \mid |\operatorname{Im} z| < \rho\}$ *для деякого* $\rho = \rho(\varphi) > 0$;

3) $\exists\, r = r(\varphi) > 0 \;\; \forall\, k \geq 0: \sup\limits_{z \in P(\rho)} e^{r|z|} \left\| \varphi^{(k)}(z) \right\| < +\infty$.

***Зауваження.*** $S_B(R)$ — комплексний лінійний простір, інваріантний відносно операцій диференціювання та множення на функції, які аналітичні в деякій смузі $P(\rho)$ і зростають не швидше багаточлена рівномірно по смузі.

Стандартним чином [2] визначимо на цьому просторі перетворення Фур'є:

$$\forall\, \varphi \in S_B(R), \quad \forall\, \lambda \in R: (F\varphi)(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt.$$

Зауважимо, що інтеграл у цій формулі існує, тому що з означення $S_B(R)$ випливає

$$\int\limits_R \|\varphi(t)\| dt \leq \left( \sup_{t \in R} \left( e^{r(\varphi)|t|} \|\varphi(t)\| \right) \right) \int\limits_R e^{-r(\varphi)|t|} dt < \infty.$$

Дослідимо властивості введеного перетворення.

**Теорема 1.** *Відображення $F$ є бієкцією простору $S_B(R)$.*

***Доведення.*** Покажемо спочатку, що значення відображення $F$ належать простору $S_B(R)$. Нехай $\varphi \in S_B(R)$. Оберемо довільно $\rho_1 \in (0, r(\varphi))$ і $r_1 \in (0, \rho(\varphi))$. Перевіримо для функції $F\varphi$ і цих сталих умови означення 1. Функція

$$(F\varphi)(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R e^{izt}\varphi(t)\,dt$$

визначена і аналітична у смузі $P(\rho_1)$. Крім цього,

$$e^{r_1|z|} \int\limits_R e^{izt}\varphi(t)\,dt = e^{r_1|z|-r_1 z} \int\limits_R e^{izt}\varphi(t+ir_1)\,dt \to 0, \quad \operatorname{Re} z \to +\infty,$$

$$e^{r_1|z|} \int\limits_R e^{izt}\varphi(t)\,dt = e^{r_1|z|+r_1 z} \int\limits_R e^{izt}\varphi(t-ir_1)\,dt \to 0, \quad \operatorname{Re} z \to -\infty,$$

причому граничні переходи рівномірні по $z \in P(\rho)$. Зсув прямої інтегрування обгрунтовується за допомогою третьої умови означення 1, а перехід до границі доводиться цілком аналогічно відомій лемі Рімана [3, с. 261].

Отже, $F: S_B(R) \to S_B(R)$. Бієктивність доводиться аналогічно звичайному випадку. Теорему доведено.

Нехай $y: R \to X$, де $X$ — лінійний простір. Позначимо

$$\forall\, t \in R: (My)(t) := y(t-1), \quad (M^{-1}y)(t) := y(t+1).$$

Сформулюємо властивості перетворення Фур'є, потрібні нам у подальшому:

$$\forall\, \varphi \in S_B(R), \quad \forall\, k \geq 1, \quad \forall\, \lambda \in R: 1)\ \left(F(\varphi^{(k)})\right)(\lambda) = (-i\lambda)^k (F\varphi)(\lambda);$$

$$2)\ (F\varphi)^{(k)}(\lambda) = \left(F((it)^k\varphi)\right)(\lambda);$$

$$3)\ \left(M^{-1}(F\varphi)\right)(\lambda) = \left(F(e^{it}\varphi)\right)(\lambda).$$

Назвемо простором узагальнених функцій $S'_B(R)$ простір усіх лінійних операторів, що діють з $S_B(R)$ у $B$. Розглянемо такий простір повільно зростаючих функцій:

$$C_E(R, B) = \left\{ x \in C(R,B) \,|\, \forall r > 0: \sup_{t \in R} e^{-r|t|}\|x(t)\| < \infty \right\}.$$

Справджується включення $C_E(R, B) \subset S'_B(R)$ в тому сенсі, що довільна функція $x \in C_E(R, B)$ визначає оператор $\alpha_x \in S'_B(R)$, що діє таким чином:

$$\alpha_x(\varphi) := \int\limits_R \varphi(t)x(t)\,dt, \quad \varphi \in S_B(R).$$

При цьому різні функції з класу $C_E(R, B)$ відповідають різним узагальненим функціям. Дійсно, аналогічно доведенню леми Дюбуа – Реймона можна для фіксованої функції $x \in C_E(R, B)$ підібрати $a \in R$, $\sigma \in (0, 1)$ так, що для функції $\varphi_x(t) = I\exp\left(-(t-a)^2/\sigma^2\right)$, яка належить простору $S_B(R)$, буде виконуватись нерівність $\left\|\int_R \varphi_x(t)x(t)\,dt\right\| \neq 0$.

Відзначимо деякі властивості регулярних узагальнених функцій $\alpha_x$, $x \in C_E(R, B)$:

1) $\forall\, x \in C_E(R, B)$, $\forall\, A_1 \in H(A)$, $\forall\, \varphi \in S_B(R)$: $\alpha_{A_1 x}(\varphi) = \alpha_x(A_1\varphi)$;

2) $\forall\, x \in C_E(R, B)$, $x' \in C_E(R, B)$, $\forall\, \varphi \in S_B(R)$: $\alpha_{x'}(\varphi) = -\alpha_x(\varphi')$;

3) $\forall\, x \in C_E(R, B)$, $\forall\, \varphi \in S_B(R)$: $\alpha_{Mx}(\varphi) = \alpha_x(M^{-1}\varphi)$.

Визначимо тепер перетворення Фур'є на $S'_B(R)$ таким чином:

$$\forall\, \alpha \in S'_B(R), \quad \forall\, \varphi \in S_B(R): (F\alpha)(\varphi) := \alpha(F\varphi).$$

Перетворення Фур'є є бієкцією простору $S'_B(R)$, що перевіряється аналогічно звичайному випадку.

Сформулюємо також потрібне у подальшому твердження про властивості одної числової аналітичної функції.

**Лема 1.** *Якщо* $\alpha, \beta \in R$, $0 < \beta - \alpha < \pi$, *то існує окіл* $U$ *відрізка уявної осі* $[\alpha i, \beta i]$ *такий, що функція* $f(z) = ze^z$, $z \in U$, *має аналітичну обернену на множині* $f(U)$.

Доведення леми 1 тривіальне.

**2. Розв'язки диференціального рівняння зі зсувом аргументу.** Застосуємо одержані результати до розв'язку рівняння

$$x'(t) = Ax(t-1), \quad t \in R, \tag{1}$$

де $x \in C^1(R, B)$. Рівняння (1) без зсуву аргументу розглядається в [4, с. 110] при умові $\sigma(A) \cap \{it \,|\, t \in R\} = \varnothing$. В роботах [5, 6], де розглядаються рівняння зі зсувом аргументу відносно відповідно нескінченно диференційовних і неперервно диференційовних функцій, ця умова трансформується в умову $\sigma(A) \cap \cap \{ite^{it} | t \in R\} = \varnothing$. У цій роботі буде знайдено загальний вигляд розв'язку рівняння (1) у класі функцій, які зростають повільніше довільної експоненти, при більш слабких обмеженнях на спектр оператора $A$.

У подальшому будемо вважати, що спектр оператора $A$ задовольняє таку умову.

*Умова* 1. Множини $\sigma_1 = \sigma(A) \setminus \{ite^{it} | t \in R\}$ і $\sigma_2 = \sigma(A) \cap \cap \left\{ite^{it} \,|\, t \in R \setminus \{\pi/2 + \pi m \,|\, m \in Z\}\right\}$ — замкнені.

При умові 1 спектр оператора $A$ розбивається на три замкнені компоненти, що не перетинаються між собою: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = \sigma(A) \cap \left\{ite^{it} \,|\, t = \pi/2 + \pi m,\, m \in Z\right\}$. Тому простір $B$ можна розбити у пряму суму просторів, що відповідають частинам оператора $A$ з відповідними частинами спектра [4, с. 32], рівняння (1) розіб'ється на декілька рівнянь. Розглянемо їх окремо, вважаючи, що спектр оператора $A$ містить лише одну з цих множин.

1. $\sigma(A) = \sigma_1$. Нехай $x \in C_E(R, B)$ — розв'язок рівняння (1). Тоді існує $x' \in \in C_E(R, B)$. Застосуємо перетворення Фур'є до узагальненої функції $\alpha_{x' - AMx}$, яка збігається з нульовою:

$$\forall\, \varphi \in S_B(R): 0 = (F\alpha_{x'-AMx})(\varphi) = \alpha_{x'-AMx}(F\varphi) = \alpha_{x'}(F\varphi) - \alpha_{Mx}(AF\varphi) =$$
$$= -\alpha_x((F\varphi)') - \alpha_x(AM^{-1}F\varphi) = -\alpha_x((F\varphi)' + AM^{-1}F\varphi) =$$
$$= -\alpha_x(F(it\varphi) + F(Ae^{it}\varphi)) = (F\alpha_x)(-it\varphi(t) - Ae^{it}\varphi(t)). \tag{2}$$

Згідно з припущенням щодо спектра оператора $A$, для кожного $t \in R$ існує оператор $K(t) = (-itI - Ae^{it})^{-1} \in L(B)$. Для довільного $\psi \in S_B(R)$ покладемо $\varphi(t) := K(t)\psi(t)$, $t \in R$. Із зауваження до означення 1 випливає, що $\varphi \in S_B(R)$. Підставляючи $\varphi$ у рівність (2), маємо

$$(F\alpha_x)(\psi) = 0.$$

Враховуючи бієктивність перетворення Фур'є, одержуємо $\alpha_x = 0$ і $x = 0$. Отже, в класі $C_E(R, B)$ існує лише нульовий розв'язок рівняння (1).

2. $\sigma(A) = \sigma_2$. У цьому випадку спектр входить у наступне скінченне об'єднання множин, що не перетинаються між собою:

$$\bigcup_{m=1}^{p} \left\{ite^{it} \,|\, t \in \left[\frac{\pi}{2} + \pi m + \alpha,\, \frac{\pi}{2} + \pi m + \pi - \alpha\right]\right\},$$

де $p \in N$; $\alpha \in (0, \pi)$ — фіксовані. З тих же міркувань, що і раніше, будемо вважати, що спектр входить лише до однієї з цих множин. Тоді, згідно з лемою 1, оператор $f^{-1}(A)$ визначений.

Нехай $x \in C_E(R, B)$ — розв'язок рівняння (1). Тоді існує $x' \in C_B(R, B)$. Застосуємо перетворення Фур'є до узагальненої функції $\alpha_{x'-AMx}$, яка збігається з нульовою. Залишаються вірними перетворення (2). Тому отримаємо:

$$\forall\, \varphi \in S_B(R): 0 = (F\alpha_{x'-AMx})(\varphi) = (F\alpha_x)(-it\varphi(t) - Ae^{it}\varphi(t)) =$$

$$= \int\limits_R \left[\int\limits_R e^{i\lambda t}(-itI - Ae^{it})\varphi(t)\,dt\right] x(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_R \left[\int\limits_R e^{i\lambda[tI - if^{-1}(A)]}(-itI - Ae^{it})\varphi(t)\,dt\right] e^{-\lambda f^{-1}(A)}x(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_R \left[\int\limits_R e^{i\lambda[tI - if^{-1}(A)]}\left(\frac{itI + Ae^{it}}{i(tI - if^{-1}(A))}\right)\varphi(t)\,dt\right]\left(e^{-\lambda f^{-1}(A)}x(\lambda)\right)'_\lambda d\lambda =$$

$$= (F\alpha_y)\left(\left(\frac{itI + Ae^{it}}{i(tI - if^{-1}(A))}\right)\varphi(t)\right),$$

$$y(\lambda) = e^{-\lambda f^{-1}(A)}\left(e^{-\lambda f^{-1}(A)}x(\lambda)\right)'_\lambda, \quad \lambda \in R, \tag{3}$$

де за означенням

$$\frac{itI + Ae^{it}}{i(tI - if^{-1}(A))} := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{it + \lambda e^{it}}{it + f^{-1}(\lambda)} R_\lambda(A)\,d\lambda,$$

$R_\lambda(A)$ — резольвента оператора $A$, $\Gamma$ — крива, що охоплює спектр $\sigma(A)$ і лежить у множині, де згідно з лемою 1 визначено функцію $f^{-1}$, підінтегральна функція доозначається за неперервністю у точках, де знаменник перетворюється на 0:

$$\frac{it + \lambda e^{it}}{it + f^{-1}(\lambda)} = e^{it}\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f^{-1}(\lambda) - (-it))^{k-1}, \quad c_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(-it), \quad k \geq 1.$$

Підінтегральна функція не набуває нульових значень, отже, існує оператор

$$K(t) = \left(\frac{itI + Ae^{it}}{i(tI - if^{-1}(A))}\right)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{it + \lambda e^{it}}{it + f^{-1}(\lambda)}\right)^{-1} R_\lambda(A)\,d\lambda, \quad t \in R.$$

Тому, як і в першому випадку, для довільного $\psi \in S_B(R)$ покладемо $\varphi(t) := K(t)\psi(t)$, $t \in R$. На підставі зауваження до означення 1 $\varphi \in S_B(R)$. Підставляючи $\varphi$ у рівність (3), маємо

$$(F\alpha_y)(\psi) = 0.$$

Внаслідок бієктивності перетворення Фур'є отримаємо

$$\forall\, \lambda \in R: y(\lambda) = e^{-\lambda f^{-1}(A)}\left(e^{-\lambda f^{-1}(A)}x(\lambda)\right)'_\lambda = 0,$$

тому

$$\exists x_0 \in B: \ \forall\, \lambda \in R \ x(\lambda) = e^{-\lambda f^{-1}(A)}x_0. \tag{4}$$

Оскільки, згідно з теоремою Данфорда [4, с. 32], справджується включення

$$\sigma(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\sigma(A)) \subset \{it \mid t \in R\},$$

то кожна функція з (4) належить класу $C_E(R, B)$, що випливає з тверджень у [4, с. 42]. Тому формула (4) дає всі можливі розв'язки рівняння (1) у випадку, що розглядається.

3. $\sigma(A) = \sigma_3$. Спектр $\sigma(A)$ у цьому випадку складається зі скінченного числа точок. З тих же міркувань, що й раніше, будемо вважати, що спектр $\sigma(A)$ складається з однієї точки:

$$\sigma(A) = \{z_0\}, \quad z_0 = it_0 e^{it_0}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2} + \pi m_0, \quad m_0 \in Z.$$

При цьому також $z_0 = -it_0 e^{-it_0}$. Тому, згідно з лемою 1, визначено функції

$$f_{(1)}^{-1}: U(f([i(t-\alpha), i(t+\alpha)])) \to U([i(t-\alpha), i(t+\alpha)]),$$

$$f_{(2)}^{-1}: U(f([i(-t-\alpha), i(-t+\alpha)])) \to U([i(-t-\alpha), i(-t+\alpha)]),$$

де через $U$ позначено околи відповідних множин, $\alpha \in (0, \pi)$ — фіксоване. Звідси випливає, що визначено оператори $f_{(1)}^{-1}(A)$ та $f_{(2)}^{-1}(A)$.

Нехай $x \in C_E(R, B)$ — розв'язок рівняння (1). Тоді існує $x' \in C_E(R, B)$. Застосуємо перетворення Фур'є до узагальненої функції $\alpha_{x'-AMx}$, яка збігається з нульовою. Залишаться вірними перетворення (2). Тому, двічі діючи, як у (3), отримаємо

$$\forall\, \varphi \in S_B(R): 0 = (F\alpha_{x'-AMx})(\varphi) = (F\alpha_x)(-it\varphi(t) - Ae^{it}\varphi(t)) =$$

$$= \int\limits_R \left[ \int\limits_R e^{i\lambda t}(-itI - Ae^{it})\varphi(t)\,dt \right] x(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_R \left[ \int\limits_R e^{i\lambda[tI - if_{(1)}^{-1}(A)]}(-itI - Ae^{it})\varphi(t)\,dt \right] e^{-\lambda f_{(1)}^{-1}(A)} x(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_R \left[ \int\limits_R e^{i\lambda t} \left( \frac{itI + Ae^{it}}{i(tI - if_{(1)}^{-1}(A))} \right) \varphi(t)\,dt \right] e^{\lambda f_{(1)}^{-1}(A)} \left( e^{-\lambda f_{(1)}^{-1}(A)} x(\lambda) \right)'_\lambda d\lambda =$$

$$= \int\limits_R \left[ \int\limits_R e^{i\lambda t} \left( \frac{itI + Ae^{it}}{(tI - if_{(1)}^{-1}(A))(tI - if_{(2)}^{-1}(A))} \right) \varphi(t)\,dt \right] \times$$

$$\times\, e^{\lambda f_{(2)}^{-1}(A)} \left( e^{\lambda(f_{(1)}^{-1}(A) - f_{(2)}^{-1}(A))} \left( e^{-\lambda f_{(1)}^{-1}} x(\lambda) \right)'_\lambda \right)'_\lambda d\lambda =$$

$$= (F\alpha_y)\left( \left( \frac{itI + Ae^{it}}{(tI - if_{(1)}^{-1}(A))(tI - if_{(2)}^{-1}(A))} \right) \varphi(t) \right),$$

$$y(\lambda) = e^{\lambda f_{(2)}^{-1}(A)} \left( e^{\lambda(f_{(1)}^{-1}(A) - f_{(2)}^{-1}(A))} \left( e^{-\lambda f_{(1)}^{-1}(A)} x(\lambda) \right)'_\lambda \right)'_\lambda, \quad \lambda \in R,$$

де за означенням

$$\frac{itI + Ae^{it}}{(tI - if_{(1)}^{-1}(A))(tI - if_{(2)}^{-1}(A))} := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{it + \lambda e^{it}}{(t - if_{(1)}^{-1}(\lambda))(t - if_{(2)}^{-1}(\lambda))} R_\lambda(A)\,d\lambda, \qquad (5)$$

$R_\lambda(A)$ — резольвента оператора $A$, $\Gamma$ — крива, що охоплює спектр $\sigma(A)$ (точку $z_0$) і лежить у множині, де згідно з лемою 1 визначено функції $f_{(1)}^{-1}$ і $f_{(2)}^{-1}$, підінтегральна функція доозначається за неперервністю у точках, в яких знаменник дорівнює нулю. На відміну від другого випадку, у знаменнику два множники, але якщо $\Gamma$ досить близька до $z_0$, то значення функцій $f_{(1)}^{-1}$ і $f_{(2)}^{-1}$ на $\Gamma$ належать відповідно околам точок $t_0$ і $-t_0$, отже, при фіксованому $t$ лише один з виразів $it + f_{(1)}^{-1}(\lambda)$ або $it + f_{(2)}^{-1}(\lambda)$ може дорівнювати нулю. Підінтегральна функція в рівності (5) не набуває нульових значень, отже, існує оператор

$$K(t) = \left(\frac{itI + Ae^{it}}{(tI - if_{(1)}^{-1}(A))(tI - if_{(2)}^{-1}(A))}\right)^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{it + \lambda e^{it}}{(t - if_{(1)}^{-1}(\lambda))(t - if_{(2)}^{-1}(\lambda))}\right)^{-1} R_{\lambda}(A)\,d\lambda, \quad t \in R.$$

Як і в попередніх випадках, для довільного $\psi \in S_B(R)$ покладемо $\varphi(t) := := K(t)\psi(t)$, $t \in R$. На підставі зауваження до означення 1 $\varphi \in S_B(R)$. Тому виконується рівність $(F\alpha_y)(\psi) = 0$.

З бієктивності перетворення Фур'є випливає, що

$$\forall \lambda \in R: \; y(\lambda) = e^{\lambda f_{(2)}^{-1}(A)}\left(e^{\lambda(f_{(1)}^{-1}(A) - f_{(2)}^{-1}(A))}\left(e^{-\lambda f_{(1)}^{-1}(A)}x(\lambda)\right)'_{\lambda}\right)'_{\lambda} = 0,$$

отже,

$$\exists x_1, x_2 \in B: \; \forall \lambda \in R \;\; x(\lambda) = e^{\lambda f_{(1)}^{-1}(A)}x_1 + e^{\lambda f_{(2)}^{-1}(A)}x_2. \qquad (6)$$

Оскільки внаслідок теореми Данфорда справджується включення

$$\sigma(f_{(j)}^{-1}(A)) \subset f_{(j)}^{-1}(\sigma(A)) \subseteq \{it \mid t \in R\}, \quad j = 1, 2,$$

то кожна функція з (6) належить класу $C_E(R, B)$, що випливає з тверджень у [4, с. 42], отже, формула (6) дає всі можливі розв'язки рівняння (1) у випадку, що розглядається.

Нехай виконується умова 1. З попередніх міркувань випливає така теорема.

**Теорема 2.** *Кожен розв'язок рівняння* (1) *в класі* $C_E(R, B)$ *є сумою скінченної кількості розв'язків вигляду* (4) *і* (6) *цього рівняння в інваріантних підпросторах, що відповідають частинам спектра* $\sigma(A)$. *Навпаки, кожна сума скінченної кількості розв'язків вигляду* (4) *та* (6) *є розв'язком рівняння* (1) *у класі* $C_E(R, B)$.

1. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. – Київ.: Либідь, 1994. – Ч. 2. – 304 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Оценки спектров и обратимость функциональных операторов // Мат. сб. – 1978.– **105(147)**, № 2. – С. 268 – 285.
6. *Чайковський А. В.* Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Допов. НАН України. – 2000. – № 8. – С. 33 – 36.

Одержано 28.10.99,
після доопрацювання — 03.07.2000