УДК 519.1

Т. О. Банах (Львів. нац. ун-т)

СИМЕТРИЧНІ ПІДМНОЖИНИ І ФАРБУВАННЯ ЗВ'ЯЗНИХ КОМПАКТНИХ ГРУП

We find upper and lower bounds of the Haar measure of a monochromatic symmetric subset which can be found in every measurable r-coloring of a connected compact group.

Знайдено оцінки зверху і знизу міри Хаара монохроматичної симетричної підмножини, яку можна знайти у кожному вимірному r-розфарбуванні зв'язної компактної групи.

Нехай G — компактна топологічна група і μ — міра Хаара на G (тобто єдина ймовірнісна біінваріантна борелівська міра на G). У цій статті ми вивчаємо властивості вимірних розфарбувань групи G, тобто розфарбувань, монохроматичні класи яких — вимірні підмножини відносно міри μ. Підмножину A групи G назвемо *симетричною*, якщо $A = s_g(A)$ для деякого $g \in G$, де $s_g : G \to G$, $s_g : x \mapsto gx^{-1}g$, — симетрія групи G відносно центра g. Для кожного натурального r розглянемо величину

$$ms(G,r) = \sup\{\varepsilon > 0: \text{ для кожного вимірного } r\text{-розфарбування групи } G \text{ існує монохроматична симетрична підмножина } A \subset G \text{ міри } \mu(A) \geq \varepsilon\}.$$

Інваріант $ms(G,r)$ був означений у роботі [1], де, зокрема, було доведено, що $ms(G,r) = r^{-2}$ для кожної неодноточкової зв'язної компактної абелевої групи G. Там же було поставлено проблему вивчення інваріанта $ms(G,r)$ для некомутативних груп. Скінченні некомутативні групи розглядалися у роботі [2], де встановлено нижні та верхні оцінки величини $ms(G,r)$. Зокрема, в [2] доведено, що $ms(G,r) \geq r^{-2}k(G)|G|^{-1}$ для кожної скінченної групи G, де $k(G) = \min_{g\in G}\left|\sqrt{g^2}\right|$, а $\sqrt{g} = \{x \in G: x^2 = g\}$. У даній роботі вивчаємо інваріант $ms(G,r)$ для зв'язних компактних груп G. Основним результатом є наступна теорема.

Теорема. *Для довільної неодноточкової зв'язної компактної групи G та довільного $r \in \mathbb{N}$ справедливі оцінки:*

U) $ms(G,r) \leq 1/r^2$;

L) $ms(G,r) \geq \dfrac{1}{r^2} 2^{-\dim G}$;

LL) $ms(G,r) \geq \dfrac{1}{r^2}\dfrac{k(G)}{2^{\dim G}}$ *при умові, що G — група Лі.*

Зауважимо, що $k(G) = 2^{\dim G}$ для довільної компактної зв'язної абелевої групи Лі (це випливає з того, що всі такі групи ізоморфні торам), як наслідок, для таких груп оцінки U) та LL) дають точне значення $ms(G,r) = r^{-2}$ (див. теорему 2.2(4) в [1]). Для доведення теореми за допомогою структурної теорії компактних груп зведемо задачу до розгляду груп Лі, використовуючи при цьому деякі результати ріманової геометрії.

1. Деякі факти з ріманової геометрії. Нехай M — компактний зв'язний рімановий многовид, d і μ — канонічні метрика та міра, породжені рімановою структурою [3], причому $\mu(M) = 1$. Ми використаємо два факти, перший із яких доведено в §4 роботи [4], а другий є стандартним (див. 3.2.46 і 2.10.25 в [4]).

Лема 1. *Для довільних $r \in \mathbb{N}$ та $\varepsilon > 0$ існує таке вимірне r-колірне розфарбування многовиду M, що кожна вимірна монохроматична підмножина $A \subset M$, інваріантна відносно деякої нетотожної ізометрії многовиду M, має міру $\mu(A) < r^{-2} + \varepsilon$.*

Лема 2. *Нехай $f: M \to M$ — таке ліпшицеве відображення, що $\min_{x \in X} \left| f^{-1}(f(x)) \right| \geq k$ для деякого $k > 1$. Тоді $k\mu(f(A)) \leq (\mathrm{Lip}\, f)^{\dim M} \mu(A)$ для кожної замкненої підмножини $A \subset M$, де $\mathrm{Lip}\, f = \sup_{x \neq y} \dfrac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}$.*

2. Доведення оцінок U) та LL) для груп Лі. Нехай G — зв'язна компактна група Лі. Відомо, що група G допускає таку ріманову структуру, що ліві і праві зсуви групи G є ізометріями, а канонічна міра, породжена рімановою структурою, співпадає з мірою Хаара μ на G (див. §2, гл. III [5]). У цьому випадку для кожного $g \in G$ симетрія $s_g: G \to G$, $s_g: x \mapsto gx^{-1}g$, є нетотожною ізометрією ріманового многовиду G. Тоді із леми 1 очевидним чином випливає оцінка зверху $ms(G,r) \leq r^{-2}$.

Для доведення оцінки знизу LL) нам буде необхідна наступна лема.

Лема 3. $\mu(\sqrt{A}) \geq \mu(A) \dfrac{k(G)}{2^{\dim G}}$ *для довільної замкненої підмножини $A \subset G$, де $\sqrt{A} = \{g \in G: g^2 \in A\}$.*

Доведення. Розглянемо відображення $f: G \to G$, $f: x \mapsto x^2$, і зауважимо, що

$$d(f(x), f(y)) = d(x^2, y^2) \leq d(x^2, xy) + d(xy, y^2) = 2d(x,y), \quad x, y \in G,$$

і $\min_{g \in G} \left| f^{-1}(f(g)) \right| = \min_{g \in G} \left| \sqrt{g^2} \right| = k(G)$. Застосовуючи лему 2, отримуємо нерівність $\mu\left(f\left(\sqrt{A}\right)\right) \leq \mu\left(\sqrt{A}\right) \dfrac{2^{\dim G}}{k(G)}$, справедливу для кожної замкненої підмножини $A \subset G$. Залишилось зауважити, що $A \subset f\left(\sqrt{A}\right)$. Це випливає з того, що для зв'язних компактних груп Лі експоненційне відображення $\exp: \mathfrak{g} \to G$ з їх алгебр Лі — сюр'єктивне [3], 2.108(c). Як наслідок, для кожного $a \in A$ існує такий елемент $\bar{a} \in \mathfrak{g}$ алгебри Лі групи G, що $a = \exp(\bar{a})$. Тоді для елемента $b = \exp(\bar{a}/2)$ групи G одержимо $f(b) = b^2 = \exp\left(2 \frac{1}{2} \bar{a}\right) = \exp(\bar{a}) = a$, (див. [6], 3.31(b)). Тобто $b \in \sqrt{A}$ і $a = f(b) \in f\left(\sqrt{A}\right)$. Таким чином, $A \subset f\left(\sqrt{A}\right)$ і $\mu(A) \leq \mu\left(f\left(\sqrt{A}\right)\right) \leq \mu\left(\sqrt{A}\right) \dfrac{2^{\dim G}}{k(G)}$, звідки і випливає потрібна нерівність $\mu\left(\sqrt{A}\right) \geq \mu(A) \dfrac{k(G)}{2^{\dim G}}$.

Тепер оцінка знизу $ms(G,r) \geq \dfrac{1}{r^2} \dfrac{k(G)}{2^{\dim G}}$ очевидним чином випливає з регулярності міри μ і наступної леми.

Лема 4. *Для кожної замкненої підмножини A групи G існує такий елемент $g \in G$, що $\mu(A \cap s_g(A)) \geq \mu(A)^2 \dfrac{k(G)}{2^{\dim G}}$.*

Доведення. Позначимо через $\chi_A: G \to \{0, 1\}$ характеристичну функцію множини A. Очевидно, що $\mu(A \cap s_g(A)) = \int_G \chi_A(x) \chi_A(s_g(x)) dx$. Для доведення леми достатньо перевірити, що

$$\int\limits_G \mu(A \cap s_g(A))\,dg \;\geq\; \mu(A)^2\,\frac{k(G)}{2^{\dim G}}.$$

Для цього, використовуючи лему 3, зауважимо, що для кожного $x \in G$

$$\int\limits_G \chi_A(gx^{-1}g)\,dg \;=\; \int\limits_G \chi_A(gx^{-1}gx^{-1}x)\,dg \;=\; \int\limits_G \chi_{Ax^{-1}}(gx^{-1}gx^{-1})\,dg \;=$$

$$=\; \int\limits_G \chi_{Ax^{-1}}(h^2)\,dg \;=\; \mu\left(\sqrt{Ax^{-1}}\right) \;\geq\; \mu\left(\sqrt{Ax^{-1}}\right)\frac{k(G)}{2^{\dim G}} \;=\; \mu(A)\,\frac{k(G)}{2^{\dim G}}.$$

Застосовуючи цю нерівність та теорему Фубіні, одержуємо

$$\int\limits_G \mu(A \cap s_g(A))\,dg \;=\; \int\limits_G\int\limits_G \chi_A(x)\,\chi_A(s_g(x))\,dx\,dy \;=\; \int\limits_G \chi_A(x)\int\limits_G \chi_A(gx^{-1}g)\,dg\,dx \;\geq$$

$$\geq\; \mu(A)\,\frac{k(G)}{2^{\dim G}}\int\limits_G \chi_A(x)\,dx \;=\; \mu(A)^2\,\frac{k(G)}{2^{\dim G}}.$$

3. Доведення оцінок U) та L) для довільної компактної зв'язної групи. Перш за все зауважимо, що має місце наступна лема, яка доводиться за аналогією із доведенням твердження 2.7 з [1].

Лема 5. *Якщо H — замкнена нормальна підгрупа компактної топологічної групи G, то $ms(G,r) \leq ms(G/H,r)$ для довільного $r \in \mathbb{N}$.*

Нехай G — неодноточкова зв'язна компактна топологічна група. Згідно з теоремою Гельфанда – Райкова [7, с. 95] група G містить таку власну замкнену підгрупу $H \subset G$, що фактор-група G/H є (компактною зв'язною) групою Лі. Як ми вже довели, $ms(G/H,r) \leq r^{-2}$. Як наслідок, $ms(G,r) \leq ms(G/H,r) \leq$ $\leq r^{-2}$, тобто оцінку зверху U) доведено.

Тепер доведемо оцінку знизу L) для групи G. Достатньо перевірити, що для кожної вимірної підмножини $A \subset G$ та довільного $\varepsilon \in (0,1]$ існує таке $g \in G$, що $\mu(A \cap s_g(A)) \geq \mu(A)^2\,2^{-\dim G} - \varepsilon$. За регулярністю міри μ можна знайти підмножини $B \subset A \subset C \subset G$ такі, що $\mu(C \setminus B) < \varepsilon/4$, причому B — замкнена, а C — відкрита підмножини в G. Використовуючи компактність множини B, нескладно підібрати такий окіл U одиниці групи G, що $BU \subset C$. Згідно з §47 роботи [8] існує така замкнена нормальна підгрупа $H \subset U$, що G/H є групою Лі розмірності $\dim G/H \leq \dim G$. Нехай λ — міра Хаара на групі G/H.

Розглянемо множину $BH = HB$ та її образ $D = \pi(BH) = \pi(B) \subset G/H$ при фактор-відображенні $\pi\colon G \to G/H$. Із єдиності міри Хаара на G/H випливає, що $\lambda(D) = \mu(\pi^{-1}(D)) \geq \mu(B) > \mu(A) - \varepsilon/4$. Тоді згідно з лемою 4 існує такий елемент $h \in G/H$, що

$$\lambda(D \cap s_h(D)) \;\geq\; \lambda(D)^2\,2^{-\dim G/H} \;\geq\; (\mu(A) - \varepsilon/4)^2\,2^{-\dim G} \;\geq$$

$$\geq\; \mu(A)^2\,2^{-\dim G} - 2^{-\dim G}\,\frac{\varepsilon}{2}(\mu(A) - \varepsilon/8) \;\geq\; \mu(A)^2\,2^{-\dim G} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Виберемо довільний елемент $g \in G$ з $\pi(g) = h$. Легко бачити, що $\pi^{-1}(D \cap$ $\cap\, s_h(D)) = BH \cap s_g(BH)$ і, отже,

$$\mu(BH \cap s_g(BH)) \;=\; \mu(\pi^{-1}(D \cap s_h(D))) \;=\; \lambda(D \cap s_h(D)) \;\geq\; \mu(A)^2\,2^{-\dim G} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки $BH \subset BU \subset C$, маємо

$$\mu(C \cap s_g(C)) \;\geq\; \mu(A)^2\,2^{-\dim G} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауважимо, що із включень $A \subset C$ і $s_g(A) \subset s_g(C)$ випливають включення $A \cap s_g(A) \subset C \cap s_g(C)$ та $(C \cap s_g(G)) \setminus (A \cap s_g(A)) \subset (C \setminus A) \cup (s_g(C) \setminus s_g(A))$. Тоді

$$\mu(C \cap s_g(C)) - \mu(A \cap s_g(A)) \leq \mu(C \setminus A) + \mu(s_g(C) \setminus s_g(A)) = 2\mu(C \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

і, як наслідок,

$$\mu(A \cap s_g(A)) > \mu(C \cap s_g(C)) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu(A)^2 2^{-\dim G} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \mu(A)^2 2^{-\dim G} - \varepsilon.$$

4. Деякі заключні зауваження та відкриті проблеми.

***Запитання* 1.** *Чи вірна оцінка знизу* LL) *для довільних зв'язних компактних груп ?*

***Запитання* 2.** *Чи існує зв'язна компактна група G з $ms(G,r) < r^{-2}$ для деякого $r \in \mathbb{N}$?*

Зауважимо, що скінченна група G з $ms(G,2) = 1/8 < 1/2^2$ існує — це група Q_8 кватерніонів [2].

Групи Лі є частковими випадками так званих симетричних ріманових многовидів, тобто ріманових многовидів M, які для довільної своєї точки $p \in M$ допускають інволютивну ізометрію s_p, яка переводить кожну точку $x \in M$ у точку $s_p(x)$, для якої p є серединою геодезійної, що з'єднує точки x і $s_p(x)$ [5]. Для груп Лі така інволютивна симетрія s_p задається формулою $s_p(x) = = px^{-1}p$. Окрім груп Лі симетричними рімановими многовидами є, наприклад, n-вимірні сфери S^n. Підмножина A симетричного многовиду M називається *симетричною*, якщо $A = s_p(A)$ для деякого $p \in M$.

Для симетричних компактних зв'язних ріманових многовидів M з ймовірнісною канонічною мірою μ очевидним чином означається інваріант $ms(M,r)$. При цьому з леми 1 випливає, що $ms(M,r) < r^{-2}$ для кожного такого многовиду M.

Проблема. *Нехай M — компактний зв'язний симетричний ріманів многовид з ймовірнісною канонічною мірою. Знайти оцінку знизу величин $ms(M,r)$. Зокрема, чи може $ms(M,r)$ бути: а) меншим за r^{-2}, б) меншим за $r^{-2}2^{-\dim M}$, в) рівним нулю ?*

Методами даної статті можна довести, що $ms(S^2,r) \geq (2r^2)^{-1}$ для $r \in \mathbb{N}$. Насправді при $r=2$ справедлива оцінка $ms(S^2,2) \geq 1/6$ (див. §6 і 7 в [9]).

***Запитання* 3.** *Чи вірно, що $ms(S^2,r) = r^{-2}$?*

1. *Банах Т. О., Воробец Я. Б., Вербицкий О. В.* Рамсеевские задачи для пространств с симметриями // Изв. РАН. – 2000. – **64**, № 6. – С. 3 – 40.
2. *Банах Т. О.* Симетричні підмножини і фарбування скінченних груп // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 1999. – Вип. 4. – С. 12 – 17.
3. *Gallot S., Hullin D., Lafontaine J.* Riemannian geometry. – Springer-Verlag, 1993.
4. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Мир, 1987. – 760 с.
5. *Трофимов В. В.* Введение в теорию многообразий с симметриями. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 360 с.
6. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. – М.: Мир, 1987. – 302 с.
7. *Моррис С.* Двойственность Понтрягина и строение локально компактных групп. – М.: Мир, 1980. – 102 с.
8. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
9. *Banakh T., Protasov I. V.* Symmetry and colorings: some results and open problems // Вопросы алгебры. – 2001. – **17**.

Одержано 07.12.99