УДК 515.12

М. М. Зарічний, С. О. Іванов (Львів. нац. ун-т)

ГІПЕРПРОСТІР ОПУКЛИХ КОМПАКТНИХ ПІДМНОЖИН ТИХОНОВСЬКОГО КУБА

We prove that a hyperspace of compact convex subsets of the Tikhonov cube I^{ω_1} is homeomorphic to I^{ω_1}.

Доведено, що гіперпростір компактних опуклих підмножин тихоновського куба I^{ω_1} гомеоморфний.

1. Вступ. Для тихоновського простору X позначимо через $\exp(X)$ гіперпростір (експоненту) простору X, тобто множину всіх непорожніх компактних підмножин в X, наділену топологією В'єторіса. Базу цієї топології утворюють множини вигляду

$$\langle U_1,\ldots,U_n \rangle = \{ A \in \exp X \mid A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ і } A \cap U_i \neq \varnothing \text{ для кожного } i \},$$

де $U_1,\ldots,U_n$ пробігають топологію простору X. Для метричного простору (X, ρ) топологія В'єторіса в $\exp(X)$ індукована метрикою Хаусдорфа ρ_{H}:

$$\rho_{\mathrm{H}}(A, B) = \inf\{ \varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A) \}.$$

Нехай тепер X — підмножина деякого локально опуклого простору. Позначимо через $\mathrm{cc}(X)$ підпростір в $\exp(X)$, утворений опуклими підмножинами в X. Простори вигляду $\mathrm{cc}(X)$ досліджувались різними авторами [1 – 3]. Зокрема, простори $\mathrm{cc}(I^\tau)$ (через I позначено відрізок $[0, 1]$) досліджено при $\tau = \omega$ і $\tau \geq \omega_2$. Метою цієї статті є дослідження випадку $\tau = \omega_1$. Основним результатом є такий факт.

Теорема 1. *Простір* $\mathrm{cc}(I^{\omega_1})$ *гомеоморфний* I^{ω_1}.

Ця теорема показує, що конструкція гіперпростору опуклих компатних підмножин, яка є функторіальною в категорії опуклих компактів і афінних відображень, за своїми властивостями ближча до функтора ймовірнісних мір, ніж до функтора гіперпростору.

При доведенні теореми 1 використовується характеризація тихоновського куба I^τ, $\tau \geq \omega_1$, наведена Є. В. Щепіним в [5]: компактний хаусдорфовий простір X гомеоморфний I^τ, якщо і тільки якщо X є абсолютним ретрактом ($X \in \mathrm{AR}$) ваги τ і X є однорідним за характером. Нагадаємо, що компактний хаусдорфовий простір є *абсолютним ретрактом*, якщо він є ретрактом кожного оточуючого паракомпактного хаусдорфового простору. Однорідність за характером означає, що характер (мінімальна потужність бази в точці) однаковий для всіх точок (деталі див. в [4 – 6]).

2. Доведення основного результату. Доведення теореми 1 розділяється на два твердження: $\mathrm{cc}(I^{\omega_1}) \in \mathrm{AR}$ і $\mathrm{cc}(I^{\omega_1})$ — однорідний за характером простір.

Для доведення того факту, що $\mathrm{cc}(I^{\omega_1}) \in \mathrm{AR}$, подамо простір $\mathrm{cc}(I^{\omega_1})$ як границю оберненої системи $S = \{ Q^\alpha,\ p^\beta_\alpha;\ \alpha < \beta < \omega_1 \}$, де Q — гільбертів куб. Насамперед зауважимо, що $\mathrm{cc}(Q) \in \mathrm{AR}$; для доведення досить зауважити, що простір $\mathrm{cc}(Q)$ — ретракт простору $\exp(Q) \in \mathrm{AR}$ при ретракції, що переводить кожен компакт $A \in \exp(Q)$ в його опуклу оболонку. Далі доведення спирається на одну властивість відображення $\mathrm{cc}(p^\beta_\alpha)\colon \mathrm{cc}(Q^\beta) \to \mathrm{cc}(Q^\alpha)$.

Означення 1. *Відображення $f: X \to Y$ задовольняє умову продовження параметризованих селекцій, якщо для кожної комутативної діаграми*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array},$$

де $i: A \to Z$ — замкнене вкладення в паракомпактний простір Z, існує відображення $\Phi: Z \to X$ таке, що $\Phi|A = \psi$ і $f\Phi = \varphi$.

Означення належить Є. В. Щепіну [4], котрий, використовуючи термінологію теорії жмутків, називає такі відображення *м'якими*.

Стандартні міркування показують, що властивість $\mathrm{cc}\left(I^{\omega_1}\right) \in \mathrm{AR}$ випливає з умови продовження параметризованих селекцій кожного з відображень $\mathrm{cc}\left(p_\alpha^\beta\right)$. Але кожне таке відображення афінно гомеоморфне проектуванню $\mathrm{pr}_1: Q \times \times Q \to Q$. Тому шукана властивість відображень $\mathrm{cc}\left(p_\alpha^\beta\right)$ є наслідком такого твердження.

Твердження 1. *Відображення $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1): \mathrm{cc}(Q \times Q) \to \mathrm{cc}(Q)$ задовольняє умову продовження параметризованих селекцій.*

Доведення. Досить побудувати неперервне відображення $\Phi: \mathrm{cc}(Q \times Q) \times \mathrm{cc}(Q) \to \mathrm{cc}(Q)$, що задовольняє умови:

1) $\mathrm{pr}_1(\Phi(A, B)) = B$;

2) якщо $\mathrm{pr}_1(A) = B$, то $\Phi(A, B) = A$.

Справді, маючи таке відображення Φ, для комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{cc}(Q \times Q) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)} \\ Z & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathrm{cc}(Q) \end{array},$$

де $i: A \to Z$ — замкнене вкладення в паракомпактний простір Z, скористаємося фактом $\mathrm{cc}(Q \times Q) \in \mathrm{AR}$ і знайдемо відображення $\varphi': Z \to \mathrm{cc}(Q \times Q)$, для якого $\psi = i\varphi'$; тоді приймемо $\Psi(z) = \Phi(\varphi'(z), \varphi(z))$, $z \in Z$. Маємо $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)\Psi = \varphi$ і $\Psi i = \varphi$, а отже, відображення $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)$ задовольняє умову продовження параметризованих селекцій.

Вважаємо, що гільбертів куб Q стандартно вкладений в гільбертів простір l^2,

$$Q = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^2 \mid |x_i| \le \frac{1}{i} \right\},$$

і метрика d на Q індукована скалярним добутком в l^2. В $Q \times Q$ розглядається піфагорова метрика

$$d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d(x_1, x_2))^2 + (d(y_1, y_2))^2}.$$

Отже, приймемо

$$\Phi(A, B) = \{ b \in Q \times Q \mid \mathrm{pr}_1(b) \in B \text{ та існує } a \in A \text{ таке, що}$$
$$d'(a, b) = d'(\mathrm{pr}_1(a), \mathrm{pr}_1(b)) \le d_H(\mathrm{pr}_1(A), B) \}.$$

Ми не наводимо громіздке доведення неперервності відображення Ф. Зауважимо лише, що ця неперервність є наслідком властивостей розглядуваних метрик в $Q \times Q$ і Q.

Для доведення теореми 1 нам залишилося показати, що простір $\mathrm{cc}\left(I^{\omega_1}\right)$ є однорідним за характером. Для цього досить показати, що кожне відображення $\mathrm{cc}\left(\rho_\alpha^\beta\right)$ має два диз'юнктні перерізи. Доведемо навіть сильніший факт, який дає змогу цілком описати топологію відображення $\mathrm{cc}\left(\rho_\alpha^\beta\right)$. Як і раніше, оперуємо з відображенням $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)\colon \mathrm{cc}(Q \times Q) \to \mathrm{cc}(Q)$.

Теорема 2. *Відображення* $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)\colon \mathrm{cc}(Q \times Q) \to \mathrm{cc}(Q)$ *гомеоморфне проектуванню* $\mathrm{pr}_1 \colon Q \times Q \to Q$.

Доведення. Скористаємось характеризаційною теоремою Торуньчика і Веста для проектування паралельно Q [7]. За цією теоремою, крім умови продовження параметризованих селекцій, для відображення $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)$ потрібно довести властивість пошарової диз'юнктної апроксимації, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ знайти два відображення $f_\varepsilon, g_\varepsilon \colon \mathrm{cc}(Q \times Q) \to \mathrm{cc}(Q \times Q)$, що задовольняють умови:

1) $d'(f_\varepsilon, 1_{\mathrm{cc}(Q \times Q)}) < \varepsilon, \ d'(g_\varepsilon, 1_{\mathrm{cc}(Q \times Q)}) < \varepsilon$;

2) $f_\varepsilon(\mathrm{cc}(Q \times Q)) \cap g_\varepsilon(\mathrm{cc}(Q \times Q)) = \varnothing$;

3) $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1) f_\varepsilon = \mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1) g_\varepsilon = \mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)$.

Маючи $\varepsilon > 0$, знаходимо $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{1-n} < \varepsilon$. Означимо відображення $f'_\varepsilon, g'_\varepsilon \colon Q \times Q \to Q \times Q$ формулами

$$f'_\varepsilon\left((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty\right) = \left((x_i)_{i=1}^\infty, (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)\right),$$

$$g'_\varepsilon\left((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty\right) = \left((x_i)_{i=1}^\infty, (y_1, \ldots, y_n, 1, 1, \ldots)\right)$$

і приймемо $f_\varepsilon = \mathrm{cc}(f'_\varepsilon)$, $g_\varepsilon = \mathrm{cc}(g'_\varepsilon)$. Легко бачити, що означені таким чином відображення $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ мають потрібні властивості.

Теорема 2 має скінченновимірний аналог.

Теорема 3. *Нехай* $\mathrm{pr}_1 \colon I^m \times I^n \to I^m$ — *проектування, де* $n \geq 2$. *Тоді відображення* $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1)$ *гомеоморфне проектуванню* $\mathrm{pr}_1 \colon Q \times Q \to Q$.

Доведення. Будемо слідувати схемі доведення теореми 2. Нам знадобиться скінченновимірний аналог твердження 1. Будемо розглядати k-вимірний куб як початкову грань Q_k в Q. Нехай $\pi_k \colon Q \to Q_k$ — проектування.

Застосувавши до комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} Q \times Q & \xrightarrow{\pi_m \times \pi_m} & Q_m \times Q_n \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ Q & \xrightarrow[\pi_m]{} & Q_m \end{array}$$

функтор cc, з того, що пара горизонтальних відображень є ретракцією в категорії відображень (вертикальних стрілок), робимо висновок, що відображення $\mathrm{cc}(\mathrm{pr}_1) \colon \mathrm{cc}(Q_m \times Q_n) \to \mathrm{cc}(Q_m)$ задовольняє умову продовження параметризованих селекцій.

Залишається показати, що це відображення задовольняє умову пошарової диз'юнктної апроксимації. Нехай $\varepsilon > 0$. Позначимо через h пошарову