УДК 519.3:62-50

Т. А. Комлева (Одес. политехн. ун-т)

О ВРЕМЕНИ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

For a nonlinear antagonistic differential game of two players on a manifold, we suggest a method of the solution of pursuit problem and determine the time during which the catching is guaranteed.

Для нелінійної антагоністичної диференціальної гри двох осіб на многовиді пропонується спосіб розв'язання задачі переслідування і будується час, що гарантує піймання.

В настоящей статье развиваются идеи, опубликованные в [1–5], и используются методы теории хронологического исчисления А. А. Аграчева – Р. В. Гамкрелидзе [6, 7].

Предположим, что поведение объекта на гладком многообразии M описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{p} g^i(t,x)u^i - \sum_{j=1}^{q} h^j(t,x)v^j, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in M$, $t \in R_+^1$, $x_0 \in M$ — начальное состояние, $u = (u^1, \dots, u^p) \in Q \in \mathrm{Conv}(R^p)$ — управление преследователя, $v = (v^1, \dots, v^q) \in P \in \mathrm{Conv}(R^q)$ — управление убегающего; $\mathrm{Conv}(R^n)$ — пространство выпуклых компактных множеств пространства R^n; $f(\cdot): M \to M$; $g^i(\cdot, \cdot): R_+^1 \times M \to M$, $i = \overline{1,p}$; $h^j(\cdot, \cdot): R_+^1 \times M \to M$, $j = \overline{1,q}$.

Предположение 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $f(\cdot)$ — *гладкая функция по* x;

2. a) $g^i(\cdot, x)$ — *измеримая функция по* t;

   b) $g^i(t, \cdot)$ — *гладкая функция по* x;

3. a) $h^j(\cdot, x)$ — *измеримая функция по* t;

   b) $h^j(t, \cdot)$ — *гладкая функция по* x;

4) *для почти всех* $t \in R_+^1$ *и всех* $x \in M$, $u \in Q$, $v \in P$ *существуют константы* $k \geq 0$, $l \geq 0$ *такие, что*

$$\left| \sum_{i=1}^{p} g^i(t,x)u^i - \sum_{j=1}^{q} h^j(t,x)v^j \right| \leq k|x| + l.$$

Обозначим через $U(V)$ множество всех допустимых управлений преследователя (убегающего), т. е. множество всех измеримых функций $u(\cdot)(v(\cdot))$ таких, что для почти всех $t \in R_+^1$

$$u(t) \in Q \qquad (v(t) \in P).$$

Пусть $N \subset M$ — терминальное множество и $x_0 \notin N$.

Выбирая свои управления из множеств допустимых управлений, каждый из игроков воздействует на процесс (1), преследуя свои цели.

Цель преследователя — вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество N за кратчайшее время, цель убегающего — уклонить траекторию процесса (1) от встречи с терминальным множеством на всем полубесконечном интервале времени или, если это невозможно, максимально оттянуть момент встречи.

Предположение 2. *Будем считать, что убегающий первым выбирает свое допустимое управление, а затем преследователь, зная управление убегающего, выбирает свое допустимое управление.*

© Т. А. КОМЛЕВА, 2001

гомотетію куба Q_n з центром в нулі та коефіцієнтом $1-\varepsilon/2$. Приймемо $f'_\varepsilon = \mathrm{cc}(1_{Q_m} \times h)$ і нехай

$$f_\varepsilon(A) = \overline{O}_{\varepsilon/4}(f'_\varepsilon(A)) \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(\mathrm{pr}_1(A))$$

(тут $\overline{O}_\eta(C)$ означає замкнений η-окіл множини C). Нехай K — $\varepsilon/8$-сітка в $Q_m \times Q_n$. Для кожного $C \in \mathrm{cc}(Q_m \times Q_n)$ приймемо

$$s(C) = \{a \in C \mid \text{існує } k \in K, \text{ для якого } d'(k, C) = d'(k, a)\}.$$

Тепер приймемо $g_\varepsilon(A)$ рівним опуклій оболонці множини $A \cup s(A)$. Елементарні геометричні міркування показують, що відображення f_ε, g_ε є шуканими.

3. Відкриті питання. З теореми 1 випливає, що гіперпростір компактних опуклих множин від непорожньої відкритої підмножини тихоновського куба I^{ω_1} є тихоновським многовидом. Л. Монтехано [1] довів, що простір $\mathrm{cc}(U)$, де U — відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^n$, гомеоморфний $U \times Q \times [0, 1)$.

***Питання* 1.** Нехай U — відкрита підмножина тихоновського куба I^{ω_1}. Чи простір $\mathrm{cc}(U)$ гомеоморфний $U \times I^{\omega_1} \times [0, 1)$?

***Питання* 2.** Нехай $\mathrm{Cone}(I^{\omega_1})$ — конус над I^{ω_1}, що розглядається з природною опуклою структурою. Чи простір $\mathrm{cc}(\mathrm{Cone}(I^{\omega_1}))$ гомеоморфний $\mathrm{Cone}(I^{\omega_1})$?

Відповідь на це питання була б ствердною, якби вдалося показати, що $\mathrm{Cone}(I^{\omega_1})$ — єдиний з точністю до гомеоморфізму компактний абсолютний ретракт ваги ω_1 з єдиною точкою зліченного характеру, доповнення до якої зв'язне.

1. *Montejano L.* The hyperspace of compact convex subsets of an open subset of $\mathbb{R}^n$ // Bull. Pol. Acad. Sci. – 1987. – **35**, № 11, 12. – P. 739 – 799.
2. *Nadler S. B., Quinn J., Stavrokas N. M.* Hyperspaces of compact convex sets // Pacif. J. Math. – 1989. – **83**. – P. 441 – 462.
3. *Nykyforchyn O. R.* Hyperspaces of convex compact subsets: algebraic and topological properties // Мат. студії. – 1996. – № 5. – С. 57 – 64.
4. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. – 1981. – **31**, № 3. – С. 3 – 62.
5. *Щепин Е. В.* О тихоновских многообразиях // Докл. АН СССР. – 1979. – **246**, № 3. – С. 551 – 554.
6. *Щепин Е. В.* Конечномерный бикомпактный абсолютный окрестностный ретракт метризуем // Там же. – 1977. – **233**, № 3. – С. 304 – 307.
7. *Toruńczyk H., West J.* Fibrations and bundles with Hilbert cube manifold fibers // Mem. AMS. – 1989. – № 406.

Одержано 16.11.99

Будем говорить, что преследование можно завершить за время $T>0$ из начального состояния $x_0 \in M$, если для каждого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ существует допустимое управление преследователя $u(\cdot)$ такое, что существует момент времени $0<t(u,v)\le T$, для которого $x(t(u,v),u,v)\in N$.

Будем также считать, что выполняется условие Л. С. Понтрягина [1], т. е.

$$G(t,x)Q \stackrel{*}{-} H(t,x)P \neq \varnothing$$

для почти всех $(t,x)\in R_+^1 \times M$, где

$$G(t,x)Q = \left\{ \sum_{i=1}^{p} g^i(t,x)u^i \mid u\in Q \right\}, \quad H(t,x)P = \left\{ \sum_{j=1}^{q} h^j(t,x)v^j \mid v\in P \right\}.$$

При рассмотрении данной задачи в линейном случае существенное значение имеет возможность записать решение динамической системы в явном виде с помощью формулы Коши [1, 4, 5]. В нашем случае система (1) является нелинейной, поэтому воспользуемся теорией хронологического исчисления [6, 7], которая позволит нам это сделать.

Для этого перепишем систему (1) в виде

$$\dot{x} = x \circ \left(f + \sum_{i=1}^{p} g_t^i u^i(t) - \sum_{j=1}^{q} h_t^j v^j(t) \right), \quad x(0)=x_0, \tag{1'}$$

где f, g_t^i, $i=1,\dots,p$, h_t^j, $j=1,\dots,q$, — соответствующие векторные поля на многообразии M.

Тогда согласно [6, 7] можно записать решение системы $(1')$ в виде

$$x(t) = x_0 \circ \overrightarrow{\exp}\int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{p} g_\tau^i u^i(\tau) + \sum_{j=1}^{q} h_\tau^j v^j(\tau) \right) d\tau, \tag{2}$$

где $\overrightarrow{\exp}\int_0^t X_\tau d\tau$ — правая хронологическая экспонента, порожденная векторным полем X_τ, $\tau\in R$, на многообразии M.

Применив к (2) формулу вариации, получим

$$x(t) = x \circ \overrightarrow{\exp}\int_0^t e^{\tau ad f}\left(\sum_{i=1}^{p} g_\tau^i u^i(\tau) + \sum_{j=1}^{q} h_\tau^j v^j(\tau) \right) d\tau \circ e^{tf},$$

где $e^{\tau ad f} = \overrightarrow{\exp}\int_0^\tau ad f\, d\theta$, так как векторное поле f стационарно.

Теперь сформулируем и докажем достаточное условие завершения преследования. Для этого сделаем некоторые дополнительные построения.

Обозначим через L множество функций $\xi(t,x)$ таких, что:

1) $\xi(\cdot,x)$ — измерима на R_+^1;

2) $\xi(t,\cdot)$ — гладкая на M;

3) $|\xi(t,x)| \le k|x| + l\cdot$ для почти всех $(t,x)\in R_+^1\times M$,

а через $P(x_0)$ обозначим следующее множество функций:

$$\left\{ \eta(\cdot) \mid \eta(t) = x \circ \overrightarrow{\exp}\int_0^t e^{\tau ad f}\xi_\tau d\tau \circ e^{tf},\ \xi(\cdot,\cdot)\in L \right\}.$$

Замечание. Легко видеть, что каждое $\eta(\cdot)\in P(x_0)$ является решением системы

$$\dot{x} = f(x) + \xi(t,x), \qquad x(0)=x_0. \tag{3}$$

Определим множество $M(t,x_0)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \varnothing, & \text{если для любых } \tau\in[0,t] \text{ и } \eta(\cdot)\in P(x_0),\ \eta(\tau)\notin N, \\ \{\xi(\cdot,\cdot) & \mid \text{если существует } \tau^*\in[0,t] \text{ такое, что } \eta(\tau^*)\in N\}. \end{cases}$$

т. е. преследование будет завершено за время $\alpha(x_0, v) \le T(x_0)$. Теорема доказана.

Пример. Пусть дифференциальная игра описывается системой

$$\dot{x} = x + x(u-v), \quad x(0) = 1, \tag{5}$$

где $x \in R^1$, $u \in [-3, 3]$, $v \in [-1, 1]$, $N = [-1/2, 1/2]$ — терминальное множество.

Заметим, что для любых допустимых управлений игроков имеет место включение $u - v \in [-4, 4]$.

Проверим выполнение условий предположения 1 для системы (5). Очевидно, что функции $f(x) \equiv x$; $g(t, x) \equiv x$; $h(t, x) \equiv x$ являются гладкими по x, и для почти всех $t \ge 0$, $x \in R^1$ и допустимых $u(\cdot), v(\cdot)$ имеет место неравенство

$$|x(u(t) - v(t))| \le 4|x|,$$

т. е. $k = 4$ и $l = 0$.

Очевидно, что в данной игре выполнено условие Л. С. Понтрягина:

$$x[-3, 3] \overset{*}{-} x[-1, 1] = x[-2, 2] \ne \varnothing.$$

Рассмотрим следующее вспомогательное дифференциальное включение:

$$\dot{x} \in x(1 + [-4, 4]), \quad x(0) = 1, \tag{6}$$

множество достижимости которого для любого $t \ge 0$ имеет вид

$$X(t) = [e^{-3t}, e^{5t}].$$

Как видно, для любых допустимых управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ соответствующая траектория системы (5) является решением системы (6). А так как справедливо следующее свойство множества достижимости $X(t)$:

1) для всех $t \in [0, \ln(2)/3)$ $X(t) \cap N = \varnothing$;

2) для всех $t \in [\ln(2)/3, \infty)$ $X(t) \cap N \ne \varnothing$,

то перевести решение системы (4) на терминальное множество N быстрее, чем за время $t = \ln(2)/3$, нельзя.

Зафиксируем некоторый момент времени $T \ge 0$. Построим множество $M(T, x_0)$ гладких по x и измеримых по t функций $\xi(t, x)(|\xi(t, x)| \le 4|x|)$, которые соответствуют решениям уравнения

$$\dot{x} = x + \xi(t, x), \quad x(0) = 1, \tag{7}$$

попадающим на терминальное множество до момента времени T. Очевидно, что

если $0 \le T < \ln(2)/3$, то $M(T, x_0) = \varnothing$;

если $T = \ln(2)/3$, то $M(T, x_0) = \{\xi(\cdot, \cdot) \mid \xi(t, x) = -4x, \ (t, x) \in [0, T] \times R^1\}$;

если $T > \ln(2)/3$, то $M(T, x_0) = \{\xi(\cdot, \cdot) \mid \xi(t, x) \in F(t, x), \ (t, x) \in [0, T] \times R^1\}$, где

$$F(t, x) = \begin{cases} x[-4, 4], & (t; x) \in \left[0, \dfrac{3T - \ln(2)}{8}\right) \times R^1, \\ x[-4, 4], & (t, x) \in \left[\dfrac{3T - \ln(2)}{8}, T\right] \times \left(-\infty, e^{3T - 3t - \ln(2)}\right), \\ -4x, & (t, x) \in \left[\dfrac{3T - \ln(2)}{8}, T\right] \times \left[e^{3T - 3t - \ln(2)}, +\infty\right). \end{cases}$$

Тогда $M(T, t, x_0)$ имеет следующий вид:

если $0 \le T < \ln(2)/3$, то $M(T, t, x_0) = \varnothing$ для всех $t \in [0, T]$;

если $T = \ln(2)/3$, то $M(T, t, x_0) = -4x$ для всех $t \in [0, T]$;

если $T > \ln(2)/3$, то

$$M(T, t, x_0) = [-4x, 4x] \quad \text{для всех} \quad t \in \left[0, \frac{3T - \ln(2)}{8}\right),$$

$$M(T, t, x_0) = \begin{cases} [-4x, 4x], & x \in \left(-\infty, e^{3T-3t-\ln(2)}\right), \\ -4x, & x \in \left[e^{3T-3t-\ln(2)}, +\infty\right), \end{cases} \quad \text{для всех } t \in \left[\frac{3T-\ln(2)}{8}, T\right].$$

Поскольку $f(x) \equiv x$, то нетрудно показать, что

$$e^{t\,\mathrm{ad}\,f} M(T, t, x_0) \equiv M(T, t, x_0),$$

$$e^{t\,\mathrm{ad}\,f}(x[-3, 3] - xv) \equiv x[-3, 3] - xv.$$

Рассмотрим теперь

$$\alpha(T, x_0, v) = \min_{\alpha \in [0, T]} \Big\{T - \alpha \mid e^{t\,\mathrm{ad}\,f} M(T, t, x_0) \cap e^{t\,\mathrm{ad}\,f}(x[-3, 3] - xv) \ne \varnothing$$

$$\text{для почти всех } \tau \in [0, \alpha]\Big\}.$$

1. Если $T \in [0, \ln(2)/3)$, то $\alpha(T, x_0, v) \equiv T$ для всех допустимых $v(\cdot)$, так как $M(T, t, x_0) = \varnothing$ для всех $t \in [0, T]$.

2. Если $T = \ln(2)/3$, то

$$\alpha(T, x_0, v) = \begin{cases} 0 & \text{для } v(\cdot) \equiv 1, \\ t_v \in (0, T) & \text{для допустимого управления } v(\cdot) \not\equiv 1. \end{cases}$$

3. Если $\ln(2)/3 \le T < \ln(2)$, то существуют допустимые $v(\cdot)$, для которых $\alpha(T, x_0, v) = 0$, но также существуют допустимые $v(\cdot)$, для которых $\alpha(T, x_0, v) = t_v > 0$. Например, если $v(\cdot) \equiv -1$, то $\alpha(T, x_0, v) = \dfrac{\ln(2) - T}{2}$.

4. Если $T \ge \ln(2)$, то для всех допустимых $v(\cdot)$ $\alpha(T, x_0, v) = 0$.

Следовательно,

$$\alpha(x_0, v) = \begin{cases} \ln(2)/3 & \text{для } v(\cdot) \equiv 1, \\ \ln(2) & \text{для } v(\cdot) \equiv -1, \\ t_v \in (\ln(2)/3, \ \ln(2)) & \text{для других допустимых } v(\cdot). \end{cases}$$

Тогда $T(x_0) = \sup\limits_{v \in V} \alpha(x_0, v) = \ln(2)$.

1. *Понтрягин Л. С., Мищенко А. С.* Линейная дифференциальная игра преследования (аналитическая теория) // Мат. сб. – 1986. – **13**, № 2. – С. 131–158.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
3. *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1992. – 261 с.
4. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
5. *Григоренко Н. Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 198 с.
6. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб. – 1978. – **107**, № 4. – С. 467–532.
7. *Гамкрелидзе Р. В., Аграчев А. А., Вахрамеев С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1989. – **35**. – С. 5–107.
8. Aubin J.-P., Cellina A. Differential inclusions. – Heidelberg: Springer, 1984.

Получено 07.07.99,
после доработки — 07.12.99