УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЕМКОСТЕЙ КОНДЕНСАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. III

We complete the development of the theory of interior capacity of condensers in a locally compact space started at the two previous parts of the paper. A condenser is understood as an ordered finite collection of sets, each of them is considered with the sign + or −, and the closures of opposite-signed sets are mutually disjoint. The theory developed here is rich in content for arbitrary (not necessarily compact or closed) condensers.

We obtain sufficient and (or) necessary conditions for solvability of the principal minimum-problem of the theory of capacity of condensers and show that, under fairly general assumptions, these ones form a criterion. We pose and solve extremal problems, which are dual to the principal minimum-problem, but in contrast to the last one, are always solvable (even in the case of a nonclosed condenser). For all mentioned extremal problems, we describe potentials of minimal measures and investigate properties of extremals. As an auxiliary result, we solve the well-known problem on existence of a condenser measure.

The theory developed here includes as special cases principal results of the theory of capacity of condensers in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with respect to classical kernels.

Завершено побудову теорії внутрішніх ємностей конденсаторів у локально компактному просторі, розпочату у перших двох частинах роботи. Конденсатор трактується як впорядкована скінченна сукупність множин, кожній з яких приписано знак + або −, причому замикання різнознакових множин попарно диз'юнктні. Побудована теорія є змістовною для довільних (не обов'язково компактних чи замкнених) конденсаторів.

Отримано достатні та (або) необхідні умови розв'язності основної мінімум-проблеми теорії ємностей конденсаторів, що при досить загальних припущеннях утворюють критерій. Знайдено постановки та розв'язано екстремальні задачі, які є дуальними до основної мінімум-проблеми, але на відміну від останньої, завжди розв'язні (навіть у випадку незамкненого конденсатора). У всіх згаданих екстремальних задачах отримано опис потенціалів мінімальних мір та досліджено властивості екстремалей. Як допоміжний результат розв'язано відому задачу про існування міри конденсатора.

Побудована теорія містить у собі як частинні випадки основні результати теорії ємностей конденсаторів у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, відносно класичних ядер.

В настоящей части работы завершается построение теории внутренних емкостей конденсаторов в (отделимом) локально компактном пространстве X, начатое в [1, 2]. Без дополнительных указаний сохраняются все принятые в [1, 2] предположения и используются понятия и обозначения; нумерация пунктов продолжена. В пп. 13 – 15 продолжено исследование основной минимум-проблемы этой теории — $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-*задачи* о минимуме энергии $\kappa(\mu, \mu)$ в классе $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ (здесь $\mathcal{A}$ — (m, p)-конденсатор, κ — ядро, a — p-мерный положительный вектор). Предмет исследования — существование *минимальных* мер λ:

$$\lambda \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a), \qquad \kappa(\lambda, \lambda) = \inf_{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)} \kappa(\mu, \mu) =: w_\kappa(\mathcal{A}, a).$$

Ранее в работах автора [3 – 5] было доказано, что даже в случае классических ядер (Ньютона, Грина, Рисса) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и замкнутого, но не компактного конденсатора инфимум энергии в классе $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$, вообще говоря, не является достижимым минимумом. Существенная некомпактность исследуемой минимум-проблемы обусловила следующую терминологию: $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача называется *разрешимой*, если минимальная мера λ существует.

Исследование проблемы разрешимости проводится в (единственном представляющем сложность) случае некомпактного конденсатора $\mathcal{A}$. В случае положительно определенного ядра κ возникающие при этом трудности преодолеваются на пути использования в надлежащих полуметрических пространствах знакопеременных мер (с полуметрикой, индуцированной из предгильбертова пространства $\mathcal{E}$) как сильной, так и слабой топологий. Для реализации этой концептуальной идеи в [2] (см. также [6]) из совокупности всех положительно определенных ядер выделен класс $\mathcal{A}$-*согласованных* ядер, т. е. ядер, для которых сильная и слабая топологии в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})\cap\mathcal{E}$ удовлетворяют следующему свойству:

($\mathcal{A}C$) *если* $(\mu_s)_{s\in S}$ — *сильная направленность Коши в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})\cap\mathcal{E}$ *с* $\sup\limits_{s\in S}|\mu_s|(X)<\infty$ *и* μ — *ее слабая предельная точка, то* $\mu\in\mathcal{E}$ *и* $\mu_s\to\mu$ *сильно.*

При условии $\mathcal{A}$-согласованности ядра существует *экстремальная* в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче мера γ, являющаяся, по определению, как сильным, так и $\mathcal{A}$-*слабым* пределом некоторой *минимизирующей* в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче направленности мер [2]. Поэтому исследование проблемы существования минимальной меры λ сводится к доказательству существования экстремальной меры γ_0, удовлетворяющей соотношению $\gamma_0\in\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$.

В теореме 12.1 из [2] утверждается, что если κ $\mathcal{A}$-согласованно, $\mathcal{A}$ замкнут, A^+ и A^- κ-*разделены*[1] и $\operatorname{cap}A<\infty$, то $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима для всех a. (В случае $I^-=\varnothing$ указанные достаточные условия близки к тому, чтобы быть одновременно и необходимыми, — см. теорему 12.2 из [2].) Напротив, в п. 14 настоящей части работы доказано, что если $\operatorname{cap}A=\infty$, то для достаточно широкого класса ядер существует континуальное множество векторов a, для которых $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача не разрешима; при надлежащих условиях на $\mathcal{A}$ и κ получено его полное описание (см. п. 15).

Полученные в пп. 14, 15 условия на a, достаточные и (или) необходимые для разрешимости $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи, даются (явно или неявно) в терминах экстремалей в надлежащей вспомогательной вариационной задаче; ее постановке и исследованию посвящен п. 13. В случае, когда множества индексов I^+ и I^- одноточечны, эта вспомогательная задача дуальна с известной задачей о существовании *меры конденсатора* [7]; в пп. 13.4 задача о существовании меры конденсатора решена в общем случае некомпактного $\mathcal{A}$.

В связи с отмеченной существенной некомпактностью основной минимум-проблемы (даже для замкнутого конденсатора; ср. с теорией емкостей множеств [8]) возникает задача о нахождении постановок таких экстремальных задач, которые были бы дуальны с $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачей, но, в отличие от последней, уже были бы *всегда* разрешимыми (даже для незамкнутого $\mathcal{A}$). Такие задачи сформулированы и решены в п. 16. Пункт 17 содержит ряд утверждений о непрерывности соответствующих экстремальных характеристик.

13. Вспомогательная экстремальная задача. Всюду в пп. 13 – 15 предполагаем выполненным естественное условие $w_\kappa(\mathcal{A}, a)<\infty$. Кроме того, пусть κ $\mathcal{A}$-*совершенно*[2] и $\mathcal{A}$ замкнут. Поскольку в этих условиях случай $I^-=\varnothing$ и случай II полностью исследованы в [2], то предположим также, что $I^-\neq\varnothing$ и $\kappa\geq 0$. Для произвольного $I_\circ\subset I$ обозначим

---

[1] Множества A^+ и A^- называются κ-разделенными [1], если сужение κ на $A^+\times A^-$ ограничено.

[2] Ядро $\mathcal{A}$-совершенно [2] тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{A}$-согласованно и имеет следующее свойство:

($\mathcal{A}SD$) *если* $(\mu_s)_{s\in S}\subset\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})\cap\mathcal{E}$ *с* $\sup|\mu_s|(X)<\infty$ *сильно сходится к* μ' *и* μ'' *из* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})\cap\mathcal{E}$, *то* $\mu'=\mu''$.

$$CI_\circ := I \setminus I_\circ, \quad A_{I_\circ} := \bigcup_{i \in I_\circ} A_i, \quad A^+_{I_\circ} := A_{I_\circ} \cap A^+, \quad A^-_{I_\circ} := A_{I_\circ} \cap A^-.$$

13.1. Зафиксируем множество индексов J такое, что $I^+ \subseteq J \subseteq I$, и обозначим

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J) := \left\{ \mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \colon \mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i, a_i) \ \forall i \in J \right\},$$

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) := \inf_{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J)} \kappa(\mu, \mu).$$

Очевидно, справедлива оценка $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) \le w_\kappa(\mathcal{A}, a)$, и поэтому $0 \le \le w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) < \infty$.[3] При этом $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = 0$, если $\operatorname{cap} A_i = \infty$ для всех $i \in J$ (ср. с леммой 4.4 из [1]). Заметим также, что функция конденсатора $w_\kappa(\cdot, a, J)$ не возрастает.

Лемма 13.1. *Пусть* $\{\mathcal{K}\}$ *обозначает направленное по отношению* $\prec$ *множество всех компактных конденсаторов* $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$. *Тогда*

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} w_\kappa(\mathcal{K}, a, J).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1 из [1].

Задачу о существовании меры $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J)$ с $\|\tilde{\lambda}\|^2 = w_\kappa(\mathcal{A}, a, J)$ назовем $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-*задачей,* а меру $\tilde{\lambda}$ с указанными свойствами — *минимальной* в этой задаче.

Пусть $\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$ обозначает класс всех минимальных в $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задаче мер $\tilde{\lambda}$ с $|\tilde{\lambda}|(X) < \infty$. Очевидно, класс $\widetilde{\mathcal{W}}$ выпуклый. Экстремальную $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задачу назовем *разрешимой* (в классе ограниченных мер), если класс $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$ не пуст.

Лемма 13.2. $\widetilde{\mathcal{W}}$ *содержится в некотором классе эквивалентности в* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Используя выпуклость класса $\widetilde{\mathcal{W}}$ и правило параллелограмма в $\mathcal{E}$, для любых $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in \widetilde{\mathcal{W}}$ находим $\|\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2\| = 0$. Применяя лемму 9.2 из [2], отсюда вследствие ограниченности меры $\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2$ получаем требуемое соотношение $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$.

Следующий подпункт содержит необходимые сведения из геометрии предгильбертовых пространств и результаты, подготовительные для исследования $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задачи.

13.2. Пусть $J \ne I$. Обозначим $a_J := (a'_1, \ldots, a'_p)$, где a'_i равно a_i при $i \in J$ и нулю при $i \in CJ$, $\mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A}, a_J) := \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a_J) \cap \mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^+(A_{CJ}) := := \mathfrak{M}^+(A_{CJ}) \cap \mathcal{E}$. Тогда выполняется

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = \inf_{\nu \in \mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A}, a_J)} p(\nu), \tag{13.1}$$

где

$$p(\nu) := p_{A_{CJ}}(\nu) := \inf_{\omega \in \mathcal{E}^+(A_{CJ})} \|\nu - \omega\|^2.$$

Зафиксируем $\nu \in \mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A}, a_J)$. Мера $P\nu = P_{A_{CJ}} \nu \in \mathcal{E}^+(A_{CJ})$, удовлетворяю-

[3] Если отказаться от предположения $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < \infty$, то величина $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J)$ будет конечной тогда и только тогда, когда $\operatorname{cap} A_i > 0$ для всех $i \in J$ (ср. с леммой 4.3 из [1]).

щая соотношению $\|\nu - P\nu\|^2 = p(\nu)$, называется (*ортогональной*) *проекцией* ν на выпуклый конус $\mathcal{E}^+(A_{CJ})$ [9, с. 139, 140]. Как известно, $P\nu$ определяется с точностью до слагаемого из $\mathcal{E}^+(A_{CJ})$ с нулевой полунормой. Используя свойство $(\mathcal{ASD})$, вследствие леммы 9.2 из [2] заключаем, что *проекция* $P\nu$ *единственна в классе ограниченных мер*.

Кроме того, $P\nu$ существует, если полуметрическое подпространство $\mathcal{E}^+(A_{CJ})$ пространства $\mathcal{E}$ полное [9]. Применяя следствия 9.2 и 9.5 из [2], получаем следующую лемму.

Лемма 13.3. *Если* A_{CJ} *компактно, то проекция* $P\nu$ *существует и единственна.*

Лемма 13.4. *Пусть проекция* $P\nu$ *существует. Тогда выполняется*

$$\kappa(x, P\nu) \geq \kappa(x, \nu) \quad \textit{пр. в. в} \quad A_{CJ}. \tag{13.2}$$

Если мера $P\nu$ *ограничена, то, дополнительно,*

$$\kappa(x, P\nu) = \kappa(x, \nu) \quad P\nu\textit{-почти всюду в } X. \tag{13.3}$$

Доказательство основано на предложении 1.12.4 из [9], леммах 2.2, 5.1 и 5.2 из [1] и проводится по схеме доказательства теоремы 4.16 из [10].

Лемма 13.5. *Пусть мера* $P\nu$ *ограничена, ядро* κ *непрерывно на* $A^+ \times A^-$ *и выполняется либо случай* D,[4] *либо условие* $(\mathcal{A}_\infty)$ [1]. *Тогда справедливы соотношения*

$$\kappa(x, P\nu) \leq \kappa(x, \nu) \qquad \forall x \in S(P\nu), \tag{13.4}$$

$$\kappa(x, P\nu) = \kappa(x, \nu) \quad \textit{пр. в. в} \quad S(P\nu). \tag{13.5}$$

Доказательство. В силу следствия 4.2 и леммы 4.6 из [1] потенциал $\kappa(x, \nu^+)$ непрерывен на A^-. Отсюда, из полунепрерывности снизу в X потенциалов $\kappa(x, \nu^-)$, $\kappa(x, P\nu)$ и соотношения (13.3) аналогично [1] (см. доказательство теоремы 5.2) находим (13.4). Из (13.2) и (13.4) вытекает (13.5). Лемма 13.5 доказана.

Определение 13.1 [10]. *Ядро* κ *удовлетворяет обобщенному принципу максимума, если существует постоянная* $h = h(k) \geq 1$ *такая, что для каждой финитной меры* $\nu \geq 0$ *с* $\kappa(x, \nu) \leq M$ $\forall x \in S(\nu)$ *выполняется* $\kappa(x, \nu) \leq hM$ $\forall x \in X$.

Пример. В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ядро Ньютона $|x-y|^{2-n}$, ядра Грина g_G ($G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, g_G — его обобщенная функция Грина) и ядра Рисс $|x-y|^{\beta-n}$, $0 < \beta \leq 2$, удовлетворяют обобщенному принципу максим[illegible] постоянной $h = 1$, а ядра Рисса при $2 < \beta < n$ — обоб[illegible] максимума с постоянной $h = 2^{n-\beta}$ [10].

Лемма 13.6. *Пусть* $\mathcal{A}$ *компактен,* κ *непрерывно на* A[illegible] *ется обобщенный принцип максимума. Если* h — *постоянная из опре*[illegible] 13.1, *то*

$$(P\nu)(X) \leq h\nu^+(X) \quad \left(= h \sum_{i \in I^+} a_i\right). \tag{1[illegible]}$$

Доказательство. В силу лемм 13.3 и 13.5 проекция $P\nu$ существует и, будучи ограниченной, удовлетворяет (13.5). Из компактности $S(P\nu)$ и свойства $(\mathcal{ASD})$ на основании теорем 2.3 и 2.4 из [8] и следствия 9.2 из [2] выводим, что существует ограниченная мера $\theta \in \mathcal{E}$, сосредоточенная на $S(P\nu)$ и удовлетворяющая соотношениям

[4] Случаем D [2] для краткости называется случай, когда множества A^+ и A^- κ-разделены.

$$\kappa(x,\theta) \geq 1 \quad \text{пр. в. в} \quad S(P\nu), \tag{13.7}$$

$$\kappa(x,\theta) \leq 1 \quad \forall x \in S(\theta). \tag{13.8}$$

Вследствие леммы 5.2 из [1] неравенство в (13.7) и равенство в (13.5) справедливы соответственно $(P\nu)$- и θ-почти всюду в X. Отсюда и из $\kappa \geq 0$ последовательно находим

$$(P\nu)(X) \leq \int \kappa(x,\theta)\, d(P\nu)(x) = \int \kappa(x, P\nu)\, d\theta(x) =$$

$$= \int \kappa(x,\nu)\, d\theta(x) \leq \int \kappa(x,\theta)\, d\nu^+(x).$$

Применяя определение 13.1, из (13.8) получаем неравенство $\kappa(x,\theta) \leq h \;\; \forall x \in X$; подставляя его в последнее соотношение, находим (13.6). Лемма 13.6 доказана.

13.3. Применим результаты из пп. 13.2 к исследованию $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задачи. Получаемые при этом утверждения и используемые понятия при $J = I$ либо тривиальны, либо совпадают с соответствующими утверждениями и понятиями для $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи [1, 2].

Из принятых в пп. 13.1, 13.2 определений непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 13.7. *Если* $\tilde{\lambda}$ *— минимальная мера в* $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$*-задаче, то* $\sum_{i\in CJ} \tilde{\lambda}^i$ *— ортогональная проекция меры* $\sum_{i\in J} \alpha_i \tilde{\lambda}^i$ *на* $\mathcal{E}^+(A_{CJ})$.

Используя леммы 13.4, 13.5 и 13.7 и рассуждая аналогично доказательству теорем 5.1 и 5.2 из [1], получаем следующие две теоремы.

Теорема 13.1. *Пусть* $\tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$. *Тогда справедливы соотношения*:

(a) $\alpha_i a_i \kappa(x,\tilde{\lambda}) \geq \alpha_i \kappa(\tilde{\lambda}^i, \tilde{\lambda})$ *пр. в. в* A_i, $i \in I$;

(b′) $a_i \kappa(x,\tilde{\lambda}) = \kappa(\tilde{\lambda}^i, \tilde{\lambda})$ $\tilde{\lambda}^i$*-почти всюду в* X, $i \in I$,

причем $\kappa(\tilde{\lambda}^i, \tilde{\lambda}) = 0 \;\; \forall i \in CJ$.

Теорема 13.2. *Пусть* $\tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$. *Если* κ *непрерывно на* $A^+ \times A^-$ *и выполняется либо случай* D, *либо условие* $(\mathcal{A}_\infty)$, *то, дополнительно к теореме* 13.1, *справедливы следующие соотношения*:

(b) $a_i \kappa(x,\tilde{\lambda}) = \kappa(\tilde{\lambda}^i, \tilde{\lambda})$ *пр. в. в* $S(\tilde{\lambda}^i)$, $i \in I$;

(c) $\alpha_i a_i \kappa(x,\tilde{\lambda}) \leq \alpha_i \kappa(\tilde{\lambda}^i, \tilde{\lambda})$ *для всех* $x \in S(\tilde{\lambda}^i)$, $i \in I$.

Замечание. При $i \in CJ$ число a_i в соотношениях (a), (b′), (b) и (c) поставлено для единообразия и может быть заменено любым положительным числом.

Для любого $c \geq 0$ обозначим

$$\mathfrak{M}^c(\mathcal{A}, a, J) := \left\{ \mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J) \colon \sum_{i\in CJ} \mu^i(X) \leq c \right\},$$

$$w_\kappa^c(\mathcal{A}, a, J) := \inf_{\mu \in \mathfrak{M}^c(\mathcal{A}, a, J)} \kappa(\mu,\mu).$$

Лемма 13.8. *Пусть* $\mathcal{A}_s \uparrow \mathcal{A}$, $s \in S$, *и либо* $(\mathcal{A}_s)_{s\in S}$ *— направленность всех компактных конденсаторов* $\mathcal{A}_s \prec \mathcal{A}$, *либо* $S = \mathbb{N}$ *и* $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *универсально измеримы. Тогда выполняется* $w_\kappa^c(\mathcal{A}, a, J) = \lim_{s\in S} w_\kappa^c(\mathcal{A}_s, a, J)$.

Доказательство аналогично доказательству лемм 4.1 и 4.2 из [1].

Всюду далее в пп. 13 – 15 предполагаем, что κ непрерывно на $A^+ \times A^-$ и удовлетворяет обобщенному принципу максимума (например, с постоянной h). Обозначим

$$H = H(a_1, \ldots, a_m, h) := h \sum_{i \in I^+} a_i. \tag{13.9}$$

Лемма 13.9. $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = w_\kappa^c(\mathcal{A}, a, J)$ *для всех* $c \geq H$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{A}$ компактен. В силу леммы 13.3 проекция $P\nu$ существует для каждого $\nu \in \mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A}, a_J)$, и поэтому (13.1) можно записать в виде

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = \inf_{\nu \in \mathfrak{M}_\kappa(\mathcal{A}, a_J)} \|\nu - P\nu\|^2.$$

Применяя лемму 13.6, находим $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) \geq w_\kappa^c(\mathcal{A}, a, J)$ $\forall\, c \geq H$. Поскольку обратное неравенство очевидно, то лемма 13.9 в случае компактного $\mathcal{A}$ доказана. Если $\mathcal{A}$ некомпактен, то в ее справедливости убеждаемся, переходя в доказанном равенстве к инфимуму по множеству всех компактных конденсаторов $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$ и применяя леммы 13.1 и 13.8.

Пусть $\mathcal{E}_b$ обозначает множество всех ограниченных мер $\mu \in \mathcal{E}$.

***Следствие* 13.1.** $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = \inf_{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J) \cap \mathcal{E}_b} \|\mu\|^2.$

Лемма 13.9 дает возможность применить к $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задаче методы, разработанные в [2] (пп. 10 – 12) применительно к $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче, и доказать при этом полные аналоги всех полученных там утверждений. Приведем те из них, которые будут использованы ниже для получения углубленных результатов о разрешимости основной минимум-проблемы.

Направленность $(\mu_s)_{s \in S}$ назовем *минимизирующей* в $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задаче, если $(\mu_s)_{s \in S}$ содержится в $\mathfrak{M}^c(\mathcal{A}, a, J)$ для некоторого $c \geq H$ и выполняется $\lim_{s \in S} \|\mu_s\|^2 = w_\kappa(\mathcal{A}, a, J)$. Совокупность всех таких $(\mu_s)_{s \in S}$ обозначим через $\widetilde{\mathbb{M}} = \widetilde{\mathbb{M}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$.

Меру $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ назовем *экстремальной* в $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задаче, если существует направленность $(\mu_s)_{s \in S} \in \widetilde{\mathbb{M}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$, сильно и $\mathcal{A}$-слабо сходящаяся к $\tilde{\gamma}$; класс всех таких мер $\tilde{\gamma}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{W}}_* = \widetilde{\mathcal{W}}_*(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$. Очевидно, что $\widetilde{\mathcal{W}} \subset \widetilde{\mathcal{W}}_*$.

Теорема 13.3. *Класс* $\widetilde{\mathcal{W}}_*$ *непустой и совпадает с множеством всех* $\mathcal{A}$*-слабых предельных точек всевозможных направленностей из* $\widetilde{\mathbb{M}}$. *Для произвольных фиксированных* $(\mu_s)_{s \in S} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ *и* $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{W}}_*$ *выполняется* $\mu_s \to \tilde{\gamma}$ *сильно и слабо.*

***Следствие* 13.2.** $\widetilde{\mathcal{W}}_*$ *содержится в некотором классе эквивалентности в* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Зафиксировав $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{W}}_*(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$, обозначим $J_{\mathrm{sol}}(\tilde{\gamma}) := \{i \in J \colon \tilde{\gamma}^i(X) = a_i\}$.

Лемма 13.10. *Пусть* $j \in J$ *и либо* A_j *компактно, либо* $\operatorname{cap} A_j < \infty$ *и выполняется случай* D. *Тогда* $j \in J_{\mathrm{sol}}(\tilde{\gamma})$ *для всех* $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{W}}_*$.

***Следствие* 13.3.** *В случае* D *верно* $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{cap} A_i = \infty$ $\forall\, i \in J$.

Теорема 13.4. *Пусть либо* A_J *компактно, либо* $\operatorname{cap} A_J < \infty$ *и выполняется случай* D. *Тогда для любого* a $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$*-задача разрешима, причем* $\widetilde{\mathcal{W}} = \widetilde{\mathcal{W}}_*$.

Лемма 13.11. *Пусть существуют мера* $\vartheta \in \mathcal{E}$ *и множество* $J_\vartheta \subset J \cap I^+$

(*аналогично,* $J_\vartheta \subset J \cap I^-$) *такие, что* $\kappa(x,\vartheta) = \zeta_i$ *приблизительно всюду в* A_i, $i \in I$, *где* ζ_i *равно* 1 *при* $i \in J_\vartheta$ *и* 0 *при* $i \in CJ_\vartheta$. *Тогда* $J_\vartheta \subset J_{\mathrm{sol}}(\tilde{\gamma})$ *для всех* $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{W}}_*$.

13.4. В этом подпункте $I^+ = \{1\}$, $I^- = \{2\}$, $\mathcal{A} = (A_1, A_2)$ — $(1,2)$-конденсатор.

Определение 13.2 (ср. с [7]). *Меру* $\sigma = \sigma_{\mathcal{A}} = \sigma(A_1, A_2) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *назовем мерой конденсатора* $\mathcal{A}$, *если выполняется*

$$\kappa(x,\sigma) = \begin{cases} 1 & \textit{пр. в. в } A_1; \\ 0 & \textit{пр. в. в } A_2, \end{cases} \tag{13.10}$$

$$0 \le \kappa(x,\sigma) \le 1 \quad \textit{пр. в. в } \boldsymbol{X}. \tag{13.11}$$

Задача. *Найти условия на* κ *и* $\mathcal{A}$, *достаточные для существования меры* $\sigma_{\mathcal{A}}$.

В случае компактного $\mathcal{A}$ задача о существовании меры конденсатора решена в [7].

Приведенные ниже теорема 13.5 и следствие 13.5 решают эту задачу в случае произвольного (не обязательно компактного) $\mathcal{A}$. Более того, при фиксированном κ полученные здесь достаточные условия являются одновременно и необходимыми.

Далее в настоящем подпункте $J = \{1\}$, $a_1 = 1$. В этих предположениях обозначим

$$w_\kappa(A_1 | A_2) := w_\kappa(\mathcal{A}, a, J).$$

Лемма 13.12. *Предположим, что в классе* $\mathcal{E}_b$ *существует мера* $\sigma_{\mathcal{A}}$. *Тогда* $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$*-задача разрешима и*

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = \|\sigma\|^{-2}, \tag{13.12}$$

$$\tilde{\lambda} := \|\sigma\|^{-2}\sigma \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa). \tag{13.13}$$

Доказательство. Зафиксируем $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J) \cap \mathcal{E}_b$. Из определения 13.2 с помощью леммы 5.2 из [1] находим

$$\|\sigma\|^2 = \sigma(A_1), \tag{13.14}$$

$$\|\sigma\|\,\|\nu\| \ge \kappa(\sigma,\nu) = \nu^+(X) = 1. \tag{13.15}$$

Вследствие (13.15) $\|\sigma\| \ne 0$ и

$$\|\nu\|^2 \ge \|\sigma\|^{-2}. \tag{13.16}$$

Учитывая (13.14), получаем $\tilde{\lambda} := \|\sigma\|^{-2}\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J)$. А так как $\left\|\tilde{\lambda}\right\|^2 = \|\sigma\|^{-2}$, то, применяя следствие 13.1, из (13.16) вследствие произвольности ν выводим (13.12) и (13.13).

Следствие 13.4. *В классе* $\mathcal{E}_b$ *мера* $\sigma_{\mathcal{A}}$ *единственна (если существует).*

Определение 13.3 [11]. *Ядро* κ *удовлетворяет полному принципу максимума, если для каждой финитной меры* $\nu \ge 0$ *с конечной энергией и каждой меры* $\mu \ge 0$ *таких, что* $\kappa(x,\nu) \le \kappa(x,\mu) + b$ *на* $S(\nu)$, *где* $b \ge 0$, *выполняется* $\kappa(x,\nu) \le \kappa(x,\mu) + b$ *в* $\boldsymbol{X}$.

Легко проверить, что в рассматриваемом здесь случае $\kappa \ge 0$ из полного принципа максимума вытекает *принцип максимума Фростмана* [12] (или, что то же самое, обобщенный принцип максимума с $h = 1$), а также что требование финитности меры ν в определении 13.3 можно опустить без изменения определяемого класса ядер.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, полному принципу максимума удовлетворяют ядра Грина (в частности, ядро Ньютона) и ядра Рисса с показателем β, $0 < \beta \leq 2$ [10].

Теорема 13.5. *Предположим, что* κ *удовлетворяет полному принципу максимума. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(i) $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) > 0$;

(ii) *существует* $\tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$;

(iii) *в классе* $\mathcal{E}_b$ *существует мера* $\sigma_{\mathcal{A}}$ *конденсатора* $\mathcal{A}$.

Если хотя бы одно из утверждений (i) – (iii) *выполняется, то*

$$\sigma_{\mathcal{A}} = \frac{\tilde{\lambda}}{w_\kappa(\mathcal{A}, a, J)}.$$

Доказательство. Применяя лемму 9.2 из [2], получаем (ii) $\Rightarrow$ (i). Вследствие леммы 13.12 и единственности мер $\tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$ и $\sigma_{\mathcal{A}} \in \mathcal{E}_b$ (см. лемму 13.2 и следствие 13.4) для доказательства теоремы достаточно доказать импликацию (i) $\Rightarrow$ (iii).

Рассмотрим сначала случай D. Из утверждения (i) заключаем, что $\operatorname{cap} A_1 < < \infty$, поэтому в силу теоремы 13.4 существует $\tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$. Применяя полный принцип максимума, вследствие теорем 13.1 и 13.2 получаем

$$\kappa(x, \tilde{\lambda}) = \begin{cases} w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) & \text{пр. в. в } A_1; \\ 0 & \text{пр. в. в } A_2, \end{cases} \tag{13.17}$$

$$0 \leq \kappa(x, \tilde{\lambda}) \leq w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) \qquad \forall x \in X. \tag{13.18}$$

Следовательно, $\sigma := \tilde{\lambda} / w_\kappa(\mathcal{A}, a, J)$ принадлежит $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}_b$ и удовлетворяет (13.10) и (13.11). Теорема 13.5 в случае D доказана.

В общем случае произвольного $\mathcal{A}$ рассмотрим последовательность компактных конденсаторов $\mathcal{K}_n = (K_1^n, K_2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $\mathcal{K}_n \prec \mathcal{K}_{n+1} \prec \mathcal{A}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = \lim_{n \in \mathbb{N}} w_\kappa(\mathcal{K}_n, a, J); \tag{13.19}$$

в их существовании легко убедиться с помощью леммы 13.1 и свойства монотонности $w_\kappa(\cdot, a, J)$. Тогда для всех достаточно больших n (пусть $\geq n_0$) $w_\kappa(\mathcal{K}_n, a, J)$ конечно и поэтому, в силу леммы 9.4 из [2] и теоремы 13.4, существует $\tilde{\lambda}_n \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{K}_n, a, J, \kappa)$.

Используя соотношение (13.19) и леммы 13.6, 13.7, заключаем, что последовательность $(\tilde{\lambda}_n)_{n \geq n_0}$ принадлежит $\widetilde{\mathbb{M}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$ и поэтому, в силу теоремы 13.3, сильно и слабо сходится к $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{W}}_*(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$. Переходя при необходимости к подпоследовательности и меняя обозначения, на основании [8. с. 166] будем полагать выполненным соотношение

$$\kappa(x, \tilde{\gamma}) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \kappa(x, \tilde{\lambda}_n) \quad \text{пр. в. в } X. \tag{13.20}$$

Заметим, что вследствие непрерывности κ на $A_1 \times A_2$ и компактности $\mathcal{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$, множества K_1^n и K_2^n κ-разделены, поэтому для всех $n \geq n_0$ справедливы соотношения (13.17) и (13.18) с $\tilde{\lambda}_n$, $\mathcal{K}_n$ и K_i^n, $i = 1, 2$, соответственно вместо $\tilde{\lambda}$, $\mathcal{A}$ и A_i, $i = 1, 2$. Переходя в них к пределу по $n \to \infty$ и используя упорядоченность конденсаторов $\mathcal{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$, лемму 5.1 и следствие 2.1 из [1], а также соотношения (13.19), (13.20), получаем

$$\kappa(x,\tilde{\gamma}) = \begin{cases} w_\kappa(\mathcal{A},a,J) & \text{пр. в. в } F_1; \\ 0 & \text{пр. в. в } F_2, \end{cases} \tag{13.21}$$

$$0 \le \kappa(x,\tilde{\gamma}) \le w_\kappa(\mathcal{A},a,J) \quad \text{пр. в. в } X,$$

где $F_i := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_i^n$, $i=1,2$. Для завершения доказательства достаточно показать, что равенства в (13.21) на самом деле выполняются соответственно пр. в. в A_1 и A_2.

Если предположить обратное, то найдется компактное множество $K \subset A_i \setminus F_i$ (для определенности, пусть $i=1$) с $\operatorname{cap} K > 0$ такое, что

$$\kappa(x,\tilde{\gamma}) < w_\kappa(\mathcal{A},a,J) \quad \forall x \in K.$$

Повторяя для последовательности конденсаторов $\mathcal{K}_n' := (K_1^n \cup K,\ K_2^n)$, $n\in\mathbb{N}$, рассуждения, проведенные выше для $\mathcal{K}_n$, $n\in\mathbb{N}$, выводим соотношение (13.21) с $F_1 \cup K$ вместо F_1. Полученное противоречие с выбором K завершает доказательство теоремы 13.5.

Применяя следствие 13.3, получаем следующее утверждение из [13].

***Следствие* 13.5.** *Пусть* κ *удовлетворяет полному принципу максимума. В случае* D *каждое из утверждений* (i) – (iii) *теоремы* 13.5 *равносильно следующему утверждению*:

(iv) $\operatorname{cap} A_1 < \infty$.

***Замечания.* 1.** Пусть κ удовлетворяет полному принципу максимума и выполняется либо случай D, либо условие $(\mathcal{A}_\infty)$. Применение теорем 13.2, 13.5 и определения 13.3 показывает, что в указанных условиях мера $\sigma_{\mathcal{A}} \in \mathcal{E}_b$ (если существует) удовлетворяет следующему, более сильному, чем (13.11), соотношению: $0 \le \kappa(x,\sigma_{\mathcal{A}}) \le 1 \quad \forall x \in X$.

2. Применяя лемму 9.9 из [2] и определение 13.2, получаем следующее утверждение.

Предложение 13.1. *Пусть* A_i, $i=1,2$, *представимы в виде счетного объединения компактных множеств. Полуметрическое пространство* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})\cap\mathcal{E}$ *полно, если в классе* $\mathcal{E}$ *существуют меры конденсаторов* $\sigma(A_1,A_2)$ *и* $\sigma(A_2,A_1)$.

13.5. Применим результаты из пп. 13.4 к исследованию проблемы разрешимости $(\mathcal{A},a,J,\kappa)$-задачи (в частности, $(\mathcal{A},a,\kappa)$-задачи) в общем случае произвольных m и p. Напомним, что классы всех минимальных и, соответственно, экстремальных в $(\mathcal{A},a,\kappa)$-задаче мер обозначены символами $\mathcal{W}=\mathcal{W}(\mathcal{A},a,\kappa)$ и $\mathcal{W}_*=\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,\kappa)$ [1, 2].

Применяя лемму 13.11 и определение 13.2, получаем следующее утверждение.

Лемма 13.13. *Пусть* $J_\circ \subset J$ *такое, что* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *для всех* $i\in J_\circ$, $j \in CJ_\circ$ *и каждое из множеств* $A_{J_\circ}^+$, $A_{J_\circ}^-$ *либо пусто, либо удовлетворяет следующему условию*:

(*) *в классе* $\mathcal{E}$ *существуют меры конденсаторов* $\sigma(A_{J_\circ}^+, A\setminus A_{J_\circ}^+)$ *и* $\sigma(A_{J_\circ}^-, A\setminus A_{J_\circ}^-)$.

Тогда $J_\circ \subset J_{\mathrm{sol}}(\tilde{\gamma})$ *для всех* $\tilde{\gamma} \in \overrightarrow{\mathcal{W}_*}(\mathcal{A},a,J,\kappa)$.

До конца п. 13 ядро κ удовлетворяет полному принципу максимума.

Комбинируя лемму 13.13, теоремы 13.3, 13.5 и теорему 10.1 из [2], получаем следующие две теоремы.

Теорема 13.6. *Пусть* $J \neq I$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\forall i \in J$, $j \in CJ$ *и выполняются следующие условия*:

(c_1) $w_\kappa(A^+|A^-) > 0$, $w_\kappa(A_J^-|A \setminus A_J^-) > 0$;

(c_2) κ $\mathcal{A}'$*-совершенно, где обозначено* $\mathcal{A}' := (A_J^-, A \setminus A_J^-)$.

(В случае $J = I^+$ *второе неравенство в условии* (c_1) *и условие* (c_2) *опускаем.) Тогда для любого* a $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$*-задача разрешима, причем* $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa) = \widetilde{\mathcal{W}}_*(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$.

Теорема 13.7. *Предположим выполненными условия*

$$w_\kappa(A^+|A^-) > 0, \qquad w_\kappa(A^-|A^+) > 0.$$

Тогда для любого a *класс* $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *не пуст и компактен в сильной,* $\mathcal{A}$*-слабой и слабой топологиях, причем* $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa) = \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

Теорема 13.8. *Пусть* $w_\kappa(A^+|A^-) > 0$ *(либо* $w_\kappa(A^-|A^+) > 0$*),* $\operatorname{cap} A < \infty$ *и ядро* κ *удовлетворяет условию* (C_A) [2]. *Тогда справедливо заключение теоремы* 13.7.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и, для определенности, $w_\kappa(A^+|A^-) > 0$. В силу теоремы 13.5 существует $\sigma(A^+, A^-) \in \mathcal{E}_b$. Применяя лемму 13.13 при $J = I$ и $J_\circ = I^+$, находим $I^+ \subset I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$. Отсюда в результате применения леммы 12.2 из [2] при $I_* = I^+$, $I_\vartheta = I^-$ и $\vartheta = \theta_A$, где θ_A — емкостное распределение на A, выводим, что $\gamma \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, и поэтому $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}$. Применяя теорему 10.1 из [2], получаем требуемое.

Замечание. Теоремы 13.6 – 13.8 представляют интерес только в случае неограниченного на $A^+ \times A^-$ ядра κ, так как в случае D аналогичные этим теоремам утверждения установлены при более широких предположениях (см. теорему 12.1 из [2] и теорему 13.4).

14. Условия разрешимости $(\mathcal{A}, a, \kappa)$**-задачи.** Для фиксированных $\mathcal{A}$ и κ в данном пункте получены как достаточные, так и необходимые условия на вектор a, при которых $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима.[5] Условия на a определяются (явно или неявно) в терминах экстремалей во вспомогательной $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задаче при надлежащем J, $J \neq I$.

Напомним, что в этом и следующем пунктах приняты такие предположения (см. п. 13): $I^- \neq \varnothing$, $\mathcal{A}$ замкнут; κ неотрицательно, $\mathcal{A}$-совершенно, непрерывно на $A^+ \times A^-$ и удовлетворяет обобщенному принципу максимума (например, с постоянной h).

14.1. **Теорема 14.1.** *Предположим, что для некоторого* $j \in I^-$ *выполняется*

$$\operatorname{cap} A_j = \infty. \tag{14.1}$$

Тогда $(\mathcal{A}, a, \kappa)$*-задача не разрешима для всех векторов* a, *удовлетворяющих условию*

$$a_j > h \sum_{i \in I^+} a_i \quad (= H). \tag{14.2}$$

Доказательство. Обозначим $J := I \setminus \{j\}$ и рассмотрим возрастающую последовательность компактных конденсаторов $\mathcal{K}_n \prec \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что

[5] Заметим, что все предшествующие утверждения настоящей работы о разрешимости $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи были иного типа: они содержали условия на $\mathcal{A}$ и κ, обеспечивающие разрешимость исследуемой минимум-проблемы для *произвольного* a.

$$\mu_n := \tilde{\lambda} - \sum_{i \in CJ} \left(a_i - \tilde{\lambda}^i(X)\right) \nu_n^i, \qquad n \in \mathbb{N};$$

$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержится в $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$, сходится к $\tilde{\lambda}$ сильно и $\mathcal{A}$-слабо и вследствие соотношений

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) \le \lim_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n\|^2 = \left\|\tilde{\lambda}\right\|^2 = w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) \le w_\kappa(\mathcal{A}, a)$$

принадлежит $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. Согласно определению экстремальной в $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задаче меры [2] отсюда следует справедливость (14.9). Комбинируя (14.9) с условием (c_1), получаем (14.8).

Если $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима, то из (14.9) и теоремы 10.2 из [2] заключаем, что $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, откуда следует (14.7). Обратно, если верно (14.7), то из условия (c_1) получаем $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ и вследствие (14.8) $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. Теорема 14.2 доказана.

Замечание. Достаточные условия для выполнения предположения (c_1) даются теоремами 13.4 и 13.6, а также теоремой 13.5 — в случае одноточечных I^+ и I^-. Из этих утверждений также вытекает совместимость условий $(c_1) - (c_3)$.

14.2. Пусть $j \in I^-$ фиксировано. Обозначим $J := I \setminus \{j\}$ и предположим, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующему условию дизъюнктности:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \ne j. \tag{14.10}$$

Тогда на основании следствия 13.2 для мер из (непустого) класса $\widetilde{\mathcal{W}}_*(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$ находим

$$\tilde{\gamma}^j(X) = \text{const} \qquad \forall \tilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{W}}_*(\mathcal{A}, a, J, \kappa). \tag{14.11}$$

В указанных условиях и обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 14.3. *Пусть выполняются условие* $(\mathcal{A}_\infty)$ *и следующие условия:*

(c_1') $\quad J \subset I_{\mathrm{sol}}(\gamma_0)$ *для некоторого* $\gamma_0 \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$;

(c_2') $\quad a_j < \tilde{\gamma}^j(X)$.

Тогда $(\mathcal{A}, a, \kappa)$*-задача разрешима. Кроме того, справедливо неравенство*

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) < w_\kappa(\mathcal{A}, a). \tag{14.12}$$

Доказательство. Зафиксируем меру $\gamma \in \mathcal{W}_*^\circ(\mathcal{A}, a, \kappa)$ $\;(\subset \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa))$ [2] (пп. 11.4). В силу леммы 10.4 из [2] из условий (14.10) и (c_1') находим $J \subset I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$, и поэтому

$$\gamma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a, J). \tag{14.13}$$

Применяя следствие 11.3 из [2], получаем $\eta_i = \kappa(\gamma^i, \gamma)$ $\forall i \in I$, где η_i, $i \in I$, — числа, определенные теоремой 11.1 из [2]; подставляя эти равенства в теорему 11.4 из [2], имеем

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \gamma) \ge \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma) \quad \text{пр. в. в } A_i, \quad i \in I. \tag{14.14}$$

Применение следствия 11.3 из [2] также показывает, что в случае

$$\kappa(\gamma^i, \gamma) \ne 0 \tag{14.15}$$

выполняется $j \in I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$. Учитывая (14.13), заключаем, что при этом

$$\gamma \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa), \tag{14.16}$$

и поэтому $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима. Кроме того, в случае (14.15) из (14.11), (14.16) и условия (c_2') получаем $\gamma \notin \widetilde{\mathcal{W}}_*(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$, что вместе с (14.16) доказывает (14.12).

Осталось рассмотреть случай, когда

$$\kappa(\gamma^i, \gamma) = 0. \tag{14.17}$$

Тогда $\|\gamma\|^2 = \sum_{i\in J} \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma)$. Пусть $(\mathcal{K}_s)_{s\in S}$ — возрастающая направленность всех компактных конденсаторов $\mathcal{K}_s \prec \mathcal{A}$, а $\tilde{\lambda}_s$, $s \in S$, — мера из $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{K}_s, a, J, \kappa)$ (она существует в силу леммы 9.4 из [2] и теоремы 13.4). Согласно лемме 5.2 из [1], неравенство в (14.14) выполняется $\tilde{\lambda}_s^i$-почти всюду в X для любых $s \in S$ и $i \in I$. Проинтегрируем его по $\tilde{\lambda}_s^i$, а затем полученные неравенства просуммируем по $i \in I$, воспользовавшись при этом (14.17) и соотношением $\tilde{\lambda}_s^i(X) = a_i$ $\forall i \in J$. В результате для каждого $s \in S$ получим

$$\kappa(\gamma, \tilde{\lambda}_s) = \sum_{i\in I} \alpha_i \int \kappa(x, \gamma)\, d\tilde{\lambda}_s^i(x) \ge$$

$$\ge \sum_{i\in I} \frac{\alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma)}{a_i} \tilde{\lambda}_s^i(X) = \sum_{i\in J} \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma) = \|\gamma\|^2.$$

Применяя к крайней левой части неравенство Коши – Буняковского, а затем переходя к пределу по $s \in S$, с помощью леммы 13.1 находим $w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) \ge \ge \|\gamma\|^2$. Отсюда в силу (14.13) получаем, что $\gamma \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$, и поэтому выполняется $\gamma^j(X) = \tilde{\gamma}^j(X)$ (см. (14.11)). Учитывая неравенство $\gamma^j(X) \le a_j$, приходим к противоречию с (c_2'). Следовательно, случай (14.17) невозможен, и теорема 14.3 доказана.

Замечание. Достаточные условия для выполнения предположения (c_1') содержатся в лемме 12.1 из [2] и лемме 13.13. Из этих утверждений также вытекает совместимость условий (c_1') и (c_2').

15. Критерий разрешимости $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи. Зафиксируем $\mathcal{A}$ и κ. Множество всех тех векторов a, для которых $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима, обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa)$ и назовем *множеством разрешимости*. При надлежащих условиях на $\mathcal{A}$ и κ удается получить полное описание множества разрешимости $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa)$ в геометрико-потенциальных терминах (см. приведенные ниже теоремы 15.1 и 15.2). При этом a рассматривается как точка евклидова пространства $\mathbb{R}^p$ с осями Ox_i, $i \in I$.

15.1. Пусть $j \in I^-$ фиксировано и $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию дизъюнктности (14.10). Если κ ограничено на $A^+ \times A^-$, то предположим выполненным условие

$$\operatorname{cap} A \setminus A_j < \infty. \tag{15.1}$$

Если κ не ограничено на $A^+ \times A^-$, то предположим следующее, более сильное, условие:

$$w_\kappa(A^+ | A^-) > 0, \qquad w_\kappa(A^- \setminus A_j \,|\, A^+ \cup A_j) > 0, \tag{15.2}$$

а также дополнительно предположим, что κ удовлетворяет полному принципу максимума, условию (C_A) и $\mathcal{A}'$-совершенно, где обозначено $\mathcal{A}' := := (A^- \setminus A_j, A^+ \cup A_j)$ (в случае $I^- = \{j\}$ второе неравенство в условии (15.2) и условие $\mathcal{A}'$-совершенности опускаем).

Обозначим $J := I \setminus \{j\}$. В силу теорем 13.4 и 13.6 для каждого a вспомогательная $(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$-задача разрешима, причем вследствие условия (14.10) и следствия 13.2

$$\tilde{\lambda}_1^j = \tilde{\lambda}_2^j \quad \forall \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa).$$

Заметим также, что для всех векторов a и a' таких, что $a_i = a_i'$ $\forall i \neq j$, выполняется

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa) = \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a', J, \kappa).$$

Следовательно, (при фиксированных $\mathcal{A}$, κ и j) величина

$$\Lambda := \Lambda(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p) := \tilde{\lambda}^j(X), \qquad \tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa),$$

от a_j и $\tilde{\lambda}$ не зависит, а однозначно определяется заданием $a_1, \ldots, a_{j-1}$, $a_{j+1}, \ldots, a_p$.

Пусть $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$, $L = L(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p)$ — полупрямая в $(\mathbb{R}_+)^p$, заданная уравнениями $x_i = a_i$ $\forall i \neq j$, с естественным отношением упорядоченности между ее точками, и a_L — точка на L с j-й координатой, равной Λ. Обозначим

$$\Omega(\mathcal{A}, \kappa) := \bigcup_{L \| Ox_j} \{x \in L \colon x \leq a_L\}.$$

Теорема 15.1. *В случае* $\operatorname{cap} A_j < \infty$ *справедливо тождество*

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa) = (\mathbb{R}_+)^p.$$

В случае $\operatorname{cap} A_j = \infty$ *справедливы включения*

$$\partial_{(\mathbb{R}_+)^p} \Omega(\mathcal{A}, \kappa) \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa) \subset \Omega(\mathcal{A}, \kappa), \tag{15.3}$$

а при дополнительном условии $(\mathcal{A}_\infty)$ *— следующее тождество*:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa) = \Omega(\mathcal{A}, \kappa). \tag{15.4}$$

Доказательство. Действительно, если $\operatorname{cap} A_j < \infty$, то $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача разрешима для всех $a \in (\mathbb{R}_+)^p$ в силу условия (15.1) и теоремы 12.1 из [2] в случае D или условия (15.2) и теоремы 13.8 в случае неограниченного на $A^+ \times A^-$ ядра κ.

Пусть теперь $\operatorname{cap} A_j = \infty$. Зафиксируем полупрямую $L \| Ox_j$ и точку $a \in \in L$. Если $a = a_L$, то $a_j = \Lambda$ и, следовательно, $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$ для каждого $\tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$. Поэтому

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) = \|\tilde{\lambda}\|^2 \geq w_\kappa(\mathcal{A}, a) \geq w_\kappa(\mathcal{A}, a, J),$$

откуда заключаем, что $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и, следовательно, $a \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa)$. Это доказывает левую часть соотношения (15.3). Чтобы доказать его правую часть, заметим, что если $a \notin \Omega(\mathcal{A}, \kappa)$, то $a_j > \Lambda$ и в силу теоремы 14.2 $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача не разрешима.

Согласно лемме 12.1 из [2] в случае D и лемме 13.13 и теореме 13.5 в случае неограниченного на $A^+ \times A^-$ ядра κ, соответственно из условий (15.1) и (15.2) находим $J \subset I_{\mathrm{sol}}(\gamma)$ $\forall \gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$. Предположив выполненным условие $(\mathcal{A}_\infty)$, из последнего соотношения и теоремы 14.3 получаем разрешимость $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задачи в предположении $a_j < \Lambda$. Это вместе с (15.3) доказывает (15.4). Теорема 15.1 доказана.

Замечания. **1.** Для справедливости каждого из утверждений теоремы 15.1 в отдельности некоторые из принятых выше условий избыточны.

2. Пусть $\mathcal{A}$ — конденсатор в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. В случае $\operatorname{dist}(A^+, A^-) > 0$ всем принятым в теореме 15.1 условиям на κ (включая условие $(\mathcal{A}_\infty)$) удовлетворяют ядра Рисса с показателем $0 < \beta < n$ и ядро Грина g_G, где G — открытое множество, регулярное в смысле разрешимости классической задачи Дирихле. В случае $\operatorname{dist}(A^+, A^-) = 0$ этим условиям удовлетворяют ядра Рисса с показателем $0 < \beta \leq 2$ (и, в частности, ядро Ньютона).

Зафиксируем полупрямую $L \| Ox_j$ и заметим, что $w_\kappa(\mathcal{A}, a)$ как функция от $a \in L$ достигает в точке a_L своего минимального значения, причем

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a_L) = w_\kappa(\mathcal{A}, a, J) \qquad \forall a \in L.$$

***Следствие* 15.1.** *Пусть $a \in L$. В случае $\operatorname{cap} A_j < \infty$ условие $a = a_L$ необходимо (и достаточно) для тождества*

$$w_\kappa(\mathcal{A}, a) = w_\kappa(\mathcal{A}, a_L). \tag{15.5}$$

В случае $\operatorname{cap} A_j = \infty$ условием, достаточным для (15.5), является условие $a \geq a_L$; при дополнительном предположении $(\mathcal{A}_\infty)$ оно же и необходимо.

Доказательство. Если $\operatorname{cap} A_j < \infty$ и верно (15.5), то класс $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ не пуст и содержится в $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, J, \kappa)$, откуда находим $a_j = \Lambda$. Остальные утверждения следствия 15.1 содержатся в теоремах 14.2 и 14.3.

15.2. Рассмотрим случай „обычного" конденсатора $\mathcal{A}$, соответствующий случаю одноточечных индексных множеств: $I^+ := \{1\}$, $I^- := \{2\}$. Предположим, что $\mathcal{A}$ и κ удовлетворяют всем условиям, приведенным в начале пп. 15.1. Тогда для каждого вектора $a = (a_1, a_2)$ существует (и единственна) мера $\tilde{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, \{1\}, \kappa)$. Обозначим

$$\rho := \rho(\mathcal{A}, \kappa) := \frac{\tilde{\lambda}^-(X)}{\tilde{\lambda}^+(X)}. \tag{15.6}$$

Характеристика конденсатора $\mathcal{A}$, определенная посредством (15.6), *инвариантна* относительно выбора a, что очевидно из соображений однородности.[6] Поэтому в случае обычного конденсатора данное в пп. 15.1 описание множества разрешимости $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa)$ принимает следующий геометрически простой вид.

Теорема 15.2. *Описание множества $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \kappa)$ дается теоремой* 15.1 *при $p = 2$ и*

$$\Omega(\mathcal{A}, \kappa) = \left\{ (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 : 0 < \frac{x_2}{x_1} \leq \rho \right\}.$$

Из результатов п. 13 выводим следующие соотношения:

$$\rho(\mathcal{A}, \kappa) = \frac{(P_{A_2}\tilde{\lambda}^+)(X)}{\tilde{\lambda}^+(X)} \leq h, \tag{15.7}$$

где $h \geq 1$ — постоянная, фигурирующая в определении обобщенного принципа максимума. (Очевидно, можно положить $h = 1$, если κ удовлетворяет полному принципу максимума.)

[6] Если дополнительно к принятым предположениям κ удовлетворяет полному принципу максимума, то $\rho(\mathcal{A}, \kappa) = \sigma^-(X)/\sigma^+(X)$, где σ — мера конденсатора $\mathcal{A}$ (см. теорему 13.5).

***Следствие* 15.2.** *Если* $a_2 = ha_1$, *то* $(\mathcal{A}, a, \kappa)$*-задача разрешима для тех и только тех конденсаторов* $\mathcal{A}$, *для которых выполняется либо* $\operatorname{cap} A < \infty$, *либо* $\rho(\mathcal{A}, \kappa) = h$.

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 15.2 и соотношения (15.7).

15.3. Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\kappa(x, y) = |x - y|^{2-n}$ — ядро Ньютона. Очевидно, для каждого замкнутого $(m; p)$-конденсатора $\mathcal{A}$ это ядро непрерывно на $A^+ \times A^-$ и удовлетворяет условию $(\mathcal{A}_\infty)$. Кроме того, оно удовлетворяет полному принципу максимума [10], совершенно [8] (и поэтому удовлетворяет условию (C_A) [2]) и $\mathcal{A}$-совершенно [2, 3, 5]. Следовательно, все доказанные в пп. 3 – 15 настоящей работы утверждения могут быть применены к указанному классическому случаю. Ограничимся формулировкой одного из получаемых при этом несколько неожиданного результата.

Рассмотрим случай (обычного) (1, 2)-конденсатора $\mathcal{A} = (A_1, A_2)$. Обозначим $G := \mathbb{R}^n \setminus A_2$ и предположим, что гринова g_G-емкость множества A_1 конечна:

$$\operatorname{cap}_{g_G} A_1 < \infty. \tag{15.8}$$

Легко проверить, что (15.8) равносильно условию (15.2) (второе неравенство в (15.2) опускаем). Для этого заметим, что оператор ортогонального проектирования P_{A_2} тождествен оператору ньютонова *выметания* на A_2 [10]. Поэтому g_G-емкостное распределение на A_1 [8, 10] с точностью до нормировочного множителя совпадает с $\tilde{\lambda}^+$, где $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^+ - \tilde{\lambda}^-$ — (единственная) мера из (непустого) класса $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{A}, a, \{1\}, \kappa)$ (вектор a произвольным образом фиксирован).

Множество называется *разреженным на бесконечности*, если его образ при преобразовании инверсии относительно сферы $|x| = 1$ разрежен в точке $x = 0$ (см. [10]).

Пусть, для простоты формулировки, G — область. Применяя результаты из [3] о вариации полной массы меры при ее ньютоновом выметании, на основании следствия 15.2 при $h = 1$ и соотношения (15.7) получаем следующее утверждение из [5] (см. также [3]).

***Следствие* 15.3.** *Если* $a_1 = a_2$, *то* $(\mathcal{A}, a, \kappa)$*-задача разрешима тогда и только тогда, когда множество* A_2 *либо имеет конечную ньютонову емкость, либо не разрежено на бесконечности.*

***Замечания.* 1.** Существование множеств, разреженных на бесконечности и имеющих при этом бесконечную ньютонову емкость, доказано в [3].

2. Прибегая к интуитивно-физической терминологии, можно сказать, что при свободном распределении единичного заряда на пластинах пространственного некомпактного конденсатора происходит, вообще говоря, утечка части заряда на бесконечность. Такой неожиданный эффект имеет чисто пространственную природу: в случае плоскости и логарифмического ядра аналогичная экстремальная характеристика инвариантна относительно дробно-линейных преобразований, и применение слабой топологии непосредственно доказывает существование минимального распределения [14, 15].

15.4. Другие примеры конкретных реализаций теории, построенной в пп. 3 – 15, где в качестве κ использованы ядра Ньютона, Рисса, Грина в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, даны в [3 – 5].

16. Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов, дуальные с ее основной минимум-проблемой. Откажемся от всех условий на $\mathcal{A}$ и κ, принятых в пп. 13 – 15. Далее $\mathcal{A}$ — произвольный конденсатор, κ — положительно определенное ядро.

16.1. Наряду с изученной в настоящей работе задачей о минимуме энергии в классе мер $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$, лежащей в основе определения (внутренней) емкости

$$\operatorname{cap}_*\mathcal{A} \ := \ \operatorname{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) \ := \ \frac{1}{w_\kappa(\mathcal{A}, a)}$$

конденсатора $\mathcal{A}$ [2], в невырожденном случае

$$0 < \operatorname{cap}_*\mathcal{A} < \infty \tag{16.1}$$

удобно рассматривать аналогичную минимум-проблему в классе мер $\mathfrak{M}(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A})$ (в принятой в данной работе терминологии — $(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}, \kappa)$-задачу).

Справедливо следующее легко проверяемое утверждение.

Лемма 16.1. *При условии* (16.1) *выполняется тождество*

$$\operatorname{cap}_*\mathcal{A} \ = \ w_\kappa(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}). \tag{16.2}$$

Заметим, что для любого числа $q \in (0, \infty)$ $(\mathcal{A}, a, \kappa)$- и $(\mathcal{A}, qa, \kappa)$-задачи разрешимы либо не разрешимы одновременно, и классы минимальных мер в этих двух задачах связаны между собой соотношением $\mathcal{W}(\mathcal{A}, qa, \kappa) = q\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$; аналогичные тождества справедливы и для соответствующих классов $\mathcal{W}_*$, $\mathbb{M}$ и $\mathcal{M}'_{\mathcal{E}}$.[7]

Ниже для конденсатора $\mathcal{A}$, вектора a и ядра κ будут сформулированы и исследованы некоторые новые минимум-проблемы. Будет показано, что в случае $\mathcal{A}$-согласованного ядра эти минимум-проблемы *дуальны* с $(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}, \kappa)$-задачей (в том смысле, что соответствующие экстремальные характеристики совпадают), но, в отличие от последней, они *всегда разрешимы* (даже в случае незамкнутого $\mathcal{A}$).

Пусть $U \subset \mathcal{E}$ — произвольное выпуклое множество. Обозначим

$$\|U\| := \inf_{\mu \in U} \|\mu\|.$$

(Инфимум по пустому множеству всегда полагаем равным $+\infty$.) Введем следующие определения и обозначения, ниже применяемые при конкретных значениях U.

В случае $\|U\| < \infty$ задачу о существовании меры $\upsilon \in U$ с $\|\upsilon\| = \|U\|$ назовем U-задачей, а меру υ с указанными свойствами — *минимальной* в U-задаче. Класс всех таких мер υ обозначим через $\mathcal{U}$; U-задачу назовем *разрешимой*, если класс $\mathcal{U}$ не пуст.

Нам понадобится следующая лемма из геометрии предгильбертовых пространств.

Лемма 16.2 [8, с. 174]. *Для всех* $\upsilon \in \mathcal{U}$ *и* $\mu \in U$ *справедливо следующее неравенство*:

$$\|\mu - \upsilon\|^2 \le \|\mu\|^2 - \|\upsilon\|^2.$$

Следовательно, $\mathcal{U}$ *содержится в некотором классе эквивалентности в* $\mathcal{E}$.

16.2. Пусть $\mathcal{A}$, a и κ фиксированы. Обозначим через $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\mathcal{A},a,\kappa}$ класс всех мер $\nu \in \mathcal{E}$ таких, что существуют числа $\tau_i = \tau_i(\nu)$, $i \in I$, удовлетворяющие соотношениям

[7] Напомним [2], что $\mathcal{M}'_{\mathcal{E}} = \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ — класс всех сильных предельных точек всевозможных направленностей из $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, \kappa)$.

по $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a) \cap \mathcal{E}$, получаем $w_\kappa(\mathcal{A}, a) \geq \|\nu\|^{-2} > 0$, и поэтому $\operatorname{cap}_* \mathcal{A} \leq \|\nu\|^2$. Ввиду произвольности $\nu \in \hat{\Gamma}$ отсюда следует (16.7).

Лемма 16.5. *Предположим, что емкость* $\operatorname{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *равна либо нулю, либо* $+\infty$. *Тогда справедливо тождество* (16.5).

Доказательство. Вследствие (16.7) достаточно рассмотреть случай $\operatorname{cap}_* \mathcal{A} = 0$. Тогда на основании леммы 4.3 из [1] найдется $i_0 \in I$ с $\operatorname{cap} A_{i_0} = 0$. Отсюда выводим, что мера $\nu = 0$ и числа τ_i, $i \in I$, где $\tau_{i_0} = 1$ и $\tau_i = 0$ $\forall i \neq i_0$, удовлетворяют (16.3) и (16.4). Следовательно, $0 \in \hat{\Gamma}$, и поэтому $\|\hat{\Gamma}\| = 0$, что и доказывает лемму 16.5.

***Доказательства теорем* 16.1 *и* 16.2.** Предположим, что κ $\mathcal{A}$-согласованно. В силу леммы 16.5 доказательство теоремы 16.1 достаточно провести в случае (16.1). В этих условиях класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{E}} := \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_* \mathcal{A}, \kappa)$ не пуст [2] (п. 10). Учитывая (16.2), из [2] (теорема 11.1) выводим, что существует и единствен вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ такой, что

$$\sum_{i \in I} \xi_i = 1$$

и для всех $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}$ выполняется

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \chi) \geq \xi_i \quad \text{пр. в. в } A_i, \quad i \in I.$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}'_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_* \mathcal{A}, \kappa) \subset \hat{\Gamma}_{\mathcal{A}, a, \kappa}. \tag{16.8}$$

Используя (16.2), (16.7) и (16.8), для каждого $\chi \in \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}$ получаем соотношения

$$\|\hat{\Gamma}\|^2 \leq \|\chi\|^2 = w_\kappa(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_* \mathcal{A}) = \operatorname{cap}_* \mathcal{A} \leq \|\hat{\Gamma}\|^2, \tag{16.9}$$

откуда следует тождество (16.5). Теорема 16.1 доказана.

Кроме того, из (16.8) и (16.9) выводим, что при условии (16.1) (или, что равносильно, условии $0 < \|\hat{\Gamma}\| < \infty$) выполняется $\mathcal{M}'_{\mathcal{E}} \subset \hat{\mathcal{G}}$. А поскольку $\mathcal{M}'_{\mathcal{E}}$ и $\hat{\mathcal{G}}$ представляют собой классы эквивалентности в $\mathcal{E}$, то отсюда следует их тождество; (16.6) доказано. Другие утверждения теоремы 16.2, относящиеся к случаю (16.1), вытекают из (16.6) и приведенных выше утверждений о классе $\mathcal{M}'_{\mathcal{E}}$ и векторе ξ, а к случаю $\|\hat{\Gamma}\| = 0$ — из леммы 16.3 и включения $0 \in \hat{\mathcal{G}}$ (см. доказательство леммы 16.5). Теорема 16.2 доказана.

Замечание. В вырожденном случае $\|\hat{\Gamma}\| = 0$ утверждение единственности из теоремы 16.2, вообще говоря, не верно (конечно, при условии $I \neq \{1\}$).

В следствиях 16.1–16.3 и определении 16.1 предполагаем, что ядро κ $\mathcal{A}$-согласованно и выполняется условие (16.1).

***Следствие* 16.1.** *Верно следующее тождество двух классов* (*возможно, как пустых множеств*):

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_* \mathcal{A}, \kappa) = \hat{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, a, \kappa) \cap \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_* \mathcal{A}).$$

Корректность следующего определения вытекает из теоремы 16.2.

Определение 16.1. *Числа* $\tau_i(\mathcal{A}) := \tau_i(\hat{\omega})$, $i \in I$, *где* $\hat{\omega} \in \hat{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, a, \kappa)$, *будем называть* (*внутренними*) *емкостными константами для конденсатора* $\mathcal{A}$.

***Следствие* 16.2.** *Если* $(\mathcal{A}, a, \kappa)$*-задача разрешима, то справедливы тождества*

$$\tau_i(\mathcal{A}) = \frac{\alpha_i \kappa(\lambda^i, \lambda)}{\|\lambda\|^2} \quad \forall \lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa), \quad i \in I. \tag{16.10}$$

Следствие **16.3.** *Если* κ *ограничено на* $A^+ \times A^-$ *и удовлетворяет свойству* (CW) [2, 8], *то справедливы тождества*

$$\tau_i(\mathcal{A}) = \frac{\alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma)}{\|\gamma\|^2} \quad \forall \gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, \kappa), \quad i \in I.$$

Доказательство основано на теоремах 11.1, 11.2 и 11.2′ из [2] и теореме 16.2.

Замечание. Справедливость теорем 16.1 и 16.2 и корректность определения 16.1 не нарушатся, если условие $\mathcal{A}$-согласованности κ заменить условиями компактности $\mathcal{A}$ и непрерывности κ на $A^+ \times A^-$. (Это вытекает из теорем 5.1, 5.3 из [1], теоремы 7.1 из [2] и лемм 16.1, 16.3 – 16.5.) В этом случае $\tau_i(\mathcal{A})$, $i \in I$, представимы в виде (16.10).

16.3. В связи с теоремами 16.1 и 16.2 возникает вопрос о том, насколько можно сузить класс допустимых в $\hat{\Gamma}$-задаче мер, максимально увязав его с $\mathcal{A}$, но не увеличив при этом экстремальную характеристику и сохранив утверждение о разрешимости. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (см. также следующее за ней замечание).

Введем в рассмотрение следующий класс мер (по поводу обозначений см. [2], п. 6):

$$\Gamma := \Gamma_{\mathcal{A},a,\kappa} := \hat{\Gamma}_{\mathcal{A},a,\kappa} \cap \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \leq a \operatorname{cap}_* \mathcal{A}). \tag{16.11}$$

Класс Γ, будучи пересечением двух выпуклых классов, выпуклый. Очевидно,

$$\left\|\hat{\Gamma}_{\mathcal{A},a,\kappa}\right\| \leq \left\|\Gamma_{\mathcal{A},a,\kappa}\right\|. \tag{16.12}$$

Теорема 16.3. *Если ядро* κ $\mathcal{A}$*-согласованно, то справедливы тождества*

$$\left\|\Gamma_{\mathcal{A},a,\kappa}\right\|^2 = \left\|\hat{\Gamma}_{\mathcal{A},a,\kappa}\right\|^2 = \operatorname{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa). \tag{16.13}$$

Пусть, дополнительно, $\left\|\Gamma_{\mathcal{A},a,\kappa}\right\| < \infty$. *Верны следующие утверждения о существовании минимальных в* $\Gamma_{\mathcal{A},a,\kappa}$*-задаче мер, их единственности и свойствах компактности:*

(i) *Класс* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *всех минимальных в* $\Gamma_{\mathcal{A},a,\kappa}$*-задаче мер* ω *не пуст, причем*

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa) = \hat{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, a, \kappa) \cap \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \leq a \operatorname{cap}_* \mathcal{A}). \tag{16.14}$$

(ii) *Если* κ $\mathcal{A}$*-совершенно, то* $\mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *содержится в некотором классе эквивалентности в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$.

(iii) *Если* κ $\overline{\mathcal{A}}$*-согласованно, то класс* $\mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ *сильно и* $\mathcal{A}$*-слабо (а поэтому и слабо) компактен.*

Доказательство. В случае $\|\hat{\Gamma}\| = \infty$ тождества (16.13) следуют из (16.5) и (16.12). Пусть $\|\hat{\Gamma}\| < \infty$. Предположим также, что $\operatorname{cap}_* \mathcal{A} > 0$ (если предположить обратное, то в силу (16.11) имеет место вырожденный случай $\Gamma = \{0\}$, и теорема тривиально выполняется). Для доказательства (16.13) и утверждения (i) достаточно показать, что класс $\hat{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, a, \kappa) \cap \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \leq a \operatorname{cap}_* \mathcal{A})$ не пуст. Это следует из соотношения [2]

$$\mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a\,\mathrm{cap}_*\mathcal{A}, \kappa) \subset \mathcal{M}'_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}, a\,\mathrm{cap}_*\mathcal{A}, \kappa) \cap \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \le a\,\mathrm{cap}_*\mathcal{A}),$$

теоремы 10.1 из [2] и (16.6).

Пусть κ $\mathcal{A}$-совершенно и $(\mu_s)_{s\in S}$ — направленность, порождающая некоторую меру $\mu \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a\,\mathrm{cap}_*\mathcal{A}, \kappa)$ [2]. Тогда $(\mu_s)_{s\in S}$ сильно сходится к μ, а поэтому и к каждой мере $\omega \in \mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ (эквивалентной к μ в $\mathcal{E}$). Используя соотношение (10.1) из [2] и ограниченность ω, в результате применения свойства $(\mathcal{A}SD)$ получаем утверждение (ii).

Пусть κ $\overline{\mathcal{A}}$-согласованно, направленность $(\omega_s)_{s\in S} \subset \mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ фиксирована. Поскольку меры ω_s, $s \in S$, принадлежат одному классу эквивалентности в $\mathcal{E}$, то, очевидно, $(\omega_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\overline{\mathcal{A}})$ (см. [2]). Вследствие леммы 6.3 из [2] для $(\omega_s)_{s\in S}$ существует $\mathcal{A}$-слабая предельная точка $\omega_0 \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \le a\,\mathrm{cap}_*\mathcal{A})$, причем в силу $\overline{\mathcal{A}}$-согласованности $\omega_s \to \omega_0$ сильно. Следовательно, ω_0 эквивалентна в $\mathcal{E}$ к ω_s, $s \in S$, и поэтому $\omega_0 \in \hat{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, a, \kappa) \cap \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \le a\,\mathrm{cap}_*\mathcal{A})$. Применяя (16.14), получаем утверждение (iii).

Замечания. **1.** Результаты этого пункта ранее были известны только в случае $I = \{1\}$ (см. [8]). Отметим, что в отличие от случая $I = \{1\}$ при $I \ne \{1\}$ знак $\le$ в определении (16.11) класса допустимых в $\Gamma_{\mathcal{A},a,\kappa}$-задаче мер нельзя, вообще говоря, опустить, не нарушив при этом справедливости теоремы 16.3 (ср. с теоремой 4.1 из [8]). Это вытекает из следствия 16.1 и того факта, что $(\mathcal{A}, a, \kappa)$-задача не всегда разрешима.

2. Аналогично случаю $I = \{1\}$ [8, с. 175] примем следующее определение.

Определение 16.2. *Пусть κ $\mathcal{A}$-согласованно и $\mathrm{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) < \infty$. Меры из класса $\mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ будем называть (внутренними) емкостными распределениями, ассоциированными с конденсатором $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ замкнут, то для каждого $\omega \in \mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ верно $\omega \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, и ω можно назвать внутренним емкостным распределением на $\mathcal{A}$.*

17. Теоремы о непрерывности. Справедливы следующие утверждения о непрерывности внутренних емкостей конденсаторов, емкостных распределений и емкостных констант.

Теорема 17.1. *Пусть $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ обозначает последовательность универсально измеримых конденсаторов и $\mathcal{A}_n \uparrow \mathcal{A}$. Тогда*

$$\mathrm{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cap}_*(\mathcal{A}_n, a, \kappa). \tag{17.1}$$

Предположим дополнительно, что ядро κ $\overline{\mathcal{A}}$-согласованно и $\mathrm{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) < \infty$, и пусть ω_n, $n \in \mathbb{N}$, — произвольное внутреннее емкостное распределение, ассоциированное с $\mathcal{A}_n$. Тогда каждая $\mathcal{A}$-слабая предельная точка ω последовательности $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является внутренним емкостным распределением, ассоциированным с конденсатором $\mathcal{A}$, и

$$\omega_n \to \omega \quad \textit{сильно}. \tag{17.2}$$

Если, кроме того, $\mathrm{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) > 0$, то

$$\tau_i(\mathcal{A}) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \tau_i(\mathcal{A}_n) \quad \forall i \in I. \tag{17.3}$$

Доказательство. Соотношение (17.1) является прямым следствием утверждения $w_\kappa(\mathcal{A}, a) = \lim_{n\in\mathbb{N}} w_\kappa(\mathcal{A}_n, a)$, доказанного в [1] (лемма 4.2) для произвольного (не обязательно положительно определенного) ядра κ.

Пусть κ $\overline{\mathcal{A}}$-согласованно, $\operatorname{cap}_*\mathcal{A} < \infty$ и ω_n, $n \in \mathbb{N}$, — мера из класса $\mathcal{G}(\mathcal{A}_n, a, \kappa)$ (он не пуст в силу леммы 9.4 из [2] и теоремы 16.3). Если $\operatorname{cap}_*\mathcal{A} = 0$, то $\omega_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, и утверждения теоремы тривиально выполняются. Поэтому пусть $\operatorname{cap}_*\mathcal{A} > 0$. Не ограничивая общности доказательства, будем также предполагать, что $\operatorname{cap}_*\mathcal{A}_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Учитывая упорядоченность $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, из соотношений $\omega_n \in \mathcal{M}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}_n, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}_n, \kappa)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. (16.6) и (16.14)), леммы 4.1 из [1] и теоремы 11.1 из [2], примененных к каждому $\mathcal{A}_n$, выводим, что существует возрастающая последовательность компактных конденсаторов $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ таких, что $\mathcal{K}_n \prec \mathcal{A}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и для каждого $\lambda_n \in \mathcal{W}(\mathcal{K}_n, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}_n, \kappa)$ выполняются соотношения

$$\|\lambda_n - \omega_n\| < n^{-1}, \tag{17.4}$$

$$\left|\frac{\alpha_i \kappa(\lambda_n^i, \lambda_n)}{\operatorname{cap}_*\mathcal{A}_n} - \tau_i(\mathcal{A}_n)\right| < n^{-1} \quad \forall i \in I. \tag{17.5}$$

Обозначим

$$\mu_n := \frac{\operatorname{cap}_*\mathcal{A}}{\operatorname{cap}_*\mathcal{A}_n}\lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17.6}$$

Тогда $\mu_n \in \mathcal{W}(\mathcal{K}_n, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}, \kappa)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и в силу (16.2) и (17.1)

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n\|^2 = \operatorname{cap}_*\mathcal{A} = w_\kappa(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}).$$

Следовательно (см. [2], доказательство теоремы 11.1),

$$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}^\circ_\sigma(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}, \kappa), \tag{17.7}$$

и поэтому $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сильно фундаментальна. Используя (17.1), (17.4) и (17.6), заключаем, что $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ также сильно фундаментальна, а учитывая включения

$$\omega_n \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}_n, \le a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}_n) \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \le a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}), \tag{17.8}$$

получаем $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B}(\overline{\mathcal{A}})$. Применяя лемму 6.3 из [2] и свойство $\overline{\mathcal{A}}$-согласованности ядра, из последнего соотношения и (17.8) выводим, что $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имеет $\mathcal{A}$-слабую предельную точку ω, причем $\omega \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}}, \le a\operatorname{cap}_*\mathcal{A})$ и выполняется (17.2).

Покажем, что ω является внутренним емкостным распределением, ассоциированным с $\mathcal{A}$. В силу последнего соотношения для этого достаточно доказать, что

$$\omega \in \mathcal{M}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, a\operatorname{cap}_*\mathcal{A}, \kappa). \tag{17.9}$$

Это включение вытекает из (17.7) и сильной сходимости $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ к ω, которая, в свою очередь, вытекает из (17.1), (17.2), (17.4) и (17.6).

Из (17.7), (17.9) и [2] (см. доказательство теоремы 11.1) получаем

$$\tau_i(\mathcal{A}) = \tau_i(\omega) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_i \kappa(\mu_n^i, \mu_n)}{\operatorname{cap}_*\mathcal{A}} \quad \forall i \in I. \tag{17.10}$$

Комбинируя (17.1), (17.5), (17.6) и (17.10), находим (17.3). Теорема 17.1 доказана.

Замечание. Справедливость теоремы 17.1 не нарушится, если в ее условиях последовательность универсально измеримых конденсаторов $\mathcal{A}_n \uparrow \mathcal{A}$ заменить на направленное по отношению $\prec$ множество всех компактных конденсаторов $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$. При этом условие $\overline{\mathcal{A}}$-согласованности ядра может быть заменено условием его $\mathcal{A}$-согласованности.

Пусть $(\mathcal{A}_s)_{s \in S}$ — направленность замкнутых конденсаторов и $\mathcal{A}_s \downarrow \mathcal{A}$. Элементарные примеры показывают, что при такой аппроксимации внутренняя емкость конденсатора, вообще говоря, терпит разрыв (даже в случае $I = \{1\}$). Тем не менее, эта функция непрерывна при надлежащих дополнительных условиях (см. также [2], теорема 7.2).

Теорема 17.2. *Пусть для некоторого* $s_0 \in S$ *ядро* к $\mathcal{A}_{s_0}$*-согласованно, ограничено на* $A_{s_0}^+ \times A_{s_0}^-$ *и для каждого* $i \in I$ *верно одно из двух: либо* $\operatorname{cap} A_i^{s_0} < \infty$, *либо* $A_i^{s_0}$ *компактно. Тогда*

$$\operatorname{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) = \lim_{s \in S} \operatorname{cap}_*(\mathcal{A}_s, a, \kappa). \tag{17.11}$$

Предположим дополнительно, что $\operatorname{cap}_*(\mathcal{A}_{s_0}, a, \kappa) < \infty$, *и пусть* ω_s, $s \geq s_0$, — *внутреннее емкостное распределение на* $\mathcal{A}_s$. *Тогда каждая* $\mathcal{A}_{s_0}$*-слабая предельная точка* ω *направленности* $(\omega_s)_{s \geq s_0}$ *является внутренним емкостным распределением на* $\mathcal{A}$ *и*

$$\omega_s \to \omega \quad \textit{сильно}.$$

Если, кроме того, $\operatorname{cap}_*(\mathcal{A}, a, \kappa) > 0$, *то*

$$\tau_i(\mathcal{A}) = \lim_{s \in S} \tau_i(\mathcal{A}_s) \qquad \forall i \in I. \tag{17.12}$$

Доказательство. В силу монотонности $w_\kappa(\cdot, a)$ при доказательстве (17.11) можно предположить, что $\lim\limits_{s \in S} w_\kappa(\mathcal{A}_s, a) < \infty$. Тогда вследствие теоремы 12.1 и леммы 9.4 из [2] существуют $\lambda_s \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_s, a, \kappa)$ $\forall s \geq s_0$, причем соответствующая направленность энергий $\left(\|\lambda_s\|^2\right)_{s \geq s_0}$ ограничена и не убывает, а поэтому фундаментальна в $\mathbb{R}$. Отсюда и из леммы 16.2, примененной к $\mathfrak{M}(\mathcal{A}_s, a)$, $s \in S$, заключаем, что $(\lambda_s)_{s \geq s_0}$ фундаментальна в $\mathcal{E}$. Пусть λ_0 — некоторая ее $\mathcal{A}_{s_0}$-слабая предельная точка; тогда $\lambda_0 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и вследствие $\mathcal{A}_{s_0}$-согласованности ядра $\lambda_s \to \lambda_0$ сильно. Поэтому имеем

$$\|\lambda_0\|^2 = \lim_{s \geq s_0} \|\lambda_s\|^2 = \lim_{s \in S} w_\kappa(\mathcal{A}_s, a) \leq w_\kappa(\mathcal{A}, a). \tag{17.13}$$

Применяя к $(\lambda_s)_{s \geq s_0}$ рассуждения, аналогичные доказательству леммы 12.1 из [2], убеждаемся, что в условиях теоремы $\lambda_0^i(X) = a_i$ $\forall i \in I$, и поэтому $\lambda_0 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, a)$. Следовательно, $w_\kappa(\mathcal{A}, a) < \infty$ и в силу (17.13) $\lambda_0 \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$. Из доказанного вытекает, что $(\lambda_s)_{s \geq s_0}$ сильно сходится к каждому $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, \kappa)$ и выполняется (17.11).

Пусть $\operatorname{cap}_* \mathcal{A}_{s_0} < \infty$ и меры $\omega_s \in \mathcal{G}(\mathcal{A}_s, a, \kappa)$, $s \geq s_0$, фиксированы. Используя (17.11), лемму 16.2, упорядоченность $\mathcal{A}_s$, $s \in S$, и монотонность емкости, легко доказать, что $(\omega_s)_{s \geq s_0}$ принадлежит $\mathbb{B}(\mathcal{A}_{s_0})$ и имеет $\mathcal{A}_{s_0}$-слабую предельную точку ω, причем $\omega \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}, \leq a \operatorname{cap}_* \mathcal{A})$. Вследствие $\mathcal{A}_{s_0}$-согласованности $\omega_s \to \omega$ сильно. Покажем, что $\omega \in \mathcal{G}(\mathcal{A}, a, \kappa)$; для этого достаточно рассмотреть случай $\operatorname{cap}_* \mathcal{A} > 0$ и доказать равенство $\|\omega - \lambda \operatorname{cap}_* \mathcal{A}\| = 0$. А это очевидно в силу доказанных утверждений о сильных сходимостях $(\lambda_s)_{s\geq s_0}$ и $(\omega_s)_{s\geq s_0}$, соотношений (17.11) и $\|\omega_s - \lambda_s \operatorname{cap}_* \mathcal{A}_s\| = 0$, $s \geq s_0$.

Предположим дополнительно, что $\operatorname{cap}_* \mathcal{A} > 0$, и выберем из $(\lambda_s)_{s\geq s_0}$ такую поднаправленность $(\lambda_t)_{t\in T}$, что для каждого $i \in I$ существует предел $\lim\limits_{t\in T} \alpha_i \kappa(\lambda_t^i, \lambda_t) =: \alpha_i \eta_i^\circ$. Используя лемму 9.6 из [2] и (17.11), заключаем, что числа η_i°, $i \in I$, конечны и

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \eta_i^\circ = w_\kappa(\mathcal{A}, a). \tag{17.14}$$

Применяя к $(\lambda_t)_{t\in T}$, λ и числам η_i°, $i \in I$, рассуждения, аналогичные таковым в соответствующей части доказательства теоремы 11.1 из [2], можно доказать, что

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \lambda) \geq \alpha_i \eta_i^\circ \quad \text{пр. в. в } A_i, \quad i \in I. \tag{17.15}$$

Вследствие теоремы 5.3 из [1] из (17.14) и (17.15) находим $\eta_i^\circ = \kappa(\lambda^i, \lambda)$ $\forall i \in I$. Из доказанного следует, что $\kappa(\lambda^i, \lambda)$ — единственная предельная точка направленности $\kappa(\lambda_s^i, \lambda_s)$, $s \geq s_0$, а поэтому и ее предел. Применяя (17.11) и следствие 16.2, получаем требуемое соотношение (17.12). Теорема 17.2 доказана.

Замечание. В случае $I = \{1\}$ теоремы 17.1 и 17.2 известны [8]. В случае $I^- = \{\varnothing\}$, при дополнительных условиях попарных дизъюнктности и κ-разделенности аппроксимирующих множеств, некоторые из утверждений этих теорем доказаны в [12].

18. Заключение. В настоящем исследовании (см. также [6]) объединены методы и подходы, относящиеся к двум развитым ранее областям теории потенциала: с одной стороны, теории емкостей множеств в локально компактном пространстве X относительно согласованного (положительно определенного) ядра κ [8, 12] и с другой — теории емкостей замкнутых конденсаторов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, относительно ядер Ньютона, Рисса, Грина [3 – 5]. Постулируя для произвольного положительно определенного ядра κ в X доказанные в [3 – 5] свойства классических ядер в $\mathbb{R}^n$ о сильной полноте надлежащих метрических пространств знакопеременных мер и о соотношении между сильной и слабой топологиями (ср. с [16]), предложены концепции $\mathcal{A}$-согласованных и $\mathcal{A}$-совершенных ядер, развивающие и обобщающие соответствующие понятия из [8]. Для этих ядер разработан подход к решению экстремальных задач теории потенциала на классах знакопеременных мер Радона в X, не обязательно компактных в слабой или сильной топологиях. Решен ряд конкретных экстремальных задач, в своей совокупности образующих теорию внутренних емкостей произвольных (не обязательно компактных или замкнутых) (m, p)-конденсаторов в X. В частности, получены достаточные и (или) необходимые условия разрешимости основной минимум-проблемы для замкнутого конденсатора, в достаточно общем случае образующие критерий. (Автору не известны другие разработки (даже в евклидовых пространствах), где в аналогичных задачах был бы исследован существенно некомпактный случай и доказаны утверждения о недостижимости исследуемой экстремальной характеристики.) В связи с отмеченной некомпактной природой основной минимум-проблемы (ср. с [8]) найдены постановки и решены дуальные задачи, которые уже всегда разрешимы (даже в случае незамкнутого конденсатора). Во всех задачах получено описание потенциалов минимальных мер и изучены свойства экстремалей.

Построенная теория содержит в себе в качестве частных случаев основные результаты теории внутренних емкостей множеств в X [8], теории ньютоновых, гриновых, риссовых емкостей замкнутых конденсаторов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ [3 – 5], а также теории логарифмических емкостей компактных конденсаторов в $\mathbb{R}^2$ [12, 17]. Однако многие из полученных здесь результатов являются новыми уже в упомянутых классических случаях. В частности, это постановки и решения дуальных экстремальных задач, при условии $\mathcal{A}$-согласованности позволившие построить содержательную теорию для произвольных (не обязательно замкнутых) конденсаторов, а также результаты, относящиеся к конденсаторам с пересекающимися однознаковыми пластинами. Отметим, что в рамках предложенного в настоящей работе подхода, включающего в себя определение класса допустимых в основной минимум-проблеме мер в виде линейной комбинации классов нормированных мер, сосредоточенных на A_i, $i \in I$, и естественно возникающие при этом понятия эквивалентности в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}$-слабой сходимости, теорию внутренних емкостей конденсаторов с пересекающимися пластинами удалось построить с той же отмеченной выше полнотой и общностью, что и для конденсаторов без пересечений (ср. с [17]).

1. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168 – 189.
2. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. II // Там же. – № 4. – С. 466 – 488.
3. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Там же. – 1986. – **38**, № 4. – С. 431 – 437.
4. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I, II // Там же. – 1990. – **42**, № 4. – С. 494 – 500; № 11. – С. 1475 – 1480.
5. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. I, II // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350 – 1360; 1996. – **48**, № 5. – С. 603 – 613.
6. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории потенциала в локально компактных пространствах. – Киев, 1998. – 72 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 98.9).
7. *Kishi M.* Sur l'existence des mesures des condensateurs // Nagoya Math. J. – 1967. – **30**. – P. 1 – 7.
8. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139 – 215.
9. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
11. *Cartan H., Deny J.* Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique // Acta sci. math. – 1950. – **12**. – P. 81 – 100.
12. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135 – 352.
13. *Zorii N.* On existence of a condenser measure // Мат. ст. – 2000. – **13**, № 2. – С. 181 – 189.
14. *Bagby T.* The modulus of a plane condenser // J. Math. and Mech. – 1967. – **17**, № 4. – P. 315 – 329.
15. *Тамразов П. М.* О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала. – Киев, 1980. – С. 3 – 13. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.25).
16. *Cartan H.* Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. math. France. – 1945. – **73**. – P. 74 – 106.
17. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 4 (244). – С. 155 – 156.

Получено 23.11.98