УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ БЕСОВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. II

We obtain order estimates of linear widths of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some values of parameters p and q different from those considered in the first part of the paper.

Одержано порядкові оцінки лінійних поперечників класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких значень параметрів p і q, відмінних від розглянутих у першій частині.

Настоящая статья является второй частью работы [1], поэтому в ней продолжена нумерация теорем, лемм, формул и т. д. Первое из утверждений, которое будет доказано ниже, дополняет результат теоремы 1 из [1].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, $r_1 > 1 - 1/q$. *Тогда при* $2 \le \theta \le q$ *выполняется соотношение*

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1 - 1/2 + 1/q}. \tag{40}$$

Доказательство. Сначала получим оценку сверху. Пусть числа n, M и M_s, а также операторы Λ_M и Λ_{M_s} имеют тот же смысл, что и в [1] (см. доказательство оценки сверху в теореме 1). Рассмотрим некоторую функцию $f(\cdot) \in B^r_{p,\theta}$ и оценим величину $\| f(\cdot) - \Lambda_M f(\cdot)\|_q$. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение [2, с. 25].

Лемма 4. *Пусть* $1 \le p < q < \infty$ *и* $f \in L_p(\pi_d)$. *Тогда*

$$\| f(\cdot)\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f,\cdot)\|_p 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)}\right)^q,$$
$$\|s\|_1 = s_1 + \ldots + s_d.$$

Поскольку согласно условию теоремы $2 \le p' < q < \infty$, то, применяя к $\| f(\cdot) - \Lambda_M f(\cdot)\|_q$ лемму 4 (с заменой индекса p на p') и учитывая связь оператора Λ_M с операторами Λ_{M_s}, имеем

$$\| f(\cdot) - \Lambda_M f(\cdot)\|_q \ll \left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{\|s\|_1(1/p'-1/q)}\left\|\delta_s(f,\cdot) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f,\cdot)\right\|_{p'}\right)^q\right)^{1/q}. \tag{41}$$

Далее, используя соотношение (3), из (41) получаем

$$\| f(\cdot) - \Lambda_M f(\cdot)\|_q \ll \left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{\|s\|_1(1/p'-1/q)}2^{\|s\|_1(1/p-1/p')}\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$
$$= \left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{\|s\|_1(1/p-1/q)}\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right)\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q}, \tag{42}$$

и, учитывая, что (согласно теореме А [1])

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 2001, т. 53, № 6

$$\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right) << 2^{\|s\|_1/p'} M_s^{-1/2},$$

из (42) имеем

$$\|f(\cdot)-\Lambda_M f(\cdot)\|_q << \left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{\|s\|_1(1/p-1/q)}2^{\|s\|_1/p'}M_s^{-1/2}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{\|s\|_1(1-1/q)}M_s^{-1/2}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q}. \qquad (43)$$

Теперь, подставляя в (43) вместо M_s соответствующие значения и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\|f(\cdot)-\Lambda_M f(\cdot)\|_q <<$$

$$<< \left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{\|s\|_1(1-1/q)}2^{-n/2-\alpha(n-(s,\gamma))/2}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-n/2-\alpha n/2}\left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{\|s\|_1(1-1/q)}2^{\alpha(s,\gamma)/2}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q} \le$$

$$\le 2^{-n/2-\alpha n/2}\left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{(s,\gamma)(1-1/q+\alpha/2)}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-n/2-\alpha n/2}\left(\sum_{(s,\gamma')>n}\left(2^{-(s,\gamma)(r_1-1+1/q-\alpha/2)}2^{(s,r)}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^q\right)^{1/q} = \mathcal{J}_5. \qquad (44)$$

Для продолжения оценки $\mathcal{J}_5$ выберем параметр α из соотношения $r_1 - 1 + 1/q - \alpha/2 > 0$ и затем воспользуемся неравенством (11). В результате будем иметь

$$\mathcal{J}_5 \le 2^{-n/2-\alpha n/2}2^{-n(r_1-1+1/q-\alpha/2)}\left(\sum_{(s,\gamma')>n}2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-n(r_1-1/2+1/q)}\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 2^{-n(r_1-1/2+1/q)} \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1-1/2+1/q}. \qquad (45)$$

Из (43) – (45), согласно определению линейного поперечника, получаем искомую оценку сверху для $\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$:

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) << \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1-1/2+1/q}.$$

Переходя к установлению в (40) соответствующей оценки снизу, напомним, что ее достаточно установить при $\nu = d$. Кроме того, поскольку при $1 < p \le 2$ $B^r_{p,\theta} \supset B^r_{2,\theta}$ и при $\theta \ge 2$ $B^r_{2,\theta} \supset B^r_{2,2}$, то для получения оценки снизу поперечника $\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$ достаточно оценить снизу поперечник $\lambda_M\left(B^r_{2,2}, L_q\right)$.

По заданному M выберем число μ из условий $M \asymp 2^\mu\mu^{d-1}$ и $2^\mu\mu^{d-1} \ge 2M$ и положим $S = \{s : (s, 1) = \mu\}$. Обозначим через $\mathcal{J}_\mu$ множество тригонометрических полиномов с номерами гармоник из $\bigcup_{s\in S}\rho(s)$. Тогда, как отмечено в [1],

$$\lambda_M\left(B^r_{2,2}, L_q\right) >> \lambda_M\left(B^r_{2,2}\cap\mathcal{J}_\mu, L_q\cap\mathcal{J}_\mu\right). \qquad (46)$$

Далее, пусть $f(\cdot) \in L_2 \cap \mathcal{J}_\mu$. В силу теоремы Б [1] получаем

$$\|f\|_{B^r_{2,2}} \asymp 2^{\mu r_1}\left(\sum_{s\in S}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2\right)^{1/2} \asymp 2^{\mu r_1}\left(\sum_{s\in S}2^{-(s,1)}\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}}\left|\delta_s f^j\right|^2\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp 2^{\mu(r_1-1/2)}\left(\sum_{s\in S}\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}}\left|\delta_s f^j\right|^2\right)^{1/2}. \tag{47}$$

Отсюда заключаем, что если $f(\cdot) \in L_2 \cap \mathcal{J}_\mu$ и

$$\left(\sum_{s\in S}\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}}\left|\delta_s f^j\right|^2\right)^{1/2} << 2^{-\mu(r_1-1/2)}, \tag{48}$$

то $C_1 f(\cdot) \in B^r_{2,2} \cap \mathcal{J}_\mu$, $C_1 > 0$.

Иными словами, любому шару $C_1 2^{-\mu(r_1-1/2)} B_2^{2^\mu|S|}$ радиуса $C_1 2^{-\mu(r_1-1/2)}$ из пространства $l_2^{2^\mu|S|}$, согласно соотношениям (47) и (48), сопоставляется единичный шар из $B^r_{2,2} \cap \mathcal{J}_\mu$. Кроме этого, если $g(\cdot) \in L_q \cap \mathcal{J}_\mu$, $q \ge 2$, то в силу теоремы Литтлвуда – Пэли, неравенства (11) и теоремы Б [1] имеем

$$\|g\|_q >> \left\|\left(\sum_{s\in S}|\delta_s(g,\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_q = \left\|\left(\sum_{s\in S}|\delta_s(g,\cdot)|^2\right)^{q/2}\right\|_1^{1/q} \ge$$

$$\ge \left\|\sum_{s\in S}|\delta_s(g,\cdot)|^q\right\|_1^{1/q} = \left(\sum_{s\in S}\|\delta_s(g,\cdot)\|_q^q\right)^{1/q} >>$$

$$>> \left(\sum_{s\in S}2^{-(s,1)}\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}}\left|\delta_s g^j\right|^q\right)^{1/q} \asymp 2^{-\mu/q}\left(\sum_{s\in S}\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}}\left|\delta_s g^j\right|^q\right)^{1/q}. \tag{49}$$

Таким образом, из (46) – (49) получаем оценку

$$\lambda_M\left(B^r_{2,2}, L_q\right) >> 2^{-\mu(r_1-1/2+1/q)}\lambda_M\left(B_2^{2^\mu|S|}, l_q^{2^\mu|S|}\right). \tag{50}$$

Для продолжения оценки (50) воспользуемся известным соотношением (см., например, [3, с. 206])

$$\lambda_M\left(B_2^{2^\mu|S|}, l_q^{2^\mu|S|}\right) = \lambda_M\left(B_{q'}^{2^\mu|S|}, l_2^{2^\mu|S|}\right), \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1,$$

и затем неравенством

$$\lambda_M\left(B_{q'}^{2^\mu|S|}, l_2^{2^\mu|S|}\right) \ge d_M\left(B_{q'}^{2^\mu|S|}, l_2^{2^\mu|S|}\right).$$

В результате (50) примет вид

$$\lambda_M\left(B^r_{2,2}, L_q\right) >> 2^{-\mu(r_1-1/2+1/q)}d_M\left(B_{q'}^{2^\mu|S|}, l_2^{2^\mu|S|}\right). \tag{51}$$

Далее нам понадобится вспомогательное утверждение из [4].

Лемма 5. *Пусть* $M < n$. *Тогда при* $1 \le p \le 2 \le q < \infty$

$$d_M\left(B_p^n, l_q^n\right) \asymp \max\left\{n^{1/q-1/p},\ \min\left\{1, n^{1/q}M^{-1/2}\right\}\sqrt{1-\frac{M}{n}}\right\}. \tag{52}$$

При рассматриваемых условиях с помощью соотношения (52) имеем

$$d_M\left(B_{q'}^{2^\mu|S|}, l_2^{2^\mu|S|}\right) \gg \min\left\{1, \left(2^\mu \mu^{d-1}\right)^{1/2}\left(C2^\mu \mu^{d-1}\right)^{-1/2}\right\}\sqrt{1-\frac{M}{2^\mu \mu^{d-1}}} \geq$$
$$\geq C_2 > 0. \tag{53}$$

Из (53) и (51) получаем искомую оценку снизу

$$\lambda_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right) \gg 2^{-\mu(r_1-1/2+1/q)} \asymp \left(M^{-1}\log^{d-1}M\right)^{r_1-1/2+1/q}.$$

Таким образом, оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

***Следствие* 3.** *Пусть* $1<p\leq 2$, $p'<q<\infty$, $r_1>1-1/q$. *Тогда*

$$\lambda_M\left(W_{p,\alpha}^r, L_q\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1-1/2+1/q}. \tag{54}$$

Оценка (54) следует из теоремы 3 при $p=2$, $\theta=2$ и соотношения $B_{2,2}^r = W_{2,\alpha}^r$.

***Замечание* 1.** Соотношение (54) ранее было приведено Э. М. Галеевым [5].

Теорема 4. *Пусть* $2\leq p<q<\infty$, $r_1>1/p-1/q$. *Тогда при* $2\leq\theta\leq q$ *справедлива оценка*

$$\lambda_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1-1/p+1/q}. \tag{55}$$

Доказательство. Оценка сверху в (55) следует из соответствующей оценки приближения класса $B_{p,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^\gamma(f,\cdot)$, $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$ [6]. Для того чтобы получить соответствующую оценку снизу для поперечника $\lambda_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right)$, заметим следующее. Поскольку в силу неравенства Никольского для $f(\cdot)\in B_{p,\theta}^r$, $p\geq 2$,

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$
$$\ll \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} 2^{\|s\|_1(1/2-1/p)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} =$$
$$= \left(\sum_s 2^{(s,r-1/p+1/2)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} = \|f\|_{B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}}$$

($r-1/p+1/2$ обозначает вектор с координатами $r_j-1/p+1/2$, $j=\overline{1,d}$), то из этого соотношения заключаем, что имеет место вложение $B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}\subset$ $\subset B_{p,\theta}^r$. Поэтому, воспользовавшись результатом теоремы 3 (положив $p=2$ и $r=r-1/p+1/2$), получим

$$\lambda_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right) \gg \lambda_M\left(B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}, L_q\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1-1/p+1/q}.$$

Теорема доказана.

***Следствие* 4.** *Пусть* $2\leq p<q<\infty$, $r_1>1/p-1/q$. *Тогда*

$$\lambda_M\left(W_{p,\alpha}^r, L_q\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1-1/p+1/q}. \tag{56}$$

Отметим, что оценка сверху в (56) является следствием оценки приближения класса $W_{p,\alpha}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье [7], а соответствующая оценка снизу следует из теоремы 4 в силу вложения $B^r_{p,2} \subset$ $\subset W^r_{p,\alpha}$, $p \geq 2$.

Замечание 2. Оценка (56) ранее была приведена Э. М. Галеевым в [5].

Теорема 5. *Пусть* $r_1 > 0$, *а* p, q *и* θ *удовлетворяют условиям*:

а) $2 \leq q < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$;

б) $1 \leq q < 2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$.

Тогда

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1 + (1/2 - 1/\theta)_+}.$$

Доказательство. Оценки сверху в обоих случаях следуют из соответствующих оценок приближения классов $B^r_{p,\theta}$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье [6]. Оценки снизу получим, рассмотрев последовательно несколько случаев при условии $\nu = d$.

Пусть сначала $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$ и $2 \leq \theta \leq \infty$. В этом случае мы установим оценку для колмогоровского поперечника $d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$, из которой и получим искомую оценку для линейного поперечника $\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$. Отметим, что при получении оценки колмогоровского поперечника $d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$ существенную роль будет играть один результат из [8], для формулировки которого нам понадобится несколько обозначений.

Для натурального n положим

$$\overline{S}_n = \{s : (s, 1) = n, \ s_j \text{ — четные числа}, \ j = \overline{1, d}\},$$

$$\overline{Q}_n = \bigcup_{s \in \overline{S}_n} \rho^+(s), \qquad \rho^+(s) = \left\{k : k = (k_1, \ldots, k_d), \ 2^{s_j - 1} \leq k_j < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, d}\right\}$$

и обозначим через $T(\overline{Q}_n)$ множество полиномов, содержащих гармоники с „номерами" из множества $\overline{Q}_n$. Известно, что $|\overline{Q}_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

В [8] установлено, что для классов $H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$ имеет место оценка

$$d_M\left(H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n), L_q\right) >> M^{-r_1}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1 + 1/2},$$

$r_1 > 0$ и $q \in (1, \infty)$. Воспользовавшись этой оценкой, легко получить оценку снизу для колмогоровского поперечника класса $B^r_{p,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)$.

Действительно, если $f \in H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$, то согласно теореме о характеризации класса $H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$ (см. [2, с. 32]) имеет место неравенство $\|A_s(f, x)\|_\infty <<$ $<< 2^{-(s, r)}$, $s \in \overline{S}_n$. Следовательно, для $\|f\|_{B^r_{p,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)}$ имеем оценку

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)} = \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} <<$$

$$<< \left(\sum_{s \in \overline{S}_n}{}' \, 2^{(s, r)\theta} 2^{-(s, r)\theta}\right)^{1/\theta} = \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 1\right)^{1/\theta} \asymp n^{(d-1)/\theta}.$$

Из полученного соотношения заключаем, что если $f \in H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$, то функция $g(x) = C_3 n^{-(d-1)/\theta} f(x)$, $C_3 > 0$, принадлежит классу $B^r_{p,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)$, $1 \leq$ $\leq p \leq \infty$.

Таким образом, согласно установленному соответствию между классами $H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$ и $B^r_{p,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)$ можем записать

$$d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \geq d_M\left(B^r_{p,\theta} \cap T(\overline{Q}_n), L_q\right) \geq d_M\left(H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n), L_q\right) n^{-(d-1)/\theta} >>$$

$$>> \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1} \left(\log^{d-1} M\right)^{1/2-1/\theta}$$

и, следовательно,

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \geq d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) >> \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1} \left(\log^{d-1} M\right)^{1/2-1/\theta}.$$

Пусть теперь $2 \leq q \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < 2$. Здесь, как и в предыдущем случае, мы установим оценку снизу для соответствующего колмогоровского поперечника.

По заданному M выберем n из соотношений $2^n n^{d-1} \asymp M$ и $2^n n^{d-1} > 2M$. Положим $Q'_n = \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s)$ и обозначим через $T(Q'_n)$ множество полиномов, содержащих гармоники с „номерами” из множества $Q'_n = \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s)$. Пусть заданы M функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$, которые будем считать ортонормированными. Рассмотрим в пространстве L_2 отклонение функции $e^{i(k,x)}$, $k \in \in Q'_n$, от ее суммы Фурье порядка M по системе $\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^M$. Полагая $\beta^j_k = \left(\varphi_j, e^{i(k,x)}\right)$, в силу ортонормированности систем функций $\left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k \in Q'_n}$ и $\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^M$ будем иметь $\sum_{k \in Q'_n} \left|\beta^j_k\right|^2 \leq 1$ и, следовательно,

$$\sum_{k \in Q'_n} \sum_{j=1}^M \left|\beta^j_k\right|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{k \in Q'_n} \left|\beta^j_k\right|^2 \leq M.$$

Из этого неравенства заключаем, что существует вектор $k^0 = \left(k^0_1, \ldots, k^0_d\right)$, $k^0 \in \in Q'_n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^M \left|\beta^j_{k^0}\right| \leq \frac{1}{2}$$

и, таким образом,

$$\left\| e^{i(k^0,x)} - \sum_{j=1}^M \beta^j_{k^0} \varphi_j(x) \right\|_2^2 \geq \left\| e^{i(k^0,x)} \right\|_2^2 - \sum_{j=1}^M \left|\beta^j_{k^0}\right|^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = 2^{-(s^0,1)r_1} e^{i(k^0,x)},$$

где вектор $s^0 = \left(s^0_1, \ldots, s^0_d\right)$ выбран по вектору $k^0 = \left(k^0_1, \ldots, k^0_d\right)$ согласно неравенству $2^{s^0_j - 1} \leq \left|k^0_j\right| < 2^{s^0_j}$, $j = \overline{1,d}$. Легко видеть, что функция $g(x)$ принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда

$$\inf_{c_j} \left\| g(x) - \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j(x) \right\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{-(s^0,r)} >> 2^{-nr_1} \asymp \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1}, \quad (57)$$

и поскольку $\{\varphi_j\}_{j=1}^{M}$ — произвольная система функций, то из (57) следует оценка снизу для $d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_2\right)$, $1 \le \theta < 2$, из которой, в свою очередь, следует оценка снизу для $\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$:

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \gg \left(M^{-1}\log^{d-1}M\right)^{r_1}.$$

Теперь рассмотрим последний случай $p=\infty$, $q=1$ и $2 \le \theta \le \infty$. Для установления оценки снизу поперечника $\lambda_M\left(B^r_{\infty,\theta}, L_1\right)$ нам понадобится вспомогательное утверждение. Приведем обозначения, необходимые для его формулировки.

Через $RT(m)$ обозначим множество действительных тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{\substack{|k_j| \le m_j \\ j=\overline{1,d}}} \hat{t}(k)e^{i(k,x)},$$

где $m=(m_1,\ldots,m_d)$ — вектор, m_j — целые неотрицательные числа, $j=\overline{1,d}$.

Пусть далее $k^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$ и

$$\tilde{T}\left(\overline{Q}_n\right) = \left\{ t(x) = \sum_{s\in\overline{S}_n} e^{i(k^s,x)} t'_s(x),\ t'_s(x) \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Лемма 6 [8]. *Пусть* $M \le \frac{1}{4}\left|\overline{Q}_n\right|$. *Тогда для любого подпространства* $\Psi \in L_1(\pi_d)$ *размерности не больше* M *найдется функция* $g(x) \in \tilde{T}\left(\overline{Q}_n\right)$ *такая, что*

$$\left\|\overline{\delta}_s(g,x)\right\|_\infty \le \left|\overline{S}_n\right|^{-1/2}, \quad s \in \overline{S}_n,$$

$$\left(\overline{\delta}_s(g,x) = \sum_{k\in\rho^+(s)} \hat{g}(k)e^{i(k,x)}\right),$$

$$\|g\|_2 \ge C_4(d) > 0$$

и для произвольного $\psi \in \Psi$ *выполнено* $(g,\psi)=0$.

Теперь перейдем непосредственно к установлению искомой оценки, которую, как уже отмечалось выше, достаточно получить при $\nu = d$. По заданному M выберем четное число n из неравенства $\left|\overline{Q}_{n-2}\right| < 4M \le \left|\overline{Q}_n\right|$. Пусть A обозначает некоторый линейный оператор, действующий из L_∞ в L_1, размерность области значений которого ($\dim A$) не превышает M. Тогда $\dim A\left(\tilde{T}\left(\overline{Q}_n\right)\right) \le M$, и поскольку $M \le \frac{1}{4}\left|\overline{Q}_n\right|$, то размерность подпространства $\Omega \subset \tilde{T}\left(\overline{Q}_n\right)$ такого, что $A(\Omega)=0$, будет больше M. Кроме того, в силу леммы 6 найдется функция $g(x)\in\Omega$ такая, что

$$\left\|\overline{\delta}_s(g,x)\right\|_\infty \le \left|\overline{S}_n\right|^{-1/2}, \quad s \in \overline{S}_n,$$

$$\|g\|_2 \ge C_4(d) > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\|g - Ag\|_1 \geq C_6. \tag{62}$$

Наконец, используя определение функции $f(x)$ и неравенство (62), получаем оценку

$$\|f - Af\|_1 = 2^{-nr_1}|S_n|^{1/2} n^{-(d-1)/\theta} \|g - Ag\|_1 \asymp$$
$$\asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \|g\|_1 \geq C_6 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \asymp$$
$$\asymp \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1} \left(\log^{d-1} M\right)^{1/2-1/\theta}.$$

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Оценка снизу поперечника $\lambda_M\left(H_\infty^r, L_1\right)$ ранее получена В. Н. Темляковым [8].

Перед тем как перейти к рассмотрению других соотношений между параметрами p и q, заметим что при доказательстве теоремы 5 мы получили соответствующие оценки колмогоровских поперечников $d_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right)$. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 5′. *Пусть* $r_1 > 0$, *а* p, q *и* θ *подчинены условиям*:

а) $2 \leq q < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$;

б) $1 < q < 2 \leq p < \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$.

Тогда

$$d_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right) \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+}.$$

Заметим, что в теореме 5′, в отличие от теоремы 5, не рассмотрен случай $p = 1$, $q = \infty$. В указанном случае вопрос о порядке колмогоровского поперечника $d_M\left(B_{\infty,\theta}^r, L_1\right)$ остался открытым.

Теорема 6. *Пусть* $1 < q \leq 2$, $r_1 > 1 - 1/q$ *и* $\theta \in [1, q]$. *Тогда*

$$\lambda_M\left(B_{1,\theta}^r, L_q\right) \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1 + 1/q}.$$

Доказательство. Оценка снизу следует из соответствующей оценки колмогоровского поперечника $d_M\left(B_{1,\theta}^r, L_q\right)$ [10], а сверху — из оценки приближения класса $B_{1,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье [10].

Теорема 7. *При* $r_1 > 1/2$ *справедливо соотношение*

$$\lambda_M\left(B_{\infty,1}^r, L_\infty\right) \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1}.$$

Доказательство. Установим оценку сверху. По заданному M подберем n из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и для $f \in B_{\infty,1}^r$ рассмотрим приближающий полином

$$t(x) = \sum_{(s,\gamma)<n} A_s(f,x).$$

Тогда для $\|f - t\|_\infty$ получаем оценку

$$\|f - t\|_\infty = \left\|\sum_s A_s(f,x) - \sum_{(s,\gamma)<n} A_s(f,x)\right\|_\infty = \left\|\sum_{(s,\gamma)\geq n} A_s(f,x)\right\|_\infty =$$
$$= \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{(s,r)}\|A_s(f,x)\|_\infty 2^{-(s,r)} \leq 2^{-nr_1} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{(s,r)}\|A_s(f,x)\|_\infty \leq$$
$$\leq 2^{-nr_1}\|f\|_{B_{\infty,1}^r} \leq 2^{-nr_1}.$$

Отсюда, учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, находим

$$\lambda_M\left(B^r_{\infty,1}, L_\infty\right) << \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1}.$$

Оценка снизу следует из соответствующей оценки колмогоровского поперечника $\lambda_M\left(B^r_{\infty,1}, L_\infty\right)$ [10].

Теорема доказана.

В заключение приведем еще одну оценку линейного поперечника, которая является следствием известных оценок других аппроксимативных характеристик.

Теорема 8. *Пусть* $1 < p \le q \le 2$, $r_1 > 1/p - 1/q$, $1 \le \theta \le \infty$.
Тогда справедлива оценка

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/p + 1/q}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{(1/q-1/\theta)_+}.$$

Эта оценка является следствием результатов, полученных автором в [6] (см. теоремы 2 и 4).

***Замечание* 4.** Вопрос о порядке поперечника $\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$ в случае $1 < q < p \le 2$ остался открытым.

1. *Романюк А. С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 647 – 661.
2. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
3. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
4. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 2. – С. 334 – 351.
5. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гельдера – Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – 189 – 199.
6. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
7. *Галеев Э. М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 2. – С. 197 – 212.
8. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.; Т. 2. – 537 с.
10. *Романюк А. С.* О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 79 – 92.

Получено 07.07.99