УДК 517.5

С. В. Бородачев (Днепропетров. ун-т)

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ „ИНТЕРВАЛЬНЫХ" И „ТОЧЕЧНЫХ" КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КЛАССОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

We consider a problem of optimization of "interval" quadrature formulas in various settings for the class of monotone functions defined on an interval. We also consider a problem of optimization of cubature formulas with fixed knots for classes of functions which are defined on a d-dimensional cube, $d = 2$, 3, … , and are monotonically nondecreasing with respect to every variable.

Розглянуто задачу оптимізації „інтервальних" квадратурних формул (у різних постановках) на класі монотонних функцій, визначених на відрізку, а також задачу оптимізації кубатурних формул, що мають фіксовані вузли, на класах функцій, визначених на d-вимірному кубі, $d = 2$, 3, … , і монотонно неспадних відносно кожної змінної.

1. Задача оптимизации квадратурных формул восходит к работам А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского конца 40-х — начала 50-х годов. Изложение многих полученных в этом направлении результатов можно найти в монографии [1]. Наряду с оптимизационными задачами для формул, использующих значения функций в точках, рядом авторов (см., например, [2 – 4]) рассматриваются задачи оптимизации так называемых „интервальных" квадратурных формул, использующих в качестве информации о функции ее средние значения по некоторым интервалам в области определения. В определенном смысле приближенное интегрирование с помощью таких формул является более естественным, так как во многих случаях результаты измерений представляют собой усреднения измеряемой величины по некоторым интервалам.

Пусть F_d, $d = 1, 2, \dots,$ — класс функций $f\colon [0,1]^d \to [0,1]$, монотонно неубывающих по каждой переменной. Для класса F_1 задача оптимизации приближенного интегрирования рассматривается в следующих постановках. Для каждой пары чисел (x, h) таких, что $0 \le x - h \le x + h \le 1$, определим на классе F_1 следующий функционал:

$$\Phi(f; x, h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt, & \text{если} \quad h > 0; \\ f(x), & \text{если} \quad h = 0. \end{cases}$$

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Обозначим через Q_n множество функционалов $q\colon F_1 \to \mathbf{R}$ (квадратурных формул) вида

$$q(f) = q(f; H_n, X_n, \varphi_n) = \varphi_n(\Phi(f; x_1, h_1), \dots, \Phi(f; x_n, h_n)), \tag{1}$$

где $H_n = (h_1, \dots, h_n)$, $X_n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ таковы, что:

1°) $h_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $h_i > 0$ хотя бы для одного i, $1 \leq i \leq n$, и $\sum_{i=1}^{n} h_i <$ $< 1/2$;

2°) $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$, $I(H_n, X_n) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_i - h_i, x_i + h_i] \subset [0,1]$;

функция $\varphi_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — произвольная. Для $q \in Q_n$ положим

$$R(f; q) = \int_0^1 f(t)\,dt - q(f),$$

$$R(F_1; q) = \sup_{f \in F_1} |R(f; q)|. \tag{2}$$

Множество наборов H_n, удовлетворяющих свойству 1°, обозначим через Θ_n. Пусть $H_n \in \Theta_n$, $X_n \in \mathbf{R}^n$ таковы, что

$$0 \leq x_1 - h_1 \leq x_1 + h_1 \leq \ldots \leq x_n - h_n \leq x_n + h_n \leq 1. \tag{3}$$

Через $Q(H_n, X_n)$ обозначим множество функционалов из Q_n с заданными наборами H_n и X_n. Пусть задан набор $H_n \in \Theta_n$. Через $Q(H_n)$ обозначим множество функционалов из Q_n с заданным набором H_n. Через Q_n^{δ}, $\delta \in (0, 1)$, обозначим множество функционалов из Q_n, для которых $2\sum_{i=1}^{n} h_i = \delta$.

Пусть Q — одно из множеств квадратурных формул $Q(H_n, X_n)$, $Q(H_n)$, Q_n^{δ}.

Задача **1.** Требуется найти величину

$$R(F_1; Q) = \inf_{q \in Q} R(F_1; q) \tag{4}$$

и указать оптимальные квадратурные формулы, т. е. функционалы $q \in Q$, реализующие точную нижнюю грань в правой части (4) (если они существуют).

В работе [2] задача 1 решена для классов функций, удовлетворяющих на отрезке условию Липшица с показателем 1, и множеств квадратурных формул Q_n^{δ} и $Q(H_n, X_n)$. Периодические аналоги задачи 1 для множества квадратурных формул $Q\left(H_n^0\right)$, где $H_n^0 = (h, \ldots, h)$, $h > 0$, рассматривались в работе [3] на классах W_1^r и их обобщениях и в [4] — на классах W_∞^r, $r > 1$. Отметим, что на классах непрерывных функций при $h_1 \to 0, \ldots, h_n \to 0$ квадратурная формула (1) переходит в обычную („точечную") квадратурную формулу. Задача оптимизации таких формул для класса F_1 была решена в [5]; для класса функций, заданных на отрезке и имеющих монотонную и ограниченную первую производную, — в [6]. Для классов функций с монотонной и ограниченной r-й производной, $r = 2, 3, \ldots$, в [7] получена оптимальная „точечная" формула, использующая значения производных.

Задача оптимизации кубатурных формул для классов F_d, $d = 2, 3, \ldots$, рассматривается в следующей постановке. Пусть $n \in \mathbf{N}$ и задано множество узлов $Y_n = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset [0,1]^d$. Множество Y_n и произвольная функция $\varphi_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ порождают кубатурную формулу вида

$$S(f; Y_n, \varphi_n) = \varphi_n(f(y_1), \ldots, f(y_n)). \tag{5}$$

Положим

$$r(F_d; Y_n, \varphi_n) = \sup_{f \in F_d} \left| \int_{[0,1]^d} f(t)\,dt - S(f; Y_n, \varphi_n) \right|,$$

$$r(F_d; Y_n) = \inf_{\varphi_n} r(F_d; Y_n, \varphi_n). \tag{6}$$

***Задача* 2.** Требуется найти величину (6) и указать оптимальные кубатурные формулы (т. е. правила интегрирования φ_n, реализующие точную нижнюю грань в правой части (6)), если они существуют.

Задача 2 — это задача Сарда [8] оптимизации кубатурных формул, имеющих фиксированные узлы. Отметим, что в [9] задача оптимизации приближенного интегрирования функций из классов F_d, $d = 2, 3, \ldots$, рассматривалась в более общей постановке. В этой работе были получены важные порядковые результаты.

В п. 2 данной работы задача 1 решена для класса F_1 и множеств квадратурных формул $Q(H_n, X_n)$, $Q(H_n)$, Q_n^δ. В п. 3 для классов F_d, $d = 2, 3, \ldots$, получена оптимальная кубатурная формула с узлами из фиксированного множества. Отдельно рассмотрен случай, когда множество узлов представляет собой прямоугольную решетку.

2. Получим сначала оценку снизу для погрешности на классе F_1 любой квадратурной формулы вида (1). Нетрудно убедиться, что если $H_n \in \Theta_n$ и $X_n \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяют свойству 2°, то $I(H_n, X_n) = \bigcup_{j=1}^m [p_j, w_j]$, где $m \le n$ и $0 \le p_1 \le w_1 < p_2 \le w_2 < \ldots < p_m \le w_m \le 1$. Пусть $w_0 = 0$, $p_{m+1} = 1$. Обозначим $p(H_n, X_n) = \max\limits_{j=\overline{1, m+1}} (p_j - w_{j-1})$.

Лемма 1. *Для любой квадратурной формулы* $q = q(\cdot\,; H_n, X_n, \varphi_n) \in Q_n$

$$R(F_1; q) \ge \frac{1}{2} p(H_n, X_n) \ge \frac{1}{2(n+1)} \left(1 - 2 \sum_{i=1}^n h_i \right). \tag{7}$$

Лемму 1 можно доказать с помощью рассуждений, повторяющих ход доказательства соотношения (7) из [11].

Пусть $x_0 = h_0 = h_{n+1} = 0$, $x_{n+1} = 1$. Решение задачи 1 для множества квадратурных формул с фиксированными узловыми интервалами содержит следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$, $H_n \in \Theta_n$, $X_n \in \mathbf{R}^n$ *и выполняется условие* (3). *Среди квадратурных формул множества* $Q(H_n, X_n)$ *оптимальной на классе* F_1 *является формула*

$$\overline{q}(f) = \frac{1}{2}(1 - x_n - h_n) + \sum_{k=1}^n \left(h_k + \frac{1}{2}\left(x_{k+1} - h_{k+1} - (x_{k-1} + h_{k-1}) \right) \right) \Phi(f; x_k, h_k). \tag{8}$$

При этом

$$R(F_1; Q(H_n, X_n)) = \frac{1}{2} \max_{k=\overline{1, n+1}} \left(x_k - h_k - (x_{k-1} + h_{k-1}) \right). \tag{9}$$

Доказательство. Получим сначала оценку сверху для погрешности на классе F_1 формулы (8). Введем следующие обозначения: $\upsilon_k = x_k - h_k - (x_{k-1} + h_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n+1$, $\Psi_0(f) = 0$, $\Psi_k(f) = \Phi(f; x_k, h_k)$, $k = 1, \ldots, n$, $\Psi_{n+1}(f) = 1$. Для любой $f \in F_1$ имеем

$$R(f;\overline{q}) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2}v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\Big(2h_k + \frac{1}{2}\big(v_k + v_{k+1}\big)\Big)\Psi_k(f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}+h_{k-1}}^{x_k - h_k} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k\big(\Psi_k(f) + \Psi_{k-1}(f)\big).$$

Учитывая, что f монотонна и $f(x_k - h_k) \le \Psi_k(f)$, $k = 1, \ldots, n+1$, получаем

$$R(f;\overline{q}) \le \sum_{k=1}^{n+1} v_k f(x_k - h_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k\big(\Psi_k(f) + \Psi_{k-1}(f)\big) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k\big(\Psi_k(f) - \Psi_{k-1}(f)\big).$$

С другой стороны, так как $f\big(x_{k-1} + h_{k-1}\big) \ge \Psi_{k-1}(f)$, $k = 1, \ldots, n+1$, то

$$R(f;\overline{q}) \ge \sum_{k=1}^{n+1} v_k f\big(x_{k-1} + h_{k-1}\big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k\big(\Psi_k(f) + \Psi_{k-1}(f)\big) \ge$$

$$\ge -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k\big(\Psi_k(f) - \Psi_{k-1}(f)\big).$$

Таким образом,

$$|R(f;\overline{q})| \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k\big(\Psi_k(f) - \Psi_{k-1}(f)\big).$$

Поскольку $f \in F_1$ и верно (3), то $0 = \Psi_0(f) \le \Psi_1(f) \le \ldots \le \Psi_{n+1}(f) = 1$ и

$$|R(f;\overline{q})| \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\big(\Psi_k(f) - \Psi_{k-1}(f)\big)\max_{j=\overline{1,n+1}} v_j = \frac{1}{2}\max_{j=\overline{1,n+1}} v_j = \frac{1}{2}\,p(H_n, X_n).$$

Учитывая (2) и произвольность выбора $f \in F_1$, получаем $R(F_1;\overline{q}) \le$ $\le p(H_n, X_n)/2$. Так как в силу леммы 1 для любой квадратурной формулы $q \in$ $\in Q(H_n, X_n)$ выполняется неравенство (7), то формула (8) является оптимальной на классе F_1 среди формул из рассматриваемого множества. Равенство (9) очевидно. Теорема 1 доказана.

Решение задачи 1 на классе F_1 для множества квадратурных формул вида (1) с фиксированным набором длин узловых интервалов дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbf{N}$ и набор $H_n \in \Theta_n$. Среди квадратурных формул множества $Q(H_n)$ оптимальной на классе F_1 является формула*

$$q^*(f) = \frac{1}{2(n+1)}\left(1 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(2h_k + \frac{1}{n+1}\left(1 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i\right)\right)\Phi(f; \overline{x}_k, h_k), \tag{10}$$

где

$$\overline{x}_k = \frac{k}{n+1}\left(1 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i\right) + 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

При этом

ты множества K_j следующим образом: $0 \le z_1^j < \ldots < z_{n_j}^j \le 1$, $j = 1, \ldots, d$. Пусть, для удобства, $z_0^j = 0$, $z_{n_j+1}^j = 1$, $j = 1, \ldots, d$, $\overline{u} = (1, \ldots, 1)$, $\overline{0} = (0, \ldots$ $\ldots, 0) \in \mathbf{Z}^d$, $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. Если $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_d)$, $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbf{R}^d$ и $m_j \le k_j$, $j = 1, \ldots, d$, то будем писать $\overline{m} \le \overline{k}$. Пусть $\overline{m}, \overline{k} \in \mathbf{Z}^d$ и $\overline{m} \le \overline{k}$, обозначим $\Pi[\overline{m}, \overline{k}] = \left\{\overline{i} \in \mathbf{Z}^d : \overline{m} \le \overline{i} \le \overline{k}\right\}$. Для каждого $\overline{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in$ $\in \Pi\left[\overline{0}, \overline{n} + \overline{u}\right]$ положим $z_{\overline{i}} = \left(z_{i_1}^1, \ldots, z_{i_d}^d\right)$ и для каждого $\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n} + \overline{u}]$ обозначим $P_{\overline{i}} = \left[z_{i_1-1}^1, z_{i_1}^1\right] \times \ldots \times \left[z_{i_d-1}^d, z_{i_d}^d\right]$. Нетрудно убедиться, что $\bigcup\limits_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}+\overline{u}]} P_{\overline{i}} =$ $= [0, 1]^d$ и $\operatorname{mes}\left(P_{\overline{i}} \cap P_{\overline{j}}\right) = 0$, если $\overline{i} \ne \overline{j}$. Пусть $N : F_d \to \mathbf{R}^n$ — информационный оператор вида $N(f) = (f(y_1), \ldots, f(y_n))$. Для каждой $f \in F_d$ введем кусочно-постоянные функции, полностью определяемые информацией о функции f:

$$G(f; t) = G(Y_n; f; t) = \min\{f(y_s) : y_s \ge t\} \cup \{1\},$$
$$L(f; t) = L(Y_n; f; t) = \max\{f(y_s) : y_s \le t\} \cup \{0\}, \quad t \in [0, 1]^d.$$

***Замечание* 1.** Функция $G(f; \cdot)$ принимает в каждой точке наибольшее, а функция $L(f; \cdot)$ — наименьшее значение, которое может принимать функция из класса F_d с той же информацией, что и у f.

Для $f \in F_d$ зададим множество

$$U(f) = \left\{ \int\limits_{[0,1]^d} g(t)\,dt : g \in F_d \wedge N(g) = N(f) \right\}.$$

Теорема 4. *Пусть $d = 2, 3, \ldots$, $n \in N$. Среди кубатурных формул вида* (5) *с узлами из заданного множества Y_n оптимальной на классе F_d является формула*

$$S(f; Y_n, \overline{\varphi}_n) = \frac{1}{2} \sum_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}+\overline{u}]} \operatorname{mes} P_{\overline{i}} \left(G\left(f; z_{\overline{i}}\right) + L\left(f; z_{\overline{i}-\overline{u}}\right)\right).$$

Доказательство. Задача 2 является частным случаем общей задачи, рассматриваемой в [10]. По теореме 2.4 [10, с. 24] для любой функции $f \in F_d$ получим

$$S(f; Y_n, \overline{\varphi}_n) = \frac{1}{2}(\sup U(f) + \inf U(f)).$$

Учитывая замечание 1, определение $U(f)$ и тот факт, что $G(f; \cdot)$, $L(f; \cdot) \in$ $\in F_d$, имеем

$$S(f; Y_n, \overline{\varphi}_n) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{[0,1]^d} G(f; t)\,dt + \int\limits_{[0,1]^d} L(f; t)\,dt \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}+\overline{u}]} \int\limits_{P_{\overline{i}}} (G(f; t) + L(f; t))\,dt.$$

Поскольку $G(f; t) = G\left(f; z_{\overline{i}}\right)$ и $L(f; t) = L\left(f; z_{\overline{i}-\overline{u}}\right)$, $t \in \operatorname{int} P_{\overline{i}}$, $\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n} + \overline{u}]$, то

$$S(f; Y_n, \overline{\varphi}_n) = \frac{1}{2} \sum_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}+\overline{u}]} \operatorname{mes} P_{\overline{i}} \left(G\left(f; z_{\overline{i}}\right) + L\left(f; z_{\overline{i}-\overline{u}}\right)\right).$$

Теорема 4 доказана.

Пусть $\overline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$ и множество узлов имеет вид

$$Y_{\overline{n}} = Y_{n_1,\dots,n_d} = \left\{\left(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_d}^d\right): i_1 = 1, \dots, n_1, \dots, i_d = 1, \dots, n_d\right\}, \tag{14}$$

где $0 \le x_1^j < \dots < x_{n_j}^j \le 1$, $j = 1, \dots, d$. Полагая $x_0^j = 0$ и $x_{n_j+1}^j = 1$, $j = 1, \dots, d$, для каждого $\overline{i} \in \Pi\left[\overline{0}, \overline{n} + \overline{u}\right]$ обозначим $x_{\overline{i}} = \left(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_d}^d\right)$, при этом множеству узлов соответствуют значения мультииндекса $\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}]$. Очевидно, в рассматриваемом случае $x_{\overline{i}} = z_{\overline{i}}$, $\overline{i} \in \Pi\left[\overline{0}, \overline{n} + \overline{u}\right]$, и $P_{\overline{i}} = \left[x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1\right] \times \dots$ $\dots \times \left[x_{i_d-1}^d, x_{i_d}^d\right]$, $\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n} + \overline{u}]$. Пусть B_d — множество функций β: $\Pi[\overline{u}, \overline{n}] \to \{0, 1\}$, монотонно неубывающих по каждой переменной.

В [11] для данных $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ найдена оптимальная на классе F_2 кубатурная формула среди формул с узлами из всевозможных множеств Y_{n_1,n_2} вида (14). Оптимальная на классе F_d, $d = 2, 3, \dots$, кубатурная формула с узлами из фиксированного множества $Y_{n_1,\dots,n_d}$ вида (14) имеет следующий вид.

Теорема 5. *Пусть $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$. Среди кубатурных формул вида* (5) *с узлами из множества $Y_{\overline{n}}$ вида* (14) *оптимальной на классе F_d является формула*

$$S\left(f; Y_{\overline{n}}, \overline{\varphi}_{\overline{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{j=1}^{d} x_{n_j}^j\right) + \frac{1}{2}\sum_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}]}\left(\operatorname{mes} P_{\overline{i}} + \operatorname{mes} P_{\overline{i}+\overline{u}}\right) f\left(x_{\overline{i}}\right).$$

При этом

$$r(F_d; Y_{\overline{n}}) = \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{j=1}^{d} x_{n_j}^j\right) + \frac{1}{2}\max_{\beta \in B_d}\sum_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}]}\left(\operatorname{mes} P_{\overline{i}} - \operatorname{mes} P_{\overline{i}+\overline{u}}\right)\beta(\overline{i}).$$

Замечание 2. Погрешность оптимальной на классе F_2 кубатурной формулы с узлами из данной прямоугольной решетки Y_{n_1,n_2} равна половине наибольшей площади „маршрутов", состоящих из прямоугольников $P_{(i_1, i_2)}$ соответствующего разбиения $[0, 1]^2$, идущих из его левого верхнего „угла" в правый нижний „угол" (только вниз или вправо).

Доказательство. Из доказательства теоремы 4 следует, что оптимальная формула с узлами из множества $Y_{\overline{n}}$ имеет вид

$$S\left(f; Y_{\overline{n}}, \overline{\varphi}_{\overline{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{[0,1]^d} G(Y_{\overline{n}}; f; t)\,dt + \int_{[0,1]^d} L(Y_{\overline{n}}: f; t)\,dt\right).$$

Нетрудно убедиться, что $G(Y_{\overline{n}}; f; t) = 1$, если $t \in [0, 1]^d \setminus W_{\overline{n}}$, где $W_{\overline{n}} = \left[0, x_{n_1}^1\right] \times \dots \times \left[0, x_{n_d}^d\right]$ и $L(Y_{\overline{n}}: f; t) = 0$, если $t \in [0, 1]^d \setminus V_{\overline{n}}$, где $V_{\overline{n}} = \left[x_1^1, 1\right] \times \dots \times \left[x_1^d, 1\right]$. Следовательно,

$$S\left(f; Y_{\overline{n}}, \overline{\varphi}_{\overline{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{W_{\overline{n}}} G(Y_{\overline{n}}; f; t)\,dt + 1 - \prod_{j=1}^{d} x_{n_j}^j + \int_{V_{\overline{n}}} L(Y_{\overline{n}}; f; t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}.\overline{n}]} \operatorname{mes} P_{\overline{i}}\, f\left(x_{\overline{i}}\right) + 1 - \prod_{j=1}^{d} x_{n_j}^j + \sum_{\overline{i} \in \Pi[2\overline{u}.\overline{n}+\overline{u}]} \operatorname{mes} P_{\overline{i}}\, f\left(x_{\overline{i}-\overline{u}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{j=1}^{d} x_{n_j}^j\right) + \frac{1}{2}\sum_{\overline{i} \in \Pi[\overline{u}, \overline{n}]}\left(\operatorname{mes} P_{\overline{i}} + \operatorname{mes} P_{\overline{i}+\overline{u}}\right) f\left(x_{\overline{i}}\right).$$

Используя теорему 2.3 [10, с. 23], замечание 1 и определение множества $U(f)$, получаем

$$r(F_d; Y_{\bar{n}}) = \sup_{f \in F_d} \frac{1}{2}(\sup U(f) - \inf U(f)) =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{f \in F_d} \left(\int_{[0,1]^d} G(Y_{\bar{n}}; f; t)\,dt - \int_{[0,1]^d} L(Y_{\bar{n}}; f; t)\,dt \right).$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным для формулы $S\left(f; Y_{\bar{n}}, \overline{\varphi}_{\bar{n}}\right)$, имеем

$$r(F_d; Y_{\bar{n}}) = \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{j=1}^{d} x_{n_j}^j\right) + \frac{1}{2} \sup_{f \in F_d} \sum_{\bar{i} \in \Pi[\bar{u}, \bar{n}]} \left(\operatorname{mes} P_{\bar{i}} - \operatorname{mes} P_{\bar{i}+\bar{u}}\right) f\left(x_{\bar{i}}\right).$$

Пусть A_d — множество функций $a: \Pi[\bar{u}, \bar{n}] \to [0,1]$, монотонно неубывающих по каждой переменной. Очевидно,

$$r(F_d; Y_{\bar{n}}) = \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{j=1}^{d} x_{n_j}^j\right) + \frac{1}{2} \sup_{a \in A_d} \sum_{\bar{i} \in \Pi[\bar{u}, \bar{n}]} \left(\operatorname{mes} P_{\bar{i}} - \operatorname{mes} P_{\bar{i}+\bar{u}}\right) a\left(\bar{i}\right). \tag{15}$$

Для завершения доказательства осталось показать, что в (15) точную верхнюю грань можно брать только по функциям из множества B_d. Пусть $a \in A_d$ и $0 \le s_1 < \ldots < s_r \le 1$ — множество ее значений. Для $k = 1, \ldots, r$ зададим функцию $\beta_k \in B_d$, полагая $\beta_k\left(\bar{i}\right) = 1$, если $a\left(\bar{i}\right) \ge s_k$, и $\beta_k\left(\bar{i}\right) = 0$, если $a\left(\bar{i}\right) < s_k$, $\bar{i} \in \Pi[\bar{u}, \bar{n}]$. Нетрудно убедиться, что $a\left(\bar{i}\right) = \sum_{k=1}^{r}\left(s_k - s_{k-1}\right)\beta_k\left(\bar{i}\right)$, где $s_0 = 0$ и сумма неотрицательных коэффициентов $s_k - s_{k-1}$ не превышает единицу; и обратно, любая выпуклая комбинация функций из B_d попадает в A_d. Таким образом, множество A_d является выпуклым многогранником с вершинами в элементах множества B_d (в пространстве всех функций, заданных на $\Pi[\bar{u}, \bar{n}]$), и линейный функционал, заданный на A_d, достигает максимума на одной из его вершин. Теорема 5 доказана.

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 255 с.
2. *Шарипов Р. Н.* Наилучшие интервальные квадратурные формулы для классов Липшица // Конструктив. теория функций и функцион. анализ. – 1983. – Вып. 4. – С. 124 – 132.
3. *Бабенко В. Ф.* Об одной задаче оптимизации приближенного интегрирования // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетров. ун-та, 1984. – С. 3 – 13.
4. *Motornyi V. P.* On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r-th derivative // E. J. Approxim. – 1998. – **4**, № 4. – P. 459 – 478.
5. *Kiefer J.* Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1957. – **5**. – P. 105 – 136.
6. *Бусарова Т. Н.* Погрешность квадратурных формул на классах функций с монотонной r-й производной // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетров. ун-та, 1975. – С. 24 – 35.
7. *Лушпай Н. Е., Бусарова Т. Н.* Оптимальные формулы численного интегрирования для некоторых классов дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 2. – С. 234 – 238.
8. *Sard A.* Best approximate integration formulas; best approximation formulas // Amer. J. Math. – 1949. – **71**. – P. 80 – 91.
9. *Papageorgiou A.* Integration of monotone functions of several variables // J. Complexity. – 1993. – **9**. – P. 252 – 268.
10. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
11. *Бабенко В. Ф., Бородачёв С. В.* Об оптимизации приближенного интегрирования монотонных функций двух переменных // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 7. – С. 881 – 889.

Получено 19.07.99,
после доработки — 21.03.2000