УДК 517.95

О. М. Бугрій (Львів. нац. ун-т),
С. П. Лавренюк (Краків. політехніка, Польща)

ПАРАБОЛІЧНА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ, ЩО УЗАГАЛЬНЮЄ РІВНЯННЯ ПОЛІТРОПНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

We obtain conditions for the existence and uniqueness of solution of a parabolic variational inequality which is a generalization of the equation of polytropic elastic filtration without initial conditions. The class of uniqueness of a solution of this problem consists of functions which increase not faster than $e^{-\mu t}$, $\mu > 0$, as $t \to -\infty$.

Отримано умови існування та єдиності розв'язку параболічної варіаційної нерівності, яка є узагальненням рівняння політропної пружної фільтрації, без початкових умов. Клас єдиності розв'язку даної задачі складається з функцій, які зростають не швидше ніж $e^{-\mu t}$, $\mu > 0$, при $t \to -\infty$.

Дослідженню параболічних варіаційних нерівностей присвячено чимало праць. З бібліографією можна ознайомитися у монографіях [1, 2]. Зазначимо, що варіаційні нерівності є певним узагальненням задач для параболічних рівнянь. Зокрема, в [1, с. 291] наведено приклади як класичних, так і некласичних задач, що випливають з нерівностей.

Серед задач для систем параболічних рівнянь та параболічних рівнянь, добре обумовлених математично і таких, що мають фізичний сенс, певне місце займають задачі без початкових умов, тобто задачі, які розглядаються в областях, не обмежених знизу за часовою змінною. У цьому випадку початкові умови замінюються умовами на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$. Для лінійних рівнянь та систем ця поведінка визначається функцією $e^{\alpha t}$, де стала α залежить від коефіцієнтів задачі [3–8]. Для рівняння вигляду $u_t - \Delta u + |u|^{p-2}u = f$ та його узагальнень при $1 < p < 2$ результати є аналогічними випадку лінійних рівнянь. Проте при $p > 2$ існування та єдиність розв'язку задачі без початкових умов для вказаного рівняння не залежать від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$ [9, 10]. У працях [11 – 15] аналогічні результати отримано для параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов. Такі нерівності в класах обмежених, періодичних та майже періодичних розв'язків (за часовою змінною t) досліджено в [1, 2].

У [16] вивчено простори Лебега та Соболєва $L^{p(x)}$, $W^{k,p(x)}$ функцій, інтегровних зі степенем $p(x)$ і таких, що мають узагальнені похідні до порядку k, інтегровні зі степенем $p(x)$. У цих просторах досліджено задачу Діріхле для рівняння вигляду $A(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\left| u_{x_i} \right|^{p(x)} u_{x_i} \right)_{x_i} = f$. Випадок параболічних рівнянь вигляду $u_t - A(u) = f$ зі змінним степенем $p(x)$ розглянуто в [17, 18] за умови, що $\inf p(x) > 2$.

Дана робота присвячена вивченню параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов у соболєвських просторах $W^{k,p(x)}$ для випадку, коли $1 < \inf p(x) < 2$. Умови коректності задачі, отримані у ній, аналогічні відомим для випадку $1 < p(x) \equiv \mathrm{const} < 2$, тобто розв'язок існує та є єдиним у класі функцій, зростаючих при $t \to -\infty$ не швидше ніж $e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$.

Нехай $\Omega \subset R^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$; $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$,

$T < +\infty$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$, $\Omega_\tau = \{(x,t) \subset R^{n+1} \mid x \in \in \Omega,\ t = \tau\}$, $\tau \in (-\infty, T]$. Надалі будемо припускати, що функції $p, q \in C(\overline{\Omega})$:

$$1 < p_1 = \min_{\overline{\Omega}} p(x) \le \max_{\overline{\Omega}} p(x) = p_2 < +\infty,$$
$$1 < q_1 = \min_{\overline{\Omega}} q(x) \le \max_{\overline{\Omega}} q(x) = q_2 < +\infty,$$
$$r = \min\{p_1, q_1\}, \qquad s = \max\{p_2, q_2\},$$
$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \qquad \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1, \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

Через $[B]^N$ будемо позначати декартів степінь, а через $\|\cdot; B\|$ — норму банахового простору B, причому якщо $u \in [B]^N$, то $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_N)$, де $u_j \in \in B$, $j = \overline{1, N}$, $\|u; [B]^N\| = \sum_{j=1}^N \|u_j; B\|$. Спряжений простір до B будемо позначати B^*.

Нехай $L^{p(x)}(\Omega)$, $L^{q(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)$ — узагальнені простори Лебега та Соболєва, введені в [16]. Нагадаємо, що

$$\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| = \inf\left\{\nu > 0 \mid \rho_p\left(\frac{v}{\nu}, \Omega\right) \le 1\right\}, \quad \text{де} \quad \rho_p(v, \Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{p(x)} dx.$$

Аналогічним чином визначимо простори $L^{q(x)}(Q_T)$, $L^{p(x)}(Q_T)$.

***Зауваження* 1.** Якщо для функції v виконується нерівність $\rho_p(v, \Omega) < < +\infty$, то $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \le \max\left\{[\rho_p(v,\Omega)]^{1/p_1}, [\rho_p(v,\Omega)]^{1/p_2}\right\}$, а якщо $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| < +\infty$, то $\rho_p(v, \Omega) \le \max\left\{\|v; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_1}, \|v; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_2}\right\}$.

***Зауваження* 2.** Якщо $p(x) \le q(x)$ при $x \in \Omega$, то $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, де символ $\hookrightarrow$ означає неперервне вкладення.

Ці два зауваження залишаються правильними і при заміні області Ω на Q_T.

Нехай X — замкнений підпростір такий, що $\left[\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)\right]^N \hookrightarrow X \hookrightarrow \hookrightarrow \left[W^{1,p(x)}(\Omega)\right]^N$, $V = X \cap \left[L^{q(x)}(\Omega)\right]^N \cap \left[L^2(\Omega)\right]^N$, K — замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент.

***Зауваження* 3.** З вибору простору V маємо $V \hookrightarrow\hookrightarrow \left[L^2(\Omega)\right]^N$, де символ $\hookrightarrow\hookrightarrow$ означає неперервне та щільне вкладення. Тому, ототожнивши $\left[L^2(\Omega)\right]^N$ зі спряженим до нього простором, можемо ототожнити його з деяким підпростором простору V^*. Тоді $V \hookrightarrow\hookrightarrow \left[L^2(\Omega)\right]^N \hookrightarrow\hookrightarrow V^*$.

Нехай

$$U_0(Q_{t_0,T}) = \left\{u(x,t) \mid \|u; U_0(Q_{t_0,T})\| = \sum_{i=1}^n \left\|u_{x_i}; \left[L^{p(x)}(Q_{t_0,T})\right]^N\right\| + \right.$$
$$\left. + \left\|u; \left[L^2(Q_{t_0,T})\right]^N\right\| + \left\|u; \left[L^{q(x)}(Q_{t_0,T})\right]^N\right\| < +\infty\right\}, \quad t_0 \in (-\infty, T],$$
$$W = \left\{w(x,t) \mid w \in U_0(Q_{t_0,T}),\ w_t \in \left[U_0(Q_{t_0,T})\right]^*,\ t_0 \in (-\infty, T]\right\}.$$

***Зауваження* 4.** Можна довести, що $L^{p_2}\big((t_0, T); L^{p(x)}(\Omega)\big) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(Q_{t_0,T}) \hookrightarrow\hookrightarrow$

$\hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_1}\big((t_0,T);L^{p(x)}(\Omega)\big)$. Тому $L^s((t_0,T);V)\hookrightarrow\hookrightarrow U_0\big(Q_{t_0,T}\big)\hookrightarrow\hookrightarrow L^r((t_0,T);V)$ і $\big[U_0\big(Q_{t_0,T}\big)\big]^*\hookrightarrow\hookrightarrow L^{s/(s-1)}\big((t_0,T);V^*\big)$.

Ввівши функціонал $\rho_p^\lambda(v,Q_T)=\int_{Q_T}|v(x,t)|^{p(x)}e^{2\lambda t}\,dx$, визначимо простори

$$L_\lambda^{p(x)}(Q_T)=\left\{u(x,t)\,\Big|\,\big\|u;L_\lambda^{p(x)}(Q_T)\big\|=\inf\left\{\nu>0\,\Big|\,\rho_p^\lambda\left(\frac{u}{\nu},Q_T\right)\le 1\right\}<+\infty\right\},$$

$$U_\lambda(Q_T)=\left\{u(x,t)\,|\,\|u;U_\lambda(Q_T)\|=\sum_{i=1}^n\left\|u_{x_i};\big[L_\lambda^{p(x)}(Q_T)\big]^N\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|u;\big[L_\lambda^2(Q_T)\big]^N\right\|+\left\|u;\big[L_\lambda^{q(x)}(Q_T)\big]^N\right\|<+\infty\right\}$$

для деякого $\lambda\in R$.

Як в [19, с. 145], будемо розглядати функцію $u=u(x,t)$ $(x,t)\in Q_T$, як функцію, котра кожному моменту часу $t\in(-\infty,T]$ ставить у відповідність функцію змінної x: $u(t)=u(\cdot,t)$.

Позначимо через $(\cdot,\cdot)$ скалярний добуток в R^N, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ і $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ — скалярний добуток відповідно між V^* і V та між $[U_0(Q_T)]^*$ і $U_0(Q_T)$.

Нехай $F^l(x,t)=\operatorname{col}(F_1(x,t),\ldots,F_N(x,t))$, $l=\overline{0,n}$, $\mathcal{F}=F^0+\sum_{i=1}^n F^i_{x_i}$, $C(x,t)$ — квадратна матриця розміру $N\times N$.

Означення 1. *Функція u така, що $u\in U_\lambda(Q_T)\cap C\big((-\infty,T];\big[L^2(\Omega)\big]^N\big)$, $e^{\lambda t}u\in L^\infty\big((-\infty,T];\big[L^2(\Omega)\big]^N\big)$ для деякого $\lambda\in R$, $u(t)\in K$ для майже всіх $t\in(-\infty,T]$, називається розв'язком варіаційної нерівності*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[(v_t,v-u)+\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t)\left|u_{j,x_i}\right|^{p(x)-2}u_{j,x_i}\left(v_{j,x_i}-u_{j,x_i}\right)+(C(x,t)u,v-u)+$$

$$+\sum_{j=1}^N g_j(x,t)\left|u_j\right|^{q(x)-2}u_j\left(v_j-u_j\right)-\left(F^0(x,t),v-u\right)-\sum_{i=1}^n\left(F^i(x,t),v_{x_i}-u_{x_i}\right)\Bigg]dxdt\ \ge$$

$$\ge\frac12\int\limits_\Omega|v(x,t_2)-u(x,t_2)|^2dx-\frac12\int\limits_\Omega|v(x,t_1)-u(x,t_1)|^2dx,\qquad(1)$$

якщо вона задовольняє (1) *для всіх* $t_1,t_2\in(-\infty,T]$, $t_1<t_2$, *і всіх* $v\in W$, $v(t)\in K$ *майже для всіх* $t\in(-\infty,T]$.

***Зауваження* 5.** Зазначимо, що частковим випадком нерівності (1) є така задача:

$$u_t-\sum_{i=1}^n\left(a_i(x,t)\left|u_{x_i}\right|^{p(x)}u_{x_i}\right)_{x_i}+c(x,t)u+g(x,t)|u|^{q(x)-2}u=$$

$$=f(x,t)-\sum_{i=1}^n f_{i,x_i}(x,t),\qquad u|_{\partial\Omega\times(-\infty,T)}=0.$$

Ця задача є узагальненням математичної моделі фільтрації рідини в області $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, де $p(x)\equiv p_1$, $1<p_1<2$ для $x\in\Omega_1$ і $p(x)\equiv p_2$, $p_2>2$ для $x\in\Omega_2$ за умови ідеального контакту на спільній частині Ω_1 і Ω_2.

Надалі будемо припускати, що $r < 2$ (відмітимо, що в працях [17, 18] розглянуто задачі для $r > 2$).

Будемо вважати, що коефіцієнти нерівності (1) задовольняють такі умови:

A) $a_{ij} \in L^{\infty}(Q_T)$; $a_{ij}(x, t) \geq a_0 > 0$ майже для всіх $(x, t) \in Q_T$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, N}$;

C) елементи матриці C належать простору $L^{\infty}(Q_T)$; $(C(x, t)\xi, \xi) \geq c_0 |\xi|^2$, $c_0 \in R$, майже для всіх $(x, t) \in Q_T$ для всіх $\xi \in R^N$;

G) $g_j \in L^{\infty}(Q_T)$; $g_j(x, t) \geq g_0 > 0$ майже для всіх $(x, t) \in Q_T$, $j = \overline{1, N}$.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів нерівності* (1) *виконуються умови* A), C), G). *Тоді нерівність* (1) *не може мати більше одного розв'язку* u, *який справджує умову*

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{\Omega} u^2(x, t) e^{2c_0 t}\, dx = 0.$$

Доведення. Нехай існують два розв'язки u^1, u^2 нерівності (1). Сім'ю операторів $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in (-\infty, T]$, визначимо рівністю

$$\langle A(t)u, v \rangle = \int_{\Omega} \Bigg[\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x, t) \left| u_{j, x_i}(x) \right|^{p(x)-2} u_{j, x_i}(x) v_{j, x_i}(x) +$$

$$+ (C(x, t)u(x), v(x)) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x, t) \left| u_j(x) \right|^{q(x)-2} u_j(x) v_j(x) \Bigg] dx, \quad u, v \in V.$$

Оператори $A(t)$ обмежені і для них виконується оцінка

$$\langle A(t)u - A(t)v, u - v \rangle = \int_{\Omega} \Bigg[\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left(\left| u_{j, x_i} \right|^{p(x)-2} u_{j, x_i} - \left| v_{j, x_i} \right|^{p(x)-2} v_{j, x_i} \right) \times$$

$$\times \left(u_{j, x_i} - v_{j, x_i} \right) + (C(u - v), u - v) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} g_j \left(\left| u_j \right|^{q(x)-2} u_j - \left| v_j \right|^{q(x)-2} v_j \right) \left(u_j - v_j \right) \Bigg] dx \geq$$

$$\geq c_0 \int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^2 dx, \quad u, v \in V. \tag{2}$$

Легко показати, що для функцій, котрі справджують нерівності

$$\int_{\Omega_{t_1, t_2}} (v_t - f_i, v - u_i)\, dx\, dt \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_2}} |v - u_i|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_1}} |v - u_i|^2 dx, \quad i = 1, 2,$$

для довільних $v \in W$, справедлива оцінка

$$\int_{\Omega_{t_1, t_2}} (f_1 - f_2, u_1 - u_2)\, dx\, dt \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_2}} |u_1 - u_2|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_1}} |u_1 - u_2|^2 dx. \tag{3}$$

Поклавши тут $f_i(t) = \mathcal{F}(t) - A(t)u^i(t)$, $u_i = u^i$, $i = 1, 2$, отримаємо

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} y(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\langle A(t)u^1(t) - A(t)u^2(t), u^1(t) - u^2(t) \right\rangle dt \leq 0,$$

$$t_1, t_2 \in (-\infty, T], \quad t_1 < t_2,$$

де

$$y(t) = \int\limits_{\Omega} \left| u^1(x,t) - u^2(x,t) \right|^2 dx.$$

Тоді з (2) та останньої нерівності $\int_{t_1}^{t_2} \left(y'(t) + 2c_0 y(t) \right) dt \le 0$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$. Отже, $y'(t) + 2c_0 y(t) \le 0$ майже скрізь на $(-\infty, T]$. Тому $y(t_2) e^{2c_0 t_2} \le y(t_1) e^{2c_0 t_1}$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$. Оскільки $\lim_{t_1 \to -\infty} y(t_1) e^{2c_0 t_1} = 0$, то $y(t) \le 0$. Але $y(t) \ge 0$. Отже, $y(t) = 0$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$. Тому $u^1(x,t) = u^2(x,t)$ майже скрізь у Q_T.

Теорему доведено.

Доведення існування розв'язку нерівності (1) проведемо методом штрафа. Даний метод детально розроблений в [1]. Суть його полягає в тому, щоб наблизити розв'язок нерівності (1) розв'язками задач зі штрафом.

Розглянемо задачу зі штрафом в області $Q_{t_0, T}$:

$$u_t(t) + A(t) u(t) + \frac{1}{\varepsilon} B u(t) = \mathcal{F}_{t_0}(t), \qquad t \in (t_0, T), \tag{4}$$

$$u(t_0) = 0, \qquad t_0 \in (-\infty, T], \tag{5}$$

де $\varepsilon > 0$, $B : \left[L^2(\Omega) \right]^N \to \left[L^2(\Omega) \right]^N$ — оператор штрафа, який визначається за правилом $Bw = w - P_K(w)$, P_K — оператор проектування $\left[L^2(\Omega) \right]^N$ на K,

$$\mathcal{F}_{t_0}(x,t) = \begin{cases} \mathcal{F}(x,t), & (x,t) \in Q_{t_0, T}; \\ 0, & (x,t) \in Q_{t_0}. \end{cases}$$

Зазначимо, що оператор B є обмеженим, монотонним і напівнеперервним [1, с. 384].

Означення 2. *Функція $u \in U_0(Q_{t_0,T})$, яка має похідну $u_t \in \left[U_0(Q_{t_0,T}) \right]^*$ в сенсі простору $D^*\left((t_0, T); V^* \right)$, називається розв'язком задачі* (4), (5), *якщо вона задовольняє умову* (5) *та рівняння* (4) *в* $D^*\left((t_0, T); V^* \right)$.

Із зауважень 3 та 4 та з леми 1.2 [1, с. 20] випливає, що функція u, можливо після зміни на множині міри нуль (з інтервалу (t_0, T)), належить простору $C\left([t_0, T]; V^* \right)$, і тому умова (5) має сенс.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* A) – G) *і разом з тим функції* a_{ij}, g_j, F^l, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$, $l = \overline{0,n}$, *та коефіцієнти матриці* C *належать простору* $C\left([t_0, T]; \left[L^\infty(\Omega) \right]^N \right)$. *Якщо*

$$M_0 = \int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{j=1}^{N} \left[\left| F_j^0(x,t) \right|^{q'(x)} + \sum_{i=1}^{n} \left| F_j^i(x,t) \right|^{p'(x)} \right] dx < \infty,$$

то існує розв'язок u задачі (4), (5).

Доведення. *Існування.* Використаємо метод Фаедо – Гальоркіна. Нехай $\left\{ w^m \right\}_{m \in N}$ — база простору V, $u^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) w^i(x)$, де $c_{1m}(t), \ldots$ $\ldots, c_{mm}(t)$ шукаємо як розв'язки задач

$$\left\langle u_t^m(t), w^s \right\rangle + \left\langle A(t)u^m(t), w^s \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\left\langle Bu^m(t), w^s \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}(t), w^s \right\rangle, \quad t \in (t_0, T), \tag{6}$$

$$c_{sm}(t_0) = 0, \quad 1 \le s \le m. \tag{7}$$

Як в [17], можна показати, що існує розв'язок задачі (6), (7), визначений на деякому проміжку $[t_0, \tilde{t}_0]$. З оцінок, котрі будуть отримані нижче, випливатиме, що даний розв'язок можна продовжити на весь інтервал $[t_0, T]$. Тому будемо припускати, що даний розв'язок вже визначений на $[t_0, T]$.

З (6) отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^m(x,t)\right|^2 dx + \int_{\Omega_{0,t}} \left[(a_0 - \kappa) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \left|u_{j,x_i}^m\right|^{p(x)} + c_0 \sum_{j=1}^N \left|u_j^m\right|^2 + \right.$$

$$\left. + (g_0 - \kappa) \sum_{j=1}^N \left|u_j^m\right|^{q(x)} \right] dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left\langle Bu^m(t), u^m(t) \right\rangle dt \le C_1 M_0,$$

де $0 < \kappa < \min\{a_0, g_0\}$. Тому звідси та із зауваження 1 випливають оцінки

$$\int_\Omega \left|u^m(x,\tau)\right|^2 dx \le C_2 M_0,$$

$$\sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^n \left\| u_{j,x_i}^m; L^{p(x)}\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| + \left\| u_j^m; L^2\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| + \left\| u_j^m; L^{q(x)}\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| \right] \le C_2 M_0,$$

$$\int_{t_0}^\tau \left\langle Bu^m(t), u^m(t) \right\rangle dt \le \varepsilon C_2 M_0, \quad \tau \in (t_0, T), \tag{8}$$

де стала C_2 не залежить від m.

Скалярний добуток між $\left[U\left(Q_{t_0,T}\right)\right]^*$ та $U\left(Q_{t_0,T}\right)$ знову позначимо через $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Визначимо оператор $A_\varepsilon : U_0\left(Q_{t_0,T}\right) \to \left[U_0\left(Q_{t_0,T}\right)\right]^*$ за правилом

$$\langle\langle A_\varepsilon u, v \rangle\rangle = \int_{t_0}^T \langle (A(t) + 1/\varepsilon B)u(t), v(t) \rangle dt,$$

де $u, v \in U_0\left(Q_{t_0,T}\right)$. Покажемо обмеженість норм $\left\| A_\varepsilon u^m; \left[U_0\left(Q_{t_0,T}\right)\right]^* \right\|$. Для довільного $v \in U_0\left(Q_{t_0,T}\right)$ з нерівності Гельдера та оцінок (8) отримаємо

$$\left|\left\langle\left\langle A_\varepsilon u^m, v \right\rangle\right\rangle\right| \le C_3 \left(\sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^n \left\| \left|u_{j,x_i}^m\right|^{p(x)-1}; L^{p'(x)}\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| \cdot \left\| v_{j,x_i}; L^{p(x)}\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| + \right.\right.$$

$$\left. + \left\| u_j^m; L^2\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| \cdot \left\| v_j; L^2\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| + \left\| \left|u_j^m\right|^{q(x)-1}; L^{q'(x)}\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| \cdot \left\| v_j; L^{q(x)}\left(Q_{t_0,T}\right) \right\| \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\|B\| \cdot \left\| u^m; \left[L^2\left(Q_{t_0,T}\right)\right]^N \right\| \cdot \left\| v; \left[L^2\left(Q_{t_0,T}\right)\right]^N \right\| \right) \le C_4 \left\| v; U_0\left(Q_{t_0,T}\right) \right\|.$$

Тому $\left\| A_\varepsilon u^m; \left[U_0\left(Q_{t_0,T}\right)\right]^* \right\| \le C_4$, де стала C_4 не залежить від m.

Тоді існує підпослідовність $\left\{u^{m_k}\right\} \subset \left\{u^m\right\}$ така, що

$$u^{m_k} \to u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty\Big((t_0, T); \left[L^2(\Omega)\right]^N\Big),$$

$$A_\varepsilon u^{m_k} \to \chi_\varepsilon \quad \text{слабко в} \quad \left[U_0\big(Q_{t_0,T}\big)\right]^*,$$

$$u^{m_k}(T) \to \xi \quad \text{слабко в} \quad \left[L^2(\Omega)\right]^N$$

при $k \to \infty$. Тоді $u_t + \chi_\varepsilon = \mathcal{F}$. Тому $u_t \in \left[U_0\big(Q_{t_0,T}\big)\right]^*$. З напівнеперервності операторів $A(t)$, B, монотонності оператора B та оцінки (2) випливає, що $\chi_\varepsilon = A_\varepsilon u$. З вибору початкових умов для функцій c_{im} маємо $u^{m_k}(t_0) \to 0$ в $\left[L^2(\Omega)\right]^N$. Далі, аналогічно [17] показуємо, що u є розв'язком задачі (4), (5).

Єдиність. Нехай u_1, u_2 — розв'язки задачі (4), (5), $u = u_1 - u_2$. З (4) випливає $\langle\langle u_t, u\rangle\rangle + \langle\langle A_\varepsilon u_1 - A_\varepsilon u_2, u_1 - u_2\rangle\rangle = 0$. Звідси та з оцінки (2) отримуємо $\int_\Omega u^2(x,t)\,dx + c_0\int_{Q_{t_0,t}} u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau \le 0$. Тому з леми Гронуолла – Беллмана $u(x,t) = 0$ майже скрізь в $Q_{t_0,T}$.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються всі умови теореми* 1 *і разом з тим функції* a_{ij}, g_j, F^l, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$, $l = \overline{0,n}$, *та елементи матриці* C *належать простору* $C\Big((-\infty, T), \left[L^\infty(\Omega)\right]^N\Big)$. *Якщо*

$$M_1 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{j=1}^N \left[\left|F_j^0(x,t)\right|^{q'(x)} + \sum_{i=1}^n \left|F_j^i(x,t)\right|^{p'(x)}\right] e^{2\lambda t}\,dx\,dt < +\infty$$

для деякого $\lambda < c_0$, *то існує розв'язок* u *нерівності* (1).

Доведення. Розглянемо в $Q_{t_0,T}$, $t_0 \in (-\infty, T_\tau)$, задачу (4), (5). Ми довели, що існує функція u, яка є розв'язком задачі (4), (5), така, що

$$u \in U_0\big(Q_{t_0,T}\big), \qquad u_t \in \left[U_0\big(Q_{t_0,T}\big)\right]^*.$$

Вибираючи тепер $t_0 = T-1, T-2, \ldots, T-k, \ldots$, отримуємо послідовність функцій $\left\{u^{k,\varepsilon}\right\}$, які є розв'язками задачі (4), (5). Продовжимо кожну функцію $u^{k,\varepsilon}$ нулем в область Q_{T-k}. Тоді для $\lambda < c_0$, довільних k і довільних $\tau \in (-\infty, T]$ можна отримати нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left|u^{k,\varepsilon}(x,\tau)\right|^2 e^{2\lambda\tau}\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\left[(a_0 - \kappa)\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^n \left|u^{k,\varepsilon}_{j,x_i}\right|^{p(x)} + (c_0 - \lambda)\left|u^{k,\varepsilon}(x,\tau)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + (g_0 - \kappa)\sum_{j=1}^N \left|u_j^{k,\varepsilon}\right|^{q(x)}\right] e^{2\lambda t}\,dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left\langle Bu^{k,\varepsilon}(t), u^{k,\varepsilon}(t)\right\rangle e^{2\lambda t}\,dt \le C_5 M_1, \tag{9}$$

де $0 < \kappa < \min\{a_0, g_0\}$. Звідси

$$\int\limits_\Omega \left|u^{k,\varepsilon}(x,\tau)\right|^2 e^{2\lambda\tau}\,dx \le C_6 M_1,$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^n \left|u^{k,\varepsilon}_{j,x_i}(x,t)\right|^{p(x)} + \left|u^{k,\varepsilon}(x,t)\right|^2 + \sum_{j=1}^N \left|u_j^{k,\varepsilon}(x,t)\right|^{q(x)}\right] e^{2\lambda t}\,dx\,dt \le C_6 M_1, \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} \left\langle Bu^{k,\varepsilon}(t), u^{k,\varepsilon}(t) \right\rangle e^{2\lambda t} dt \le \varepsilon C_6 M_1, \quad \tau \in (-\infty, T],$$

де стала C_6 не залежить від k і ε.

Якщо домножимо (4) на $u^{k,\varepsilon} e^{2\mu t}$, де $\mu \ge c_0$, то знову прийдемо до оцінок $u^{k,\varepsilon}$ через M_1. Отже, порядок зростання функцій $u^{k,\varepsilon}$ визначається оцінками (10).

Тому існує підпослідовність послідовності $\{u^{k,\varepsilon}\}$ (збережемо для цієї підпослідовності позначення $\{u^{k,\varepsilon}\}$) така, що

$$e^{\lambda t} u^{k,\varepsilon} \to e^{\lambda t} u^{\varepsilon} \quad \text{*-слабко в} \quad L^{\infty}\big((-\infty, T); L^2(\Omega)\big),$$

$$A_{\varepsilon} u^{k,\varepsilon} \to \tilde{\chi}_{\varepsilon} \quad \text{слабко в} \quad \left[U_{\lambda}(Q_T) \right]^*$$

при $k \to \infty$. І тут можна показати, що $\tilde{\chi}_{\varepsilon} = A_{\varepsilon} u^{\varepsilon}$. Тоді функція u^{ε} є розв'язком рівняння

$$u_t(t) + A(t)u(t) + \frac{1}{\varepsilon} Bu(t) = \mathcal{F}(t), \quad t \in (-\infty, T), \tag{11}$$

задовольняє включення $e^{\lambda t} u^{\varepsilon} \in L^{\infty}\Big((-\infty, T]; \left[L^2(\Omega)\right]^N\Big)$, $u^{\varepsilon} \in U_{\lambda}(Q_T)$ і оцінки (10).

Нехай $v \in W$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$. Оскільки $Bv(t) = 0$, то з (11) і монотонності оператора B отримаємо

$$\int_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(v_t, v - u^{\varepsilon}) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left| u^{\varepsilon}_{j,x_i} \right|^{p(x)-2} u^{\varepsilon}_{j,x_i} \left(v_{j,x_i} - u^{\varepsilon}_{j,x_i} \right) +$$

$$+ (Cu^{\varepsilon}, v - u^{\varepsilon}) + \sum_{j=1}^{N} g_j \left| u^{\varepsilon}_j \right|^{q(x)-2} u^{\varepsilon}_j \left(v_j - u^{\varepsilon}_j \right) - \left(F^0, v - u^{\varepsilon} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left(F^i, v_{x_i} - u^{\varepsilon}_{x_i} \right) \Bigg] dx\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \left\langle Bv(t) - Bu^{k,\varepsilon}(t), v(t) - u^{k,\varepsilon}(t) \right\rangle e^{2\lambda t} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| v(x, t_2) - u^{\varepsilon}(x, t_2) \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| v(x, t_1) - u^{\varepsilon}(x, t_1) \right|^2 dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| v(x, t_2) - u^{\varepsilon}(x, t_2) \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| v(x, t_1) - u^{\varepsilon}(x, t_1) \right|^2 dx \tag{12}$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.

Покажемо, що на $(-\infty, T]$ існує послідовність $\left\{ e^{\lambda t} u^{\varepsilon_m}(t) \right\} \subset \left\{ e^{\lambda t} u^{\varepsilon}(t) \right\}$ зі значеннями в $\left[L^2(\Omega) \right]^N$, одностайно неперервна на кожному відрізку $[T_1, T_2] \subset\subset (-\infty, T]$.

Справді, з леми Фату

$$\int_{T_1-1}^{T_2} e^{2\lambda t} \liminf \Bigg(\int_{\Omega} \Bigg[\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left| u^{\varepsilon}_{j,x_i}(x,t) \right|^{p(x)} + \left| u^{\varepsilon}(x,t) \right|^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left| u^{\varepsilon}_{j,x_i}(x,t) \right|^{q(x)} \Bigg] dx + \frac{1}{\varepsilon} \left\langle Bu^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t) \right\rangle \Bigg) dt \le C_7.$$

Тому підінтегральний вираз зовнішнього інтеграла скінченний майже скрізь на $[T_1-1, T_2]$. Не зменшуючи загальності можна вважати, що він скінченний в точці T_1. Нехай $\{u^{\varepsilon_m}\}$ — підпослідовність, на якій і досягається нижчя межа. Тоді

$$\int_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \left|u^{\varepsilon_m}_{j,x_i}(x,T_1)\right|^{p(x)} + \left|u^{\varepsilon_m}(x,T_1)\right|^2 + \\ + \sum_{j=1}^N \left|u^{\varepsilon}_j(x,T_1)\right|^{q(x)}\Bigg]dx + \frac{1}{\varepsilon_m}\left\langle Bu^{\varepsilon_m}(T_1), u^{\varepsilon_m}(T_1)\right\rangle \le C_7 \tag{13}$$

для всіх m. Подіємо оператором з лівої частини (11) на функцію $u^{\varepsilon_m}(T_1) - u^{\varepsilon_m}(t)$ та проінтегруємо по t на $[T_1, T_1+\delta]$. З урахуванням монотонності B отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)-u^{\varepsilon_m}(x,T_1)\right|^2 dx \le \frac{1}{\varepsilon_m}\int_{T_1}^{T_1+\delta}\left\langle Bu^{\varepsilon_m}(T_1), u^{\varepsilon_m}(T_1)-u^{\varepsilon_m}(t)\right\rangle dt + \\ + \int_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t)\left|u^{\varepsilon_m}_{j,x_i}(x,t)\right|^{p(x)-2}u^{\varepsilon_m}_{j,x_i}(x,t)\left(u^{\varepsilon_m}_{j,x_i}(x,T_1)-u^{\varepsilon_m}_{j,x_i}(x,t)\right) + \\ + \left(C(x,t)u^{\varepsilon_m}(x,t), u^{\varepsilon_m}(x,T_1)-u^{\varepsilon_m}(x,t)\right) + \\ + \sum_{j=1}^N g_j(x,t)\left|u^{\varepsilon_m}_j(x,t)\right|^{q(x)-2}u^{\varepsilon_m}_j(x,t)\left(u^{\varepsilon_m}_j(x,T_1)-u^{\varepsilon_m}_j(x,t)\right) - \\ - \left(F^0(x,t), u^{\varepsilon_m}(x,T_1)-u^{\varepsilon_m}(x,t)\right) - \sum_{i=1}^n\left(F^i(x,t), u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,T_1)-u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)\right)\Bigg]dx\,dt.$$

На підставі властивостей оператора штрафа та оцінки (13) можна показати, що перший доданок менший за $C_8\delta$, де $C_8>0$ — стала, що не залежить від δ, ε_m.

Для $r(x)>1$ виконується нерівність

$$|u|^{r(x)-2}uv \le |u|^{r(x)-1}|v| \le \frac{|u|^{r(x)}}{r'(x)} + \frac{|v|^{r(x)}}{r(x)} \le |u|^{r(x)} + |v|^{r(x)}.$$

Тому з (10), (13) можна отримати таку оцінку:

$$\int_\Omega \left|u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)-u^{\varepsilon_m}(x,T_1)\right|^2 dx \le C_9\Bigg(\delta + \int_{Q_{T_1,T_1+\delta}}\Bigg[\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^n\left|u^{\varepsilon_m}_{j,x_i}(x,t)\right|^{p(x)}e^{2\lambda t} + \\ + \left|u^{\varepsilon_m}_{j,x_i}(x,T_1)\right|^{p(x)}e^{2\lambda T_1}\Bigg) + \left|u^{\varepsilon_m}(x,t)\right|^2 e^{2\lambda t} + \\ + \left|u^{\varepsilon_m}(x,T_1)\right|^2 e^{2\lambda T_1} + \sum_{j=1}^N\left|u^{\varepsilon_m}_j(x,t)\right|^{q(x)}e^{2\lambda t} + \\ + \sum_{j=1}^N\Bigg(\left|F^0_j(x,t)\right|^{q'(x)} + \sum_{i=1}^n\left|F^i_j(x,t)\right|^{p'(x)}\Bigg)e^{2\lambda t}\Bigg]dx\,dt \le C_{10}\delta, \tag{14}$$

де стала C_{10} може залежати від T_1, але не залежить від ε_m, δ.

Використаємо тепер оцінку (3), в якій покладемо

$$t_1 = T_1, \quad t_2 = t, \quad u_1(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t), \quad u_2(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta),$$
$$f_1(t) = \mathcal{F}(t) - A(t)u^{\varepsilon_m}(t), \quad f_2(t) = \mathcal{F}(t+\delta) - A(t+\delta)u^{\varepsilon_m}(t+\delta).$$

Тоді

$$\int_\Omega \left| u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,t) \right|^2 dx \le \int_\Omega \left| u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1) \right|^2 dx +$$
$$+ 2 \int_{Q_{T_1,t}} \left[\left(F^0(x,t) - F^0(x,t+\delta), u^{\varepsilon_m}(x,t) - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta) \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^n \left(F^i(x,t) - F^i(x,t+\delta), u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t) - u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t+\delta) \right) \right] dx\,dt +$$
$$+ 2\int_{T_1}^t \left\langle A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(\tau+\delta) - A(\tau)u^{\varepsilon_m}(\tau), u^{\varepsilon_m}(\tau+\delta) - u^{\varepsilon_m}(\tau) \right\rangle dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Доданок I_1 оцінюємо за допомогою (14). Для довільного $\varepsilon > 0$ існує δ, $0 < \delta < \varepsilon$, таке мале, що I_2, за рахунок неперервності на $[T_1, T]$ (а отже, і рівномірної неперервності) F^l, $l = \overline{0,n}$, оцінок Гельдера та (10), можна зробити меншим за ε.

Третій доданок подамо у вигляді

$$I_3 = -2\int_{T_1}^t \left\langle A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(\tau+\delta) - A(\tau)u^{\varepsilon_m}(\tau), u^{\varepsilon_m}(\tau+\delta) - u^{\varepsilon_m}(\tau) \right\rangle d\tau =$$
$$= -2\int_{T_1}^t \left\langle A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(\tau+\delta) - A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(\tau), u^{\varepsilon_m}(\tau+\delta) - u^{\varepsilon_m}(\tau) \right\rangle d\tau -$$
$$- 2\int_{T_1}^t \left\langle (A(\tau+\delta) - A(\tau))u^{\varepsilon_m}(\tau), u^{\varepsilon_m}(\tau+\delta) - u^{\varepsilon_m}(\tau) \right\rangle d\tau.$$

Тут перший доданок оцінимо за допомогою (2), а другий — за допомогою оцінок (10) та неперервності відносно змінної t функцій a_{ij}, g_j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$, та елементів матриці C. Тоді для досить малих δ, $0 < \delta < \varepsilon$, будемо мати

$$\int_\Omega \left| u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,t) \right|^2 dx \le C_{11}\varepsilon + C_{12} \int_{Q_{T_1,t}} \left| u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,t) \right|^2 dx\,dt.$$

Звідси на підставі леми Гронуолла–Беллмана випливає, що послідовність $\{u^{\varepsilon_m}\}$ одностайно неперервна на довільному відрізку $[T_1, T_2] \in (-\infty, T]$. Тому з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність, збіжну в $C\left([T_1, T_2]; \left[L^2(\Omega)\right]^N\right)$. Розглянувши тепер відрізки $[T-1, T], [T-2, T], \ldots, [T-m, T], \ldots$ можна виділити таку діагональну послідовність $\left\{u^{m,m}\right\}$, що

$$e^{\lambda t}u^{m,m} \to e^{\lambda t}u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty\left((-\infty, T); L^2(\Omega)\right),$$
$$Au^{m,m} \to \chi \quad \text{слабко в} \quad \left[U_\lambda(Q_T)\right]^*$$

при $m \to \infty$, $u^{m,m} \xrightarrow[m\to\infty]{} u$ сильно в $C\left([T_1, T]; \left[L^2(\Omega)\right]^N\right)$ для довільного

$T_1 \in (-\infty, T]$. І тут можна показати, що $\chi(t) = A(t)u(t)$, $t \in (-\infty, T)$. Зауважимо, що аналогічні перетворення можна зробити для функцій $u^{k,\varepsilon}$ та функцій u^{m_k} в теоремі 1. Тому розв'язок задачі (4), (5) належить простору $C\left([t_0, T]; \left[L^2(\Omega)\right]^N\right)$, а функція $u^{\varepsilon} \in C\left([T_1, T_2]; \left[L^2(\Omega)\right]^N\right)$, $[T_1, T_2] \in (-\infty, T]$. Тоді $u \in C\left((-\infty, T]; \left[L^2(\Omega)\right]^N\right)$. Функції $u^{m,m}$ справджують нерівність (12) для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$; $v \in W$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$. З (4) випливає, що $Bu(t) = 0$, тому $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$.

Доведемо, що u задовольняє (12). Для довільного $[t_1, t_2] \subset (-\infty, T]$ розглянемо множину Ψ таких функцій $\psi \in C([t_1, T])$, що $\psi(s) \geq 0$ для всіх $s \in [t_1, T]$. Тоді з (12) для довільного $\psi \in \Psi$ отримаємо

$$\int_{t_1}^{T} \psi(s) \left\{ \int_{Q_{T_1,s}} \left[\left(v_t - F^0, v - u^{m,m}\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(F^i, v_{x_i} - u^{m,m}_{x_i}\right) \right] dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{T} \left\langle A(t)u^{m,m}(t), v(t) \right\rangle dt \right\} ds \geq \int_{t_1}^{T} \psi(s)\, ds \left\{ \int_{t_1}^{s} \left\langle A(t)u^{m,m}(t), u^{m,m}(t) \right\rangle dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| v(x,s) - u^{m,m}(x,s) \right|^2 dx \right\} - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{T} \psi(s) \int_{\Omega} \left| v(x,t_1) - u^{m,m}(x,t_1) \right|^2 dx. \quad (15)$$

Маємо

$$\liminf \int_{t_1}^{T} \psi(s)\, ds \left\{ \int_{t_1}^{s} \left\langle A(t)u^{m,m}(t), u^{m,m}(t) \right\rangle dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| v(x,s) - u^{m,m}(x,s) \right|^2 dx \right\} \geq$$

$$\geq \int_{t_1}^{T} \psi(s)\, ds \left\{ \int_{t_1}^{s} \langle A(t)u(t), u(t) \rangle\, dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v(x,s) - u(x,s)|^2 dx \right\}.$$

Тоді з (15) отримуємо

$$\int_{t_1}^{T} \psi(s)\, ds \left\{ \int_{Q_{t_1,s}} \left[\left(v_t - F^0, v - u\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(F^i, v_{x_i} - u_{x_i}\right) \right] dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{s} \langle A(t)u(t), v(t) - u(t) \rangle\, dt \right\} \geq$$

$$\geq \int_{t_1}^{T} \psi(s) \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v(x,s) - u(x,s)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v(x,t_1) - u(x,t_1)|^2 dx \right\} ds.$$

Звідси випливає, що

$$\int_{Q_{t_1,s}} \left[(v_t, v - u) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left| u_{j,x_i} \right|^{p(x)-2} u_{j,x_i} \left(v_{j,x_i} - u_{j,x_i}\right) + \right.$$

$$\left. + (Cu, v - u) + \sum_{j=1}^{N} g_j \left|u_j\right|^{q(x)-2} u_j \left(v_j - u_j\right) - \left(F^0, v - u\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(F^i, v_{x_i} - u_{x_i}\right) \right] dx dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|v(x,s)-u(x,s)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|v(x,t_1)-u(x,t_1)|^2\,dx \tag{16}$$

майже для всіх $s\in[t_1,T]$. Тому можна вважати, що (16) виконується і для $s=$ $=t_2$. Отже, u — розв'язок нерівності (1).

Теорему доведено.

Поведінка розв'язків при $t\to\infty$, отримана нами в теоремах 1 та 3, збігається з результатами праці [14], де фактично розглядається випадок $p(x)\equiv\text{const}$, $q(x)\equiv\text{const}$.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.
2. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.
3. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 6. – С. 142 – 166.
4. *Олейник О. А.* О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях // Там же. – 1975. – **30**, № 2. – С. 219 – 220.
5. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Аналитичность и теоремы Лиувилля и Фрагмена – Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, вып. 4. – С. 59 – 70.
6. *Ивасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 5. – С. 547 – 552.
7. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 2. – С. 361 – 363.
8. *Ейдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.
9. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3 – 44.
10. *Bokalo M. M., Sikorsky V. M.* The well-posedness of Fourie problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order is unisotropic spaces // Мат. студії. – 1997. – **8**, № 1. – С. 53 – 70.
11. *Лавренюк С. П.* Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов з довільною поведінкою розв'язку на нескінченності // Допов. НАН України. – 1998. – № 2. – С. 40 – 43.
12. *Лавренюк С. П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий // Дифферен. уравнения. – 1996. – **32**, № 10. – С. 1 – 5.
13. *Лавренюк С. П.* Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 540 – 547.
14. *Бугрій О. М.* Деякі параболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Вісн. Львів. ун-ту. – 1998. – Вип. 49. – С. 113 – 121.
15. *Lavrenyuk S. P.* Parabolic variational inequalities without initial data // Нелинейные граничные задачи. – 1998. – № 8. – P. 173 – 178.
16. *Kovacik O., Rakosnik Z., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$, $W^{k,\,p(x)}$ // Czech. Math. J. – 1991. – **41**, № 4. – P. 592 – 618.
17. *Самохин В. Н.* Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 5. – С. 643 – 651.
18. *Бокало М. М., Сікорський В. М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів ун-ту. – 1998. – Вип. 51. – С. 85 – 99.
19. *Гаєвський Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Одержано 07.07.99,
після доопрацювання — 27.09.2000