УДК 517.5

Б. В. Винницький, І. Б. Шепарович (Дрогоб. пед. ун-т)

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ*

We find a criterion of the existence of solution of the interpolation problem $f(\lambda_n)=b_n$ in the class of functions f which are analytic in the unit disk and satisfy the relation

$$(\exists\tau_1\in(0;1))\ (\exists c_1>0)\ (\forall z, |z|<1):\ |f(z)| \le \exp\left(c_1\gamma^{\tau_1}\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right),$$

where $\gamma\colon[1;+\infty)\to(0;+\infty)$ is an increasing function such that a function $\ln\gamma(t)$ is convex with respect to $\ln t$ in the interval $[1;+\infty)$ and $\ln t = o(\ln\gamma(t))$, $t\to\infty$.

Знайдено критерій існування розв'язку інтерполяційної задачі $f(\lambda_n)=b_n$ у класі аналітичних в одиничному крузі функцій f, для яких

$$(\exists\tau_1\in(0;1))\ (\exists c_1>0)\ (\forall z, |z|<1):\ |f(z)| \le \exp\left(c_1\gamma^{\tau_1}\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right),$$

де $\gamma\colon[1;+\infty)\to(0;+\infty)$ — зростаюча функція така, що функція $\ln\gamma(t)$ опукла відносно $\ln t$ на проміжку $[1;+\infty)$ і $\ln t = o(\ln\gamma(t))$, $t\to\infty$.

Нехай (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел таких, що $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = 1$. Відома теорема Карлесона стверджує [1, с. 279], що для того, щоб для кожної обмеженої послідовності (b_n) комплексних чисел інтерполяційна задача

$$f(\lambda_n) = b_n \tag{1}$$

мала розв'язок у класі обмежених аналітичних в одиничному крузі функцій, необхідно і досить, щоб

$$(\exists\delta>0)\ (\forall n\in N):\ \prod_{j\ne n}\left|\frac{\lambda_n-\lambda_j}{1-\bar\lambda_j\lambda_n}\right| \ge \delta.$$

Метою статті є отримання критерію існування розв'язку вказаної задачі у класі аналітичних в одиничному крузі функцій, що визначаються зростаючою мажорантою γ. Нехай $\gamma\colon[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ — деяка зростаюча функція, для якої функція $\ln\gamma(t)$ є опуклою відносно $\ln t$ на $[1,+\infty)$ і

$$\ln t = o(\ln\gamma(t)),\quad t\to\infty. \tag{2}$$

Через $c_1, c_2, \ldots$ позначимо додатні сталі, а через $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — сталі з проміжку $(0,1)$. Класом A_γ назвемо множину анлітичних в одиничному крузі функцій, що задовольняють умову

$$(\exists\tau_1)\ (\exists c_1)\ (\forall z,\ |z|<1):\ |f(z)| \le \exp\left(c_1\gamma^{\tau_1}\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right). \tag{3}$$

Покладемо $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|<r\}$,

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)-n(0)}{t}dt + n(0)\ln r,\quad n(t) = \sum_{|\lambda_n|\le t} 1.$$

Доведемо наступні твердження.

---

* Робота частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU071012.

Теорема 1. *Для того щоб послідовність* (λ_n) *була послідовністю нулів деякої функції* $L \not\equiv 0$ *з класу* A_γ, *необхідно і достатньо, щоб*

$$(\exists \tau_2)\ (\exists c_2)\ (\forall r \in (0,1)):\ N(r) \ \le\ c_2 \gamma^{\tau_2}\left(\frac{c_2}{1-r}\right). \tag{4}$$

Теорема 2. *Для того щоб для кожної послідовності* (b_n) *комплексних чисел з властивістю*

$$(\exists \tau_3)\ (\exists c_3)\ (\forall n \in N):\ |b_n| \ \le\ \exp\left(c_3 \gamma^{\tau_3}\left(\frac{c_3}{1-|\lambda_n|}\right)\right) \tag{5}$$

існувала функція $f \in A_\gamma$, *що задовольняє умову* (1), *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (4) *і для деякої функції* $L \in A_\gamma$, *яка має прості нулі в точках* λ_n, *справедливою була така умова*:

$$(\exists \tau_4)\ (\exists c_4)\ (\forall n \in N):\ \frac{1}{|(1-|\lambda_n|)\,L'(\lambda_n)|} \ \le\ \exp\left(c_4 \gamma^{\tau_4}\left(\frac{c_4}{1-|\lambda_n|}\right)\right). \tag{6}$$

Зазначимо, що аналогічні інтерполяційні задачі в різних підкласах цілих функцій та функцій, аналітичних у півплощині, які визначаються певною мажорантою, розглядались у працях А. Леонтьєва [2, 3] та його послідовників А. Братищева, Ю. Коробейника, Г. Лапіна, А. Грішина, Г. Малютіна, Т. Абаніної та ін.

***Доведення теореми* 1.** Якщо існує деяка функція $L \in A_\gamma$ з послідовністю нулів (λ_n), то з нерівності Єнсена $N(r) \le \ln M_L(r) + O(1)$, $r \in (0;1)$, випливає (4).

Навпаки, нехай тепер умова (4) виконується. Доведемо, що існує аналітична в одиничному крузі функція, що задовольняє умову (3). Для простоти вважатимемо, що всі $\lambda_n \ne 0$. Задамо L таким чином:

$$L(z) \ =\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z}\right)\exp\sum_{\nu=1}^{k_n-1}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1-|\lambda_n|^2}{|1-\bar{\lambda}_n z|}\right)^{\nu} \ =\ \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z},\ k_n-1\right). \tag{7}$$

Зауважимо, що якщо (k_n) — послідовність натуральних чисел, вибрана так, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho(1-|\lambda_n|)\right)^{k_n}$$

є збіжним для кожного $\rho > 0$, то L буде аналітичною в крузі $\{z: |z|<1\}$. Справді, нехай $R \in (0;1)$, $|z| \le R$ і $N = \min\{n: |\lambda_n| > (R+3)/4\}$. Тоді для $n \ge N$ маємо

$$\left|\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z}\right| \ \le\ 2\,\frac{1-|\lambda_n|}{1-|z|} \ <\ \frac{1}{2}.$$

Оскільки [3, с. 24] $|\ln E(u,p)| \le 2|u|^{p+1}$ при $|u| < 1/2$, то при $|z| \le R$ і $n \ge N$

$$\left|\ln E\left(\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z},\ k_n-1\right)\right| \ \le\ 2\left(2\,\frac{1-|\lambda_n|}{1-R}\right)^{k_n}.$$

Тому ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln E\left(\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z},\ k_n-1\right)$ є рівномірно збіжним в $|z| \le R$ і, отже, добуток (7) є аналітичною в крузі $\{z: |z|<1\}$ функцією.

З властивостей функції γ випливає, що функція $\gamma_1(t) = \tau_6 \ln\gamma(ct)$, $c = 4c_2$,

$\tau_2 < \tau_6 < 1$, є опуклою відносно $\ln t$ і $\ln t = o(\gamma_1(t))$ при $t \to \infty$. Тому [4] існує ціла функція $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n z^n$ така, що

$$\ln M_\psi(t) = (1 + o(1)) \ln \gamma^{\tau_6}(ct), \quad t \to \infty.$$

Позначимо

$$\mu_\psi(r) = \max_{n \ge 0} \{ |\psi_n| r^n \}, \qquad \kappa_n(\psi) = \left| \frac{\psi_{n-1}}{\psi_n} \right|.$$

Використовуючи відомі нерівності

$$\mu_\psi(t) \le M_\psi(t) \le \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \mu_\psi((1+\varepsilon)t), \quad \varepsilon > 0, \quad t > 0, \tag{8}$$

при великих t отримуємо

$$\mu_\psi(t) \le \gamma^{\tau_7}(ct), \quad \mu_\psi(2t) \ge \gamma^{\tau_8}(ct), \quad \tau_2 < \tau_8 < \tau_6 < \tau_7 < 1. \tag{9}$$

Нехай $k_n = p_n + b$, $b = [\Delta] + 1$, $\Delta = \tau_8 / \tau_2$, а p_n задамо так, щоб

$$\kappa_{p_n}(\hat{\psi}) \le \delta_n < \kappa_{p_n+1}(\hat{\psi}),$$

де $\delta_n = (1 - |\lambda_n|)^{-1}$, $\hat{\psi}$ — мажоранта Ньютона [5] функції ψ. Відомо [6], що

$$\mu_\psi(\delta_n) = \hat{\psi}_{p_n} \delta_n^{p_n}, \qquad \mu_\psi(t) \ge \hat{\psi}_{p_n} t^{p_n}. \tag{10}$$

Використовуючи умову (4) і нерівності

$$N\left(\frac{r+1}{2}\right) \ge \int_r^{(r+1)/2} \frac{n(t)}{t} dt \ge n(r) \ln\left(1 + \frac{1-r}{2r}\right) \ge n(r) \frac{\frac{1-r}{2r}}{1 + \frac{1-r}{2r}} \ge \frac{1-r}{2} n(r),$$

отримуємо

$$n \le n(|\lambda_n|) \le \frac{2c_2}{1 - |\lambda_n|} \gamma^{\tau_2}\left(\frac{2c_2}{1 - |\lambda_n|}\right). \tag{11}$$

Згідно з (2) для довільних $d \ge 1$ і τ, τ', $0 < \tau < \tau' < 1$, при $r \to 1$ виконується

$$\frac{1}{(1-r)^d} \gamma^{\tau}\left(\frac{1}{1-r}\right) \le \gamma^{\tau'}\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{12}$$

Тому з (9) – (12) випливає

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |\lambda_n|}{1-r}\right)^{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |\lambda_n|}{1-r}\right)^{b+p_n} = \frac{1}{(1-r)^b} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n|)^b \frac{\hat{\psi}_{p_n} \left(\frac{1}{1-r}\right)^{p_n}}{\hat{\psi}_{p_n} \delta_n^{p_n}} \le$$

$$\le \frac{1}{(1-r)^b} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n|)^b \frac{\mu_\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\mu_\psi(\delta_n)} \le \frac{1}{(1-r)^b} \gamma^{\tau_7}\left(\frac{c}{1-r}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - |\lambda_n|)^\Delta}{\gamma^{\tau_8}\left(\frac{c/2}{1 - |\lambda_n|}\right)} \le$$

$$\le \gamma^{\tau_9}\left(\frac{4c_2}{1-r}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2c_2)^\Delta}{\left(\frac{2c_2}{1 - |\lambda_n|} \gamma^{\tau_2}\left(\frac{2c_2}{1 - |\lambda_n|}\right)\right)^\Delta} \le c_8 \gamma^{\tau_9}\left(\frac{c_8}{1-r}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^\Delta.$$

Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|\lambda_n|}{1-r}\right)^{k_n} \le c_8\gamma^{\tau_9}\left(\frac{c_8}{1-r}\right). \tag{13}$$

Отже, функція вигляду (7) є аналітичною в крузі $\{z:|z|<1\}$. Доведемо, що L задовольняє умову (3). Нехай $u=\dfrac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z}$, $L = L_1\times L_2\times L_3$, де

$$L_1 = \prod_{|u|<1/2}(1-u)\exp\sum_{\nu=1}^{k_n-1}\frac{1}{\nu}u^{\nu},$$

$$L_2 = \prod_{|u|\ge 1/2}(1-u), \qquad L_3 = \prod_{|u|\ge 1/2}\exp\sum_{\nu=1}^{k_n-1}\frac{1}{\nu}u^{\nu}.$$

Згідно з [3, с. 24]

$$|\ln|L_1|| \le \sum_{|u|<1/2}2|u|^{k_n}, \qquad |\ln|L_3|| \le \sum_{|u|\ge 1/2}(2|u|)^{k_n-1}. \tag{14}$$

Оскільки [7, с. 174] $\left|\dfrac{\bar{\lambda}_n(\lambda_n-z)}{1-\bar{\lambda}_n z}\right|<1$ при $|z|<1$, то $\ln|L_2|<0$. Тому, враховуючи (13), (14), отримуємо

$$\ln|L(z)| \le \sum_{|u|<1/2}2|u|^{k_n}+\sum_{|u|\ge 1/2}(2|u|)^{k_n-1} \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|2\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z}\right|^{k_n} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(4\frac{1-|\lambda_n|}{1-|z|}\right)^{k_n} \le c_8\gamma^{\tau_9}\left(\frac{4c_8}{1-|z|}\right) \le c_9\gamma^{\tau_9}\left(\frac{c_9}{1-|z|}\right).$$

Отже, $L\in A_\gamma$, що й потрібно було довести.

Доведення теореми 2. *Необхідність.* Оскільки для послідовності $(b_n) = (1,0,\ldots,0)$ існує функція $f\in A_\gamma$ така, що $f(\lambda_n) = b_n$, то функція $\phi(z) = (z-\lambda_1)f(z)$ має нулі в усіх точках λ_n, $\phi\not\equiv 0$ і, очевидно, $\phi\in A_\gamma$, оскільки

$$|\phi(z)| = |z-\lambda_1||f(z)| \le \exp\left(2c_1\gamma^{\tau_1}\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right).$$

Тому за теоремою 1 виконується (4). Доведемо тепер необхідність умови (6) від супротивного. Припустимо, що для кожної функції L з класу A_γ, яка має прості нулі в точках λ_n, умова (6) не виконується. Тоді, на підставі того, що що ця умова рівносильна такій умові:

$$(\exists\tau_4)\ (\exists c_4):\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{|(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n)|}}{\gamma^{\tau_4}\left(\dfrac{c_4}{1-|\lambda_n|}\right)} < +\infty, \tag{15}$$

для функції L вигляду (7) існує підпослідовність (λ_{n_m}) послідовності (λ_n) така, що

$$\frac{1}{|(1-|\lambda_{n_m}|)L'(\lambda_{n_m})|} > \exp\left(m\gamma^{1-1/m}\left(\frac{m}{1-|\lambda_{n_m}|}\right)\right).$$

Послідовність (λ_{n_m}) можна вибрати так [1, с. 289–291], що

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\left|\lambda_{n_m}\right|\right) < \infty, \quad \left|\left(1-\left|\lambda_{n_m}\right|\right)B'(\lambda_{n_m})\right| \geq \delta > 0, \tag{16}$$

де

$$B(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{\lambda}_{n_m}}{\left|\lambda_{n_m}\right|}\frac{\lambda_{n_m}-z}{1-\overline{\lambda}_{n_m}z}.$$

Тоді [1, с. 96] B — аналітична в одиничному крузі функція і $|B(z)| \leq 1$ при $|z|<1$. Оскільки послідовність

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = n_m; \\ 0, & n \neq n_m, \end{cases}$$

задовольняє умову (5), то існує функція $f \in A_\gamma$ така, що $f(\lambda_{n_m}) = 1$ і $f(\lambda_n) = 0$ при $n \neq n_{n_m}$. Покладемо

$$\Omega(z) = \frac{f(z)\,B(z)}{L(z)}.$$

Функція Ω є аналітичною в одиничному крузі. Як відомо [8, с. 702], існує така система кругів $C_n(\lambda_n, \alpha_n) = \{z : |z-\lambda_n| < \alpha_n\}$, що

$$\sum_{r<|\lambda_n|+\alpha_n<1} \alpha_n = o(1-r),$$

поза якою виконується

$$\ln|L(z)| > -\frac{1}{(1-|z|)^2}\ln M_L(|z|+o(1-|z|)), \quad |z| \to 1. \tag{17}$$

Нехай $R_k = 1-2^{-k}$. Сума радіусів тих виняткових кругів, які мають спільні точки з областю $\{z : R_k < |z| < 1\}$, при $k \geq k_0$ не перевищує

$$\sum_{R_k<|\lambda_{n_k}|+\alpha_{n_k}<1} \alpha_{n_k} < 0{,}1\,(1-R_k).$$

З іншого боку, $R_{k+1} - R_k = \left(2^{k+1}\right)^{-1} = 0{,}5\,(1-R_k)$. Тому існують кола $\{z : |z| = r_k,\ R_k < r_k < R_{k+1}\}$, які не перетинаються з винятковими кругами, і, отже, при $|z| = r_k$ виконується

$$\ln|L(z)| > -\frac{1}{(1-|z|)^2}\ln M_L\left(\frac{|z|+1}{2}\right). \tag{18}$$

Таким чином, на основі (3), (12), (18) отримуємо

$$\ln|\Omega(z)| \leq c_1\gamma^{\tau_1}\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right) + c_{10}\gamma^{\tau_{10}}\left(\frac{c_{10}}{1-|z|}\right) \leq c_{11}\gamma^{\tau_{11}}\left(\frac{c_{11}}{1-|z|}\right), \quad |z| = r_k.$$

Згідно з принципом максимума для $z \in D_k = \{z : r_{k-1} < |z| < r_k\}$ маємо

$$\ln|\Omega(z)| \leq c_{11}\gamma^{\tau_{11}}\left(\frac{c_{11}}{1-r_k}\right) \leq c_{11}\gamma^{\tau_{11}}\left(\frac{2c_{11}}{1-r_{k-1}}\right) \leq c_{11}\gamma^{\tau_{11}}\left(\frac{c_{12}}{1-|z|}\right). \tag{19}$$

Крім цього,

$$\frac{1}{\left(1-\left|\lambda_{n_m}\right|\right)L'(\lambda_{n_m})} = \frac{\Omega(\lambda_{n_m})}{\left(1-\left|\lambda_{n_m}\right|\right)B'(\lambda_{n_m})}.$$

Тому, виходячи з (16), (19), робимо висновок, що існують такі сталі τ_{11}, c_{12}, що

$$\frac{1}{\left|\left(1-\left|\lambda_{n_m}\right|\right)L'(\lambda_{n_m})\right|} \leq \exp\left(c_{12}\gamma^{\tau_{11}}\left(\frac{c_{12}}{1-\left|\lambda_{n_m}\right|}\right)\right),$$

а це суперечить припущенню (15).

Достатність. Знову вважатимемо, що всі $\lambda_n \neq 0$. Оскільки функція $\gamma_2(t) = \ln\left(c_0\gamma^{\tau_0}(c_0 t)\right)$, де $\max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\} < \tau_0 < 1$, $c_0 = c_1 + 4(c_2 + c_3 + c_4)$, є опуклою відносно $\ln t$ на $[1; +\infty)$, то такою є і функція $c_0\gamma^{\tau_0}(c_0 t) = e^{\gamma_2(t)}$. Тому [4] існує ціла функція θ така, що

$$\ln M_\theta(t) = (1+o(1))c_0\gamma^{\tau_0}(c_0 t), \quad t \to \infty.$$

Використовуючи нерівності (8), отримуємо

$$\begin{aligned} \mu_\theta(t) &\leq \exp\left(2c_0\gamma^{\tau_0}(c_0 t)\right), \quad t \geq t_0, \\ \mu_\theta(t) &\geq \exp\left(c_0\gamma^{\tau_0}(c_0 t/2)/4\right), \quad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Виберемо послідовність (s_n) так, щоб

$$\kappa_{s_n}(\hat{\theta}) \leq \delta_n < \kappa_{s_n+1}(\hat{\theta}), \qquad \delta_n = \frac{1}{1-|\lambda_n|},$$

де $\hat{\theta}$ — мажоранта Ньютона функції θ. Тоді, як вже згадувалось (див. доведення теореми 1),

$$\mu_\theta(\delta_n) = \hat{\theta}_{s_n}\delta_n^{s_n}. \tag{21}$$

В роботі [9] показано, що для всіх $r \in [0;1)$ і тих $\delta > 0$, при яких $(1+\delta)r < 1$, виконується

$$\max_{|z|=r}\left|\frac{L(z)}{z-\lambda_n}\right| \leq K(\delta)\frac{M_L((1+\delta)r)}{r+|\lambda_n|}, \qquad K(\delta) \leq \frac{2(2+\delta)}{\delta}.$$

Тому при $\delta = (1-r)/(2r)$ отримаємо

$$\max_{|z|=r}\left|\frac{L(z)}{z-\lambda_n}\right| \leq \frac{8}{1-r}\frac{M_L\left(\frac{r+1}{2}\right)}{r+|\lambda_n|} \leq \frac{c_{13}}{1-r}M_L\left(\frac{r+1}{2}\right). \tag{22}$$

Покажемо, що функція

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n L(z)}{(z-\lambda_n)L'(\lambda_n)}\left(\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z}\right)^{s_n}$$

належить до класу A_γ. З нерівностей (12), (20) – (22) та з умов (3), (5), (6) випливає

$$|f(z)| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{L(z)}{z-\lambda_n}\right|\frac{|b_n|}{|L'(\lambda_n)|}\left|\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z}\right|^{s_n} \leq$$

$$\leq \frac{c_{13}}{1-r}M_L\left(\frac{r+1}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{|(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n)|}\frac{\hat{\theta}_{s_n}\left(\frac{2}{1-r}\right)^{s_n}}{\hat{\theta}_{s_n}\left(\frac{1}{1-|\lambda_n|}\right)^{s_n}} \leq$$

$$\leq \frac{c_{13}}{1-r}\exp\left(c_1\gamma^{\tau_1}\left(\frac{2c_1}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{|(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n)|}\frac{\mu_\theta\left(\frac{2}{1-r}\right)}{\mu_\theta\left(\frac{1}{1-|\lambda_n|}\right)} \leq$$

$$\leq \exp\left(4c_0\gamma^{\tau_0}\left(\frac{2c_0}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(c_3\gamma^{\tau_3}\left(\frac{c_3}{1-|\lambda_n|}\right)+c_4\gamma^{\tau_4}\left(\frac{c_4}{1-|\lambda_n|}\right)-\frac{c_0}{4}\gamma^{\tau_0}\left(\frac{c_0/2}{1-|\lambda_n|}\right)\right)\leq$$

$$\leq \exp\left(c_{14}\gamma^{\tau_0}\left(\frac{c_{14}}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-c_2\gamma^{\tau_0}\left(\frac{2c_2}{1-|\lambda_n|}\right)\right).$$

Звідси, враховуючи (11), (12), отримуємо потрібний результат. Таким чином, теорему 2 доведено, оскільки в даному випадку функція f задовольняє умову (1).

Зауваження. Із доведення видно, що умову (6) можна розуміти так: для побудованої в теоремі 1 функції L виконується (6).

Теорема 3. *Для того щоб для кожної послідовності комплексних чисел* (b_n), *що задовольняють умову* (5), *існувала функція* $f\in A_\gamma$, *що задовольняє умову* (1), *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (4) *і*

$$(\exists\tau_5)\ (\exists c_5)\ (\forall n\in N):\quad \prod_{\substack{i\neq n\\ |\lambda_i|\leq(1+|\lambda_n|)/2}}\left|\frac{\lambda_i-\lambda_n}{1-\bar\lambda_i\lambda_n}\right| \geq \exp\left(-c_5\gamma^{\tau_5}\left(\frac{c_5}{1-|\lambda_n|}\right)\right).$$

Доведення. Нехай L — функція вигляду (7), $l_n(z)=L(z)/B_n(z)$, де

$$B_n(z) = \prod_{|\lambda_i|\leq(1+|\lambda_n|)/2}\frac{\bar\lambda_i}{|\lambda_i|}\frac{\lambda_i-z}{1-\bar\lambda_i z}.$$

Тоді $|B_n'(\lambda_n)|=|L'(\lambda_n)|/|l_n(\lambda_n)|$. Оскільки

$$\prod_{\substack{i\neq n\\ |\lambda_i|\leq(1+|\lambda_n|)/2}}\left|\frac{\lambda_i-\lambda_n}{1-\bar\lambda_i\lambda_n}\right| = \left(1-|\lambda_n|^2\right)|B_n'(\lambda_n)|,$$

то досить показати, що

$$(\exists\tau_{15})\ (\exists c_{15})\ :\ \ |\ln|l_n(\lambda_n)|| \leq c_{15}\gamma^{\tau_{15}}\left(\frac{c_{15}}{1-|\lambda_n|}\right).$$

Маємо $|l_n(\lambda_n)|=|L_1(\lambda_n)|\times|L_3(\lambda_n)|\times|L_4(\lambda_n)|\times|L_5(\lambda_n)|$, де

$$L_1(\lambda_n) = \prod_{\frac{1-|\lambda_i|^2}{|1-\bar\lambda_i\lambda_n|}<\frac12} E\left(\frac{1-|\lambda_i|^2}{1-\bar\lambda_i\lambda_n},\ k_i-1\right),$$

$$L_3(\lambda_n) = \prod_{\frac{1-|\lambda_i|^2}{|1-\bar\lambda_i\lambda_n|}\geq\frac12}\exp\sum_{\nu=1}^{k_i-1}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1-|\lambda_i|^2}{1-\bar\lambda_i\lambda_n}\right)^{\nu},$$

$$L_4(\lambda_n) = \prod_{|\lambda_i|\leq\frac{1+|\lambda_n|}{2}}|\lambda_i|,\qquad L_5(\lambda_n) = \prod_{\substack{\frac{1-|\lambda_i|^2}{|1-\bar\lambda_i\lambda_n|}\geq\frac12\\ |\lambda_i|>\frac{1+|\lambda_n|}{2}}}\bar\lambda_i\frac{\lambda_i-\lambda_n}{1-\bar\lambda_i\lambda_n}.$$

Як і при доведенні теореми 1, маємо

$$\left|\ln|L_1(\lambda_n)|\right| + \left|\ln|L_3(\lambda_n)|\right| \le c_9\gamma^{\tau_9}\left(\frac{c_9}{1-|\lambda_n|}\right). \tag{23}$$

З нерівностей (11), (12) отримуємо

$$\left|\ln|L_4(\lambda_n)|\right| \le \sum_{|\lambda_i|\le(1+|\lambda_n|)/2} \left|\ln|\lambda_i|\right| \le \left|\ln|\lambda_1|\right| n\left(\frac{1+|\lambda_n|}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{4c_2\left|\ln|\lambda_1|\right|}{1-|\lambda_n|}\gamma^{\tau_2}\left(\frac{4c_2}{1-|\lambda_n|}\right) \le c_{16}\gamma^{\tau_{16}}\left(\frac{c_{16}}{1-|\lambda_n|}\right). \tag{24}$$

Крім цього, з нерівності $\dfrac{1-|\lambda_i|^2}{|1-\bar\lambda_i\lambda_n|} \ge \dfrac{1}{2}$ випливає $|\lambda_i| \le \dfrac{3+|\lambda_n|}{4}$. Тоді при $\dfrac{1-|\lambda_n|}{2} < |\lambda_i| < \dfrac{3+|\lambda_n|}{4}$ отримуємо

$$\left|\ln\left|\bar\lambda_i\frac{\lambda_i-\lambda_n}{1-\bar\lambda_i\lambda_n}\right|\right| = \ln\left|\bar\lambda_i\frac{1-\bar\lambda_i\lambda_n}{\bar\lambda_i(\lambda_i-\lambda_n)}\right| \le \ln\frac{2}{\frac{1+|\lambda_n|}{2}\left(\frac{1+|\lambda_n|}{2}-|\lambda_n|\right)} \le$$

$$\le \ln\frac{8}{1-|\lambda_n|} \le \frac{c_{17}}{1-|\lambda_n|}.$$

Тому з (11) і (12) випливає

$$\left|\ln|L_5(\lambda_n)|\right| \le \sum_{\frac{1+|\lambda_n|}{2}<|\lambda_i|<\frac{3+|\lambda_n|}{4}} \left|\ln\left|\bar\lambda_i\frac{\lambda_i-\lambda_n}{1-\bar\lambda_i\lambda_n}\right|\right| \le$$

$$\le \frac{c_{17}}{1-|\lambda_n|}\sum_{|\lambda_i|<\frac{3+|\lambda_n|}{4}} 1 \le \frac{c_{17}}{1-|\lambda_n|}n\left(\frac{3+|\lambda_n|}{4}\right) \le c_{18}\gamma^{\tau_{18}}\left(\frac{c_{18}}{1-|\lambda_n|}\right). \tag{25}$$

Таким чином, з (23) – (25) отримуємо потрібний висновок.

1. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 310 с.
2. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **39**. – 290 с.
4. *Clunie J., Kovari I.* On integral functions having prescribed asymptotic grows. II // Canad. J. Math. – 1968. – **20**, № 1. – P. 7 – 20.
5. *Валирон Ж.* Аналитические функции. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1957. – 235 с.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2-х т. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 432 с.
7. *Нафталевич А. Г.* Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге // Лит. мат. сб. – 1961. – **1**, № 1-2. – С. 159 – 180.
8. *Фридман А. Н.* Оценки снизу субгармонических функций // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 5. – С. 701 – 706.
9. *Винницкий Б. В.* О построении целой функции произвольного порядка с заданными асимптотическими свойствами // Там же. – 1986. – **38**, № 2. – С. 143 – 148.

Одержано 26.04.99