УДК 519.21

Л. Л. Зайцева (Ін-т математики НАН України, Київ)

БРОУНІВСЬКИЙ РУХ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ З НАПІВПРОЗОРОЮ МЕМБРАНОЮ НА ГІПЕРПЛОЩИНІ

We construct a continuous Markov process in a separable Hilbert space. Everywhere in the space except a hyperplane S orthogonal to the given unit vector ν, this process demonstrates the behavior of a homogeneous Gaussian process with the given correlation operator tB, where B is a nuclear nonsingular operator. After attaining the hyperplane, the process gets an impulse which is infinite in module and acts in the direction A such that $|(A, \nu)| \leq (B\nu, \nu)$. We find a stochastic differential equation whose solutions are trajectories of the process constructed.

У сепарабельному гільбертовому просторі побудовано неперервний процес Маркова, який скрізь у просторі, крім гіперплощини S, ортогональної до заданого орта ν, веде себе як однорідний гауссівський процес із заданим кореляційним оператором tB, де B — ядерний невироджений оператор. Коли процес потрапляє на гіперплощину, він отримує нескінченний за модулем імпульс у напрямку A такому, що $|(A, \nu)| \leq (B\nu, \nu)$. Знайдено стохастичне диференціальне рівняння, розв'язками якого є траєкторії побудованого процесу.

Вступ. Дифузійні процеси в d-вимірному евклідовому просторі $\mathfrak{R}^d$ з вектором переносу, який має вигляд узагальненої функції і дорівнює $(qB\nu + \alpha)\delta_S(x)$, та з оператором дифузії B, де B — сталий невід'ємний симетричний оператор, розглядались раніше. Тут ν — заданий одиничний вектор в $\mathfrak{R}^d$, S — гіперплощина в $\mathfrak{R}^d$, ортогональна до ν, q — задане дійсне число, $|q| \leq 1$, α — заданий вектор з S, а $\delta_S(x)$ — узагальнена функція на $\mathfrak{R}^d$, дія якої на пробну функцію зводиться до інтегрування останньої по S. Такі процеси було побудовано в просторі $\mathfrak{R}^d$ двома методами: аналітичним, як розв'язок крайової задачі рівняння з частинними похідними параболічного типу (див. [1], частинний випадок, коли B — тотожний оператор, розглянуто в роботі [2]), і ймовірнісним, як розв'язок стохастичного диференціального рівняння [1]. У більш загальній постановці (а саме, коли параметри задачі α, q є функціями від $x \in S$, а B — функцією від $x \in \mathfrak{R}^d$) ця задача розв'язана аналітичним методом для випадку простору $\mathfrak{R}^d$ [3].

У роботі [4] проведено узагальнення даних результатів на випадок сепарабельного гільбертового простору $(X, \mathcal{B}(X))$, де $\mathcal{B}(X)$ — σ-алгебра борелевих підмножин X, у випадку, коли $\alpha = 0$. Процес побудовано за додаткової умови, що ν належить до множини значень оператора B.

Метою даної роботи є побудова в гільбертовому просторі $(X, \mathcal{B}(X))$ узагальненого дифузійного процесу, який є аналогом процесу, побудованого в роботі [1], причому на параметри задачі не буде накладено ніяких обмежень.

У першій частині роботи розглядається спеціальне зображення для гауссової міри в гільбертовому просторі. Це зображення використано для побудови напівгрупи операторів, яка відповідає шуканому процесові, властивості якої досліджуються в другій частині роботи. В результаті показано, що в просторі $(X, \mathcal{B}(X))$ існує неперервний процес Маркова з імовірністю переходу, яка відповідає побудованій напівгрупі операторів. Далі знаходиться стохастичне диференціальне рівняння, розв'язками якого є траєкторії побудованого процесу.

1. Зображення гауссової міри в гільбертовому просторі. В сепарабельному гільбертовому просторі $(X, \mathcal{B}(X))$ розглянемо гауссову міру $P_0(t, x, \Gamma)$, $t > 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}(X)$, з середнім значенням $x \in X$ і заданим кореляційним оператором tB, де B — невироджений ядерний оператор в X.

Зафіксуємо одиничний вектор $\nu \in X$ і позначимо через S гіперплощину, ортогональну до ν: $S = \{ x \in X \mid (x, \nu) = 0 \}$.

За оператором B побудуємо оператор B_S, який діє таким чином:

$$B_S = B - \frac{1}{(B\nu, \nu)} \Pi_{B\nu},$$

де $\Pi_{B\nu}$ — оператор, що визначається співвідношенням $\Pi_{B\nu} x = (x, B\nu) B\nu$, $x \in X$.

Оператор B_S має такі властивості:

1) B_S — симетричний оператор;

2) B_S — невід'ємний оператор, а на S — додатний, оскільки для довільного $x \in X$ згідно з нерівністю Коші – Буняковського

$$(B_S x, x) = (Bx, x) - \frac{1}{(B\nu, \nu)} (B\nu, x)^2 \geq 0,$$

причому знак рівності тут має місце тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ або $x = k\nu$, $k \in \mathcal{R}$;

3) B_S — ядерний оператор, оскільки B, $\Pi_{B\nu}$ — ядерні;

4) $B_S : X \to S$, оскільки

$$\forall x \in X \quad (B_S x, \nu) = (x, B_S \nu) = 0.$$

Подамо X як пряму суму двох підпросторів: гіперплощини S і підпростору L, який породжений вектором ν,

$$X = L + S.$$

На S і L задані борелеві σ-алгебри $\mathcal{B}(S)$ і $\mathcal{B}(L)$ відповідно. Тоді має місце наступне твердження.

Лема 1. *Гауссову міру* $P_0(t, x, \Gamma)$ *можна зобразити у вигляді*

$$P_0(t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma_\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(y_\nu - x_\nu)^2}{2t\sigma^2} \right\} P^S_{y_\nu}\left(t, \bar{x}, \Gamma^S\right) dy_\nu, \tag{1}$$

де $\Gamma^S \in \mathcal{B}(S)$, $\Gamma_\nu \in \mathcal{B}(L)$, $\Gamma = \Gamma_\nu \times \Gamma^S$, dy_ν *— лебегова міра в просторі* $(L, \mathcal{B}(L))$, $P^S_{y_\nu}\left(t, \bar{x}, \Gamma^S\right)$ *— міра в просторі* $(S, \mathcal{B}(S))$, *яка при кожному* $y_\nu \in L$ *є гауссовою з середнім значенням* $\bar{x} = x^S + (y_\nu - x_\nu) b / \sigma^2$ (*тут* $x_\nu = (x, \nu)$, $x^S = \Pi_S x$, $b = \Pi_S B\nu$, $\sigma^2 = (B\nu, \nu)$, Π_S *— оператор ортогонального проектування на гіперплощину* S) *і кореляційним оператором* tB_S.

Зауваження. Формула (1) задає міру на прямокутниках $\Gamma_\nu \times \Gamma^S$ σ-алгебри $\mathcal{B}(X)$. Згідно з теоремою про добуток мір [5, с. 144 – 146] зображення (1) можна продовжити на $\mathcal{B}(X)$.

Доведення. Покажемо, що характеристична функція в правій частині зображення (1) збігається з характеристичною функцією гауссової міри $P_0(t, x, \Gamma)$.

Оскільки $(z, B\nu)^2 = (z, (z, B\nu) B\nu) = (z, \Pi_{B\nu} z)$, то для $z \in X$ маємо

$$\iint_{L \times S} \exp\{ i(z, y) \} \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(y_\nu - x_\nu)^2}{2t\sigma^2} \right\} P^S_{y_\nu}\left(t, \bar{x}, dy^S\right) dy_\nu =$$

$$= \int_L \exp\{ i(z, y) \} \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(y_\nu - x_\nu)^2}{2t\sigma^2} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ i\left(z^S, x^S + \frac{y_\nu - x_\nu}{\sigma^2} b \right) - \frac{t}{2} (B_S z_S, z_S) \right\} dy_\nu =$$

$$= \exp\left\{i(z, x) - \frac{t}{2}(B_S z_S, z_S)\right\} \int_L \exp\left\{i(z, B\nu)\frac{y_\nu - x_\nu}{\sigma^2}\right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y_\nu - x_\nu)^2}{2t\sigma^2}\right\} dy_\nu =$$

$$= \exp\left\{i(z, x) - \frac{t}{2}(B_S z_S, z_S) - \frac{t}{2}\frac{(z, B\nu)^2}{\sigma^2}\right\} = \exp\left\{i(z, x) - \frac{t}{2}(Bz, z)\right\}.$$

Лему доведено.

2. Побудова напівгрупи операторів. Для заданих $q \in \mathcal{R}$, $|q| \le 1$, $\alpha \in S$ на множинах вигляду $\Gamma = \Gamma_\nu \times \Gamma^S$ визначимо міру $P(t, x, \Gamma)$, $t > 0$, $x \in X$, наступним чином:

$$P(t, x, \Gamma) =$$

$$= \int_{\Gamma_\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}}\left[\exp\left\{-\frac{(y_\nu - x_\nu)^2}{2t\sigma^2}\right\} - \exp\left\{-\frac{(|x_\nu| + |y_\nu|)^2}{2t\sigma^2}\right\}\right] P^S_{y_\nu}(t, \bar{x}, \Gamma^S)\, dy_\nu +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\Gamma_\nu} (1 + q\,\mathrm{sign}\, y_\nu) \frac{|x_\nu| + |y_\nu| + \sigma^2\theta}{\sqrt{2\pi t^3\sigma^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\left(|x_\nu| + |y_\nu| + \sigma^2\theta\right)^2}{2t\sigma^2}\right\} P^S_{y_\nu}(t, \bar{x} + \alpha\theta, \Gamma^S)\, dy_\nu\, d\theta, \tag{2}$$

де $x_\nu = (x, \nu)$, $\sigma^2 = (B\nu, \nu)$, міра $P^S_{y_\nu}(t, \bar{x}, \Gamma^S)$ визначається так само, як у лемі 1.

Міру $P(t, x, \Gamma)$ можна зобразити також у вигляді

$$P(t, x, \Gamma) = \int_0^\infty \int_{\Gamma_\nu} P^S_{y_\nu}(t, \bar{x} + \alpha\theta, \Gamma^S) P_\theta(t, x_\nu, dy_\nu)\, d\theta,$$

де $P_\theta(t, x_\nu, dy_\nu)$ — міра в просторі $(L, \mathcal{B}(L))$, яка задається формулою

$$P_\theta(t, x_\nu, dy_\nu) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}}\left[\exp\left\{-\frac{(y_\nu - x_\nu)^2}{2t\sigma^2}\right\} - \exp\left\{-\frac{(|x_\nu| + |y_\nu|)^2}{2t\sigma^2}\right\}\right]\delta(\theta) +\right.$$

$$\left. + (1 + q\,\mathrm{sign}\, y_\nu)\frac{|x_\nu| + |y_\nu| + \sigma^2\theta}{\sqrt{2\pi t^3\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\left(|x_\nu| + |y_\nu| + \sigma^2\theta\right)^2}{2t\sigma^2}\right\}\right\} dy_\nu,$$

де $\delta(\theta)$ — дельта-функція Дірака.

Продовжимо $P(t, x, \Gamma)$ на σ-алгебру $\mathcal{B}(X)$ (теорема про добуток мір, див. [5]) і розглянемо сім'ю операторів, яка діє в банаховому просторі $\mathcal{B}_X$ всіх дійсних борелевих функцій на X з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x \in X}|\varphi(x)|$ таким чином:

$$T_t\varphi(x) = \int_X \varphi(y) P(t, x, dy).$$

При кожному $t > 0$ оператор T_t є обмеженим лінійним оператором у просторі $\mathcal{B}_X$. Обмеженість випливає з того, що $\int_X P(t, x, dy) = 1$.

Умова $|q| \le 1$ є необхідною і достатньою для того, щоб $T_t\varphi(x) \ge 0$, $t > 0$,

$x \in X$, якщо тільки $\varphi(x) \geq 0$, $x \in X$. Це дійсно так, оскільки перший доданок є невід'ємним при всіх $t > 0$, $x \in X$.

Безпосередньо перевіряється напівгрупова властивість:

$$T_{t+s}\varphi(x) = T_t T_s \varphi(x).$$

Нарешті, спираючись на нерівність

$$|y-x|^4 \leq c\left(|y_\nu - x_\nu|^4 + \left|y^S - x^S - b\frac{y_\nu - x_\nu}{\sigma^2} - \alpha\theta\right|^4 + |\alpha|^4\theta^4\right), \quad c \in \mathcal{R}^1,$$

можна довести, що

$$\sup_{x \in X} \int_X |y-x|^4 P(t, x, dy) = O(t^2), \quad t \to 0.$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай задано* $q \in \mathcal{R}$, $|q| \leq 1$ *і* $\alpha \in S$. *Тоді в просторі* $(X, \mathcal{B}(X))$ *існує неперервний процес Маркова* $(x(t), \mathcal{M}_t, P_x)$ *з імовірністю переходу* $P(t, x, \Gamma)$, $t > 0$, $x \in X$, *що визначається формулою* (2).

З допомогою нескладних підрахунків для всіх $z \in X$, $t > 0$ можна отримати такі співвідношення:

$$\int_X (y-x, z) P(t, x, dy) = (A, z) I_t, \tag{3}$$

$$\int_X (y-x, z)^2 P(t, x, dy) = t(Bz, z) + \frac{2}{\sigma^2}(A, z)\big((\alpha, z)K_t - x_\nu(B\nu, z)I_t\big),$$

де

$$A = qB\nu + \alpha, \qquad I_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x_\nu^2}{2\tau\sigma^2}\right\} d\tau,$$

$$K_t = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(|x_\nu| + \xi)^2}{2\tau\sigma^2}\right\} d\xi.$$

Покажемо, що траєкторії побудованого процесу є розв'язками стохастичного диференціального рівняння.

Спочатку зауважимо, що функція $I_t(x)$ має властивість

$$T_s I_t(x) = I_{t+s}(x) - I_s(x), \qquad t > 0, \quad s > 0, \quad x \in X.$$

Це справді так, оскільки

$$T_s I_t(x) = \int_L \frac{1}{\sqrt{2\pi s\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y_\nu - x_\nu)^2}{2s\sigma^2}\right\} I_t(y) dy_\nu =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau+s)\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x_\nu^2}{2(\tau+s)\sigma^2}\right\} d\tau.$$

Також $\lim_{t \downarrow 0} \lim_{x \in X} I_t(x) = 0$. Це означає, що існує адитивний однорідний невід'ємний неперервний функціонал η_t від побудованого процесу $(x(t), \mathcal{M}_t, P_x)$ [6, с. 273 – 275] такий, що

$$I_t(x) = E_x \eta_t, \qquad t \geq 0, \quad x \in X,$$

де E_x — символ математичного сподівання за мірою P_x. Цей функціонал можна побудувати за допомогою граничного переходу

$$\eta_t = \underset{h \downarrow 0}{\mathrm{l.i.m}} \int_0^t h^{-1} I_h(x(\tau))\, d\tau. \qquad (4)$$

Рівність (4) означає, що точками зростання функціонала η_t є лише ті моменти часу, в які процес $x(t)$ знаходиться на гіперплощині S.

Розглянемо процес $\xi(t) = x(t) - x(0) - A\eta_t$. З рівності (3) випливає, що $E_x \xi(t) = 0$ при всіх $t \geq 0$, $x \in X$. Це означає, що процес $\xi(t)$ є мартингалом відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{M}_t)_{t \geq 0}$ та міри P_x. Знайдемо квадратичну характеристику цього мартингала. Для $t \geq 0$, $x \in X$, $z \in X$ маємо

$$E_x(\xi(t), z)^2 = E_x(x(t) - x(0), z)^2 - 2(A, z) E_x(x(t) - x(0), z)\eta_t + (A, z)^2 E_x \eta_t^2.$$

Другий доданок можна подати у вигляді

$$E_x(x(t) - x(0), z)\eta_t = E_x \int_0^t (x(t) - x(\tau), z)\, d\eta_\tau + E_x \int_0^t (x(\tau) - x(0), z)\, d\eta_\tau =$$

$$= \frac{1}{2}(A, z) E_x \eta_t^2 + (\alpha, z)\frac{K_t}{\sigma^2} - \frac{x_\nu}{\sigma^2}(B\nu, z) I_t,$$

тобто

$$E_x(\xi(t), z)^2 = (Bz, z)t.$$

А це і означає, що $\xi(t)$ є квадратично інтегровним мартингалом з характеристикою tB, $t \geq 0$. Тим самим доведено таку теорему.

Теорема 2. *Нехай $(x(t), \mathcal{M}_t, P_x)$ — неперервний процес Маркова, побудований в теоремі* 1. *Тоді існує такий процес $\xi(t)$ відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{M}_t)_{t \geq 0}$ і міри P_x, що $\xi(t)$ — процес з незалежними приростами, причому прирости мають гауссівський розподіл з середнім* 0 *і кореляційним оператором tB, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$ і майже напевно по відношенню до міри P_x виконується співвідношення*

$$x(t) = x(0) + A\eta_t + \xi(t) \quad \forall t \geq 0.$$

В диференціальній формі це співвідношення можна записати у вигляді

$$dx(t) = A d\eta_t + d\xi(t).$$

Це стохастичне диференціальне рівняння, якому задовольняють траєкторії побудованого процесу.

Зауваження. Можна розглядати рівняння вигляду $dx(t) = A d\eta_t + d\xi(t)$, де A — довільний вектор з X такий, що $|(A, \nu)| \leq \sigma^2$.

1. *Zaitseva L. L.* On a multidimensional Brownian motion with partly reflecting mambrane on a hyperplane // Theory Stochast. Process. –1999. – **5(21)**, № 3 – 4. – P. 141–146.
2. *Kopytko B. I., Portenko N. I.* Analytical methods of pasting together of diffusion processes // Lect. Notes Math. – 1983. – **2**, № 1021. – P. 320–326.
3. *Kopytko B. I.* Construction of the diffusion process with a generalized drift vector by means of solution some conjugation problem for the second-order parabolic type equation // Random Operators and Stochast. Equat. – 1994. – **2**, № 1. – P. 33–38.
4. *Portenko N. I., Spivak G. L.* Hilbert space valued brownian motion with partial reflection on a hyperplane // Proc. Second Ukrainian – Hungarian Conference. – 1995. – P. 410–416.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.
6. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.

Одержано 01.03.2000