УДК 511.33

О. В. Синявский (Одес. ун-т)

СУММА ДЕЛИТЕЛЕЙ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

We construct the asymptotic formula of summatory function for $\sigma_a(\alpha)$, where $\sigma_a(\alpha)$ is a sum of a th powers of norm of divisors of the Gaussian integer α on an arithmetic progression $\alpha \equiv \alpha_0 (\bmod \gamma)$ and a narrow sector $\varphi_1 \leq \arg \alpha < \varphi_2$. In this case, we represent $\sigma_a(n)$ as a series of the Ramanujan sums.

Будується асимптотична формула суматорної функції для $\sigma_a(\alpha)$, де $\sigma_a(\alpha)$ — сума a-х степенів норм дільників цілого гауссового числа α на арифметичній прогресії $\alpha \equiv \alpha_0 (\bmod \gamma)$ і у вузькому секторі $\varphi_1 \leq \arg \alpha < \varphi_2$. При цьому використовується зображення $\sigma_a(n)$ у вигляді ряду за сумами Рамануджана.

1. Введение. Сумматорная функция

$$S_a(x) = \sum_{n \leq x} \sigma_a(n),$$

где $\sigma_a(n)$ означает сумму a-х степеней различных натуральных делителей n, представляет большой интерес, так как связана с различными аддитивными задачами теории чисел.

Асимптотическую формулу для $S_a(x)$ обычно получают с помощью оценок сумм вида

$$G_{b,k}(x) = \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^b \psi_k\left(\frac{x}{n}\right),$$

где b — вещественное число, k — натуральное, $\psi_k(y) = B_k(\{y\})$ — k-й полином Бернулли [1, 2].

Поведение $\sigma_a(n)$ на арифметических прогрессиях с растущей разностью прогрессии может быть изучено с помощью оценок специальных тригонометрических сумм и метода производящих рядов Дирихле. В работе I. Kiuchi [3] изучалась взвешенная функция $\sigma_a(n)$, а именно, для

$$D_a\left(x; \frac{h}{k}\right) = \sum_{n \leq x} \sigma_a(n) e^{2\pi i \frac{hn}{k}}$$

получено асимптотическое разложение остаточного члена $\Delta_a(x; h/k)$ асимптотической формулы для $D_a(x; h/k)$, являющейся аналогом тождества Г. Ф. Вороного в проблеме делителей

$$\Delta_a(x; h/k) = D_a(x; h/k) - k^{a-1}\zeta(1-a)x - k^{-1-a}(1+a)^{-1}\zeta(1+a)x^{1+a}.$$

Исследование функции $\sigma_a(n)$ в кольце целых гауссовых чисел указанными выше методами затруднительно. Поэтому в настоящей работе изучается распределение значений функции $\sigma_a(n)$ на арифметических прогрессиях $\alpha \equiv \alpha_0 \ (\bmod \gamma)$ и узких секторах $\varphi_1 \leq \arg \alpha < \varphi_2$ с помощью представления $\sigma_a(n)$ в виде ряда по суммам Рамануджана.

Однако отметим, что этот метод не применим в случае, когда $a = 0$, т. е. когда $d(a)$ — число неассоциированных делителей гауссового числа α. В этом случае, следуя указанному методу, используется представление

$$d(\alpha) = \sum_{\substack{\omega \\ \omega\neq 0}} c_\omega(\alpha)\frac{\log N(\omega)}{N(\omega)},$$

но тогда результат получается тривиальный.

Случай $a = 0$ рассмотрен, к примеру, в [4], где получены такие результаты:

1. $$\sum_{\substack{N(\alpha) \\ \alpha\equiv\alpha_0 \,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} d(\alpha) = c_0(\alpha_0,\gamma)\frac{x}{N(\gamma)}\log\frac{x}{N(\beta)} + c_1(\alpha_0,\gamma)\frac{x}{N(\gamma)} + O\left(x^{3/5+\varepsilon}N(\gamma)^{-2/5}\right);$$

2. $$\sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0\,(\mathrm{mod}\,\gamma) \\ \varphi_1<\arg\alpha\le\varphi_2}} d(\alpha) =$$

$$= \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi}\left[c_0(\alpha_0,\gamma)\frac{x}{N(\gamma)}\log\frac{x}{N(\beta)} + c_1(\alpha_0,\gamma)\frac{x}{N(\gamma)}\right] + O\left(x^{2/3+\varepsilon}N(\gamma)^{-1/2}\right),$$

где $c_0(\alpha_0,\gamma)$ и $c_1(\alpha_0,\gamma)$ — вычислимые константы, зависящие от α_0 и γ, $(\alpha_0,\gamma)=\beta$, β — собственный делитель γ.

Однако метод, использованный в [4], нельзя применить в случае $a < 0$. Поэтому в данной работе рассматривается только случай $a < 0$.

2. Обозначения. Пусть $Q[i]$ — поле гауссовых чисел, $Q[i] := \{a+bi \mid a,b\in Q,\ i^2=-1\}$, G — кольцо целых гауссовых чисел, $G := \{u+vi \mid u,v\in Z\}$.

Для $\alpha = a+bi\in Q[i]$ полагаем $N(\alpha) = |\alpha|^2 = a^2+b^2$ и называем нормой α, а через $Sp(\alpha) = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha = 2a$ обозначим след α, (α,β) — ОНД α и β, $\alpha,\beta\in G$; $\mu(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ — соответственно функции Мебиуса и Эйлера в кольце G; $\tau(\alpha)$ — число неассоциированных делителей α.

Символ Виноградова „$\ll$" означает то же, что и символ Ландау „O".

$\sigma_s(\alpha) = \sum_{\delta/\alpha}^{*} N(\delta)^s$, где знак $*$ означает, что суммирование ведется по всем неассоциированным делителям целого гауссова α. В этой работе предполагается, что $0<\sigma\le 1$, где $\mathrm{Re}\,s=\sigma$, $e(x) = e^{2\pi i x}$, $x\in \boldsymbol{R}$.

3. Вспомогательные результаты. Пусть $\delta_0,\delta\in Q[i]$, $s = \sigma+it\in \boldsymbol{C}$. При $\sigma>1$ абсолютно сходится ряд

$$\zeta(s;\delta_0,\delta) = \sum_{\substack{\omega\in G \\ \omega\neq-\delta_0}} e\left(\frac{1}{2}Sp(\delta\omega)\right)N(\omega+\delta_0)^{-s}.$$

Функция $\zeta(s;\delta_0,\delta)$ называется обобщенной дзета-функцией Дедекинда поля $Q[i]$.

Лемма 1. *Для фиксированных* δ_0, $\delta\in Q[i]$ $\zeta(s;\alpha,\beta)$ — *целая функция переменной* s, *если* β — *нецелое гауссово число. Если* β — *целое гауссово число, то* $\zeta(s;\alpha,\beta)$ *аналитична во всей* s*-плоскости, кроме точки* $s=1$, *где она имеет простой полюс с вычетом* π.

Имеет место функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s;\alpha,\beta) = \pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)\zeta(1-s;-\beta,\alpha)\,e\left(-\frac{1}{2}Sp(\alpha\beta)\right).$$

Доказательство для случая $\zeta(s;0,0)$ см. в [5], а общий случай доказывается аналогично.

Лемма 2. *Для* $\operatorname{Re} s > 0$ *справедливо представление*

$$\sigma_{-s}(\alpha) = \zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{\gamma\in G \\ \gamma\neq 0}} c_\gamma(\alpha)\, N(\gamma)^{-(1+s)},$$

где $c_\gamma(\alpha)$ *— сумма Рамануджана*

$$c_\gamma(\beta) = \sum_{\substack{\delta \,(\mathrm{mod}\,\gamma) \\ (\delta,\gamma)=1}} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{\beta\delta}{\gamma}\right).$$

Доказательство. Как и в рациональном случае, имеем

$$c_\gamma(\beta) = \sum_{d/(\gamma,\beta)}{}^{*} N(d)\, \mu\left(\frac{\gamma}{d}\right).$$

Поэтому при $\operatorname{Re} s > 0$

$$\zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{\gamma\in G \\ \gamma\neq 0}} c_\gamma(\alpha)\, N(\gamma)^{-(1+s)} =$$

$$= \zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{\gamma\in G \\ \gamma\neq 0}} N(\gamma)^{-(1+s)} \sum_{\delta\,|\,(\gamma,\alpha)}{}^{*} N(\delta)\, \mu\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) =$$

$$= \zeta(1+s;0,0) \sum_{\delta\,|\,\alpha}{}^{*} N(\delta) \sum_{\substack{\gamma\in G \\ \gamma\neq 0 \\ \gamma\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} N(\gamma)^{-(1+s)}\, \mu\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) =$$

$$= \zeta(1+s;0,0) \sum_{\delta\,|\,\alpha}{}^{*} N(\delta)^{-s} \sum_{\substack{\gamma\in G \\ \gamma\neq 0}} \mu(\gamma) N(\gamma)^{-(1+s)} = \sigma_{-s}(\alpha).$$

Лемма доказана.

Пусть $\alpha_0, q, \gamma \in G$. Для $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$f(s) = N(\gamma)^{-s} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{\alpha_0 q}{\omega}\right) \zeta\left(s; \frac{\alpha_0}{\gamma}, \frac{q\gamma}{\omega}\right) =$$

$$= N(\gamma)^{-s} \sum_{\substack{\delta\in G \\ \delta\neq -\alpha_0/\gamma}} \frac{e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q(\gamma\delta+\alpha_0)}{\omega}\right)}{N\left(\delta + \frac{\alpha_0}{\gamma}\right)^s} = \sum_{\substack{\delta\in G \\ \delta=\alpha_0\,(\mathrm{mod}\,\gamma)}} \frac{e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q\delta}{\omega}\right)}{N(\delta)^s}.$$

Из леммы 1 следует, что в случае $\omega \nmid q\gamma$ функция $f(s)$ аналитична во всей комплексной плоскости, в случае $\omega \,|\, q\gamma$ функция имеет простой полюс в точке $s = 1$ с вычетом равным $\pi N(\gamma)^{-1} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)$.

Здесь и далее предполагается, что $(q, \omega) = 1$ и $\omega \nmid \gamma$.

Лемма 3. *Пусть* $(q, \omega) = 1$. *Тогда*

$$S\left(x,\frac{q}{\omega}\right) = \sum_{\substack{N(\alpha)\le x\\ \alpha=\alpha_0(\operatorname{mod}\gamma)}} e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{q\alpha}{\omega}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{N(\gamma)}\pi e\left(\dfrac{1}{2}Sp\dfrac{q\alpha_0}{\omega}\right)+O\left(\dfrac{x^{1/3}\log x}{N(\gamma)^{2\varepsilon/3}}\right), & \text{если } \omega|\gamma, \\ O\left(\left\langle N\left(\dfrac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}\right)+O\left(\dfrac{x^{1/3}\log x}{N(\gamma)^{2\varepsilon/3}}\right), & \text{если } \omega\nmid\gamma. \end{cases}$$

Здесь $\langle u\rangle$ *обозначает расстояние* $u\in\mathbf{R}$ *до ближайшего целого числа и* $\varepsilon>0$.

Доказательство. Согласно теореме о частичных суммах ряда Дирихле, имеем

$$S\left(x,\frac{q}{\omega}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^s}{s}f(s)\,ds+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)}\right)+O\left(\frac{xA(x)\log x}{T}\right) =$$

$$= Y+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)}\right)+O\left(\frac{xA(x)\log x}{T}\right),$$

где $A(x)\ll 1$, $b=1+1/\log x$.

Вычислим последний интеграл. Для этого перенесем линию интегрирования на прямую $\operatorname{Re}s=-\varepsilon$ и учтем, что в случае $\omega|q\gamma$ подынтегральная функция имеет простой полюс в точках $s=1$ и $s=0$ с вычетами, равными $\pi xN(\gamma)^{-1}e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)$ и $e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{q\alpha_0}{\omega}\right)\zeta\left(0;\frac{\alpha_0}{\gamma},\frac{q\gamma}{\omega}\right)\ll 1$ соответственно. Поэтому

$$Y = \operatorname*{res}_{s=1}\left\{\frac{x^s}{s}f(s)\right\}+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}+\int_{-\varepsilon-iT}^{b-iT}+\int_{-\varepsilon+iT}^{b+iT}\right\}\frac{x^s}{s}f(s)\,ds+O(1) =$$

$$= \operatorname*{res}_{s=1}\left\{\frac{x^s}{s}f(s)\right\}+Y_1+Y_2+Y_3+O(1).$$

Интегралы Y_2 и Y_3 оцениваются одинаково, поэтому оценим только Y_2. Для этого оценим с помощью принципа Фрагмена – Линделефа подынтегральную функцию в полосе $-\varepsilon_1\le\operatorname{Re}s\le 1+\varepsilon_2$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$. На прямой $\sigma=1+\varepsilon_2$ подынтегральная функция оценивается как $\ll N(\gamma)^{-\varepsilon_2}\varepsilon_2^{-1}$. На прямой $\sigma=-\varepsilon_1$ оцениваем с помощью функционального уравнения для $\zeta(s;\alpha,\beta)$ (лемма 1). Тогда получим $\ll N(\gamma)^{\varepsilon_1}t^{1+2\varepsilon_1}\varepsilon_1^{-1}$.

Следовательно, в полосе $(-\varepsilon_1,1+\varepsilon_2)$ имеем оценку

$$f(s) \ll \left(\frac{N(\gamma)^{-\varepsilon_2}}{\varepsilon_2}\right)^{\frac{\sigma+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\left(\frac{N(\gamma)^{\varepsilon_1}t^{1+2\varepsilon_1}}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1+\varepsilon_2-\sigma}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}}.$$

Тогда интеграл Y_2 оценивается так:

$$Y_2 \ll \frac{xN(\gamma)^{\varepsilon}}{T\log x}.$$

Вычислим Y_1. С помощью функционального уравнения для $\zeta(s;\alpha,\beta)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}\frac{x^s}{s}f(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}\frac{x^s}{s}N(\gamma)^{-s}\pi^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\zeta\left(1-s;-\frac{q\gamma}{\omega},\frac{\alpha_0}{\gamma}\right)e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)ds.$$

Положим $s=-\varepsilon+it$, тогда по формуле Стирлинга

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} = t^{1+2\varepsilon}e^{it(2-2\log t)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Поэтому интеграл Y_2 примет вид

$$\sum_{\substack{\delta \\ \delta\neq\frac{q\gamma}{\omega}}}\frac{e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0\delta}{\gamma}\right)}{N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)}e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)y^{-\varepsilon}\int\limits_1^T\frac{y^{it}}{-\varepsilon+it}t^{1+2\varepsilon}e^{it(2-2\log t)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt +$$

$$+ O\left(\left|\sum_{\substack{\delta \\ \delta\neq q\gamma/\omega}}\frac{1}{N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)}y^{-\varepsilon}\int\limits_0^1\frac{y^{it}}{-\varepsilon+it}t^{1+2\varepsilon}e^{it(2-2\log t)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\right|\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\delta \\ \delta\neq q\gamma/\omega}}\frac{e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0\delta}{\gamma}\right)}{N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)}e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)y^{-\varepsilon}I + R,$$

где

$$y = \frac{xN\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)\pi^2}{N(\gamma)},\qquad R = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), & \text{если } \omega|\gamma, \\ O\left(\left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}\right), & \text{если } \omega\nmid\gamma. \end{cases}$$

Для оценки интеграла I воспользуемся методом стационарной фазы (см. теорему 1.4 [6, с. 162]). В интеграле сделаем следующую замену:

$$I = \left|t = uy^{1/2}\right| = y^{1/2+\varepsilon}\int\limits_{y^{-1/2}}^{Ty^{-1/2}}t^{2\varepsilon}e^{i2ty^{1/2}(1-\log t)}dt.$$

Здесь стационарная точка $t=1$. Поэтому если $N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right) < 2\frac{N(\gamma)T^2}{x}$, то стационарная точка находится на участке интегрирования. Тогда вклад от нее

$$y^{1/2+\varepsilon}\int\limits_{1-\delta}^{1+\delta}t^{2\varepsilon}e^{i2ty^{1/2}(1-\log t)}dt << y^{1/2+\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi}{y^{1/2}}} << y^{1/4+\varepsilon}.$$

На интервале $t \in Y = \left(y^{-1/2}; 1-\delta\right) \cup \left(1+\delta; Ty^{-1/2}\right)$, интегрируя по частям, получаем

$$y^{1/2+\varepsilon} \int\limits_{t\in Y} t^{2\varepsilon} e^{i2ty^{1/2}(1-\log t)} dt \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{\log T}.$$

Далее, если

$$N\left(\delta - \frac{q\gamma}{\omega}\right) \geq 2\frac{N(\gamma)\,T^2}{x},$$

то стационарная точка не лежит на участке интегрирования. Поэтому интеграл I оценивается следующим образом:

$$y^{1/2+\varepsilon} \int\limits_{y^{-1/2}}^{Ty^{-1/2}} t^{2\varepsilon} e^{i2ty^{1/2}(1-\log t)} dt \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{\log T}.$$

Тогда имеем

$$I \ll \frac{x}{T\log x} + \left| \sum_{N(\delta)\leq \frac{N(\gamma)T^2}{x}} \frac{e\left(\frac{1}{2}Sp\left(\frac{\alpha_0\delta}{\gamma} - \frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)\right)}{N\left(\delta - \frac{q\gamma}{\omega}\right)} \left(\frac{xN\left(\delta - \frac{q\gamma}{\omega}\right)}{N(\gamma)}\right)^{1/4} \right| + \frac{x^{-\varepsilon}T^{2\varepsilon}}{N(\gamma)^{\varepsilon}\log T} \times$$

$$\times \left| \sum_{N(\delta)\leq \frac{N(\gamma)T^2}{x}} \frac{e\left(\frac{1}{2}Sp\left(\frac{\alpha_0\delta}{\gamma} - \frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)\right)}{N\left(\delta - \frac{q\gamma}{\omega}\right)^{1+\varepsilon}} \right| + \frac{x^{-\varepsilon}T^{2\varepsilon}}{N(\gamma)^{\varepsilon}\log T} \left| \sum_{N(\delta)> \frac{N(\gamma)T^2}{x}} \frac{e\left(\frac{1}{2}Sp\left(\frac{\alpha_0\delta}{\gamma} - \frac{\alpha_0 q}{\omega}\right)\right)}{N\left(\delta - \frac{q\gamma}{\omega}\right)^{1+\varepsilon}} \right|.$$

Теперь в случае $\omega | \gamma$ получаем

$$I \ll \frac{x}{T\log x} + \frac{x^{\varepsilon}T^{1/2+2\varepsilon}}{N(\gamma)^{\varepsilon}}.$$

В случае, когда $\omega \nmid \gamma$, имеем

$$I \ll \frac{x}{T\log x} + \frac{x^{\varepsilon}T^{1/2+2\varepsilon}}{N(\gamma)^{\varepsilon}} + \left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}.$$

Далее, полагая $T = x^{2/3}N(\gamma)^{2\varepsilon/3}$, получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* r *— положительное число,* $\Omega > 0$, $0 < \Delta < \Omega/2$, φ_1 *и* $\varphi_2 \in \boldsymbol{R}$, $\Delta \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \Omega - 2\Delta$.

Существует периодическая функция $f(\varphi)$ *с периодом* Ω *и со свойствами:*

1) $f(\varphi) = 1$ *в* $[\varphi_1, \varphi_2]$,
   $0 \leq f(\varphi) \leq 1$ *в* $[\varphi_1 - \Delta, \varphi_1]$, $[\varphi_2, \varphi_2 + \Delta]$,
   $f(\varphi) = 0$ *в* $[\varphi_2 + \Delta, \varphi_1 + \Omega - \Delta]$;
2) $f(\varphi)$ *разлагается в ряд Фурье*

$$f(\varphi) = \sum a_m e\left(\frac{m\varphi}{\Omega}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\Omega}(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad |a_m| = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta), \\ \dfrac{2}{\pi|m|}, \\ \dfrac{2}{\pi|m|}\left(\dfrac{r\Omega}{\pi|m|\Delta}\right)^r, \quad r \in N. \end{cases}$$

Доказательство см. в [7].

4. Основная теорема.

Теорема. *При* $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} \sigma_{-s}(\alpha) = \frac{x}{N(\gamma)}\pi\zeta(s;0,0)\prod_{\wp/\gamma}\left(1 - \frac{1}{N(\wp)^{1+s}}\right) + O\left(\frac{x^{1-2\sigma/3}}{N(\gamma)^{1-\sigma}}\right).$$

Доказательство. Применяя лемму 2, получаем

$$\sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} \sigma_{-s}(\alpha) = \zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} \sum_{\omega\ne 0} c_\omega(\alpha) N(\omega)^{-(1+s)} =$$

$$= \zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega\ne 0}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\,\omega) \\ (q,\omega)=1}} \sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q\alpha}{\omega}\right) +$$

$$+ \zeta(1+s;0,0) \sum_{N(\omega)>M} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} c_\omega(\alpha) = S_1 + S_2.$$

Далее имеем

$$\sum_{N(\omega)>M} \frac{c_\omega(\alpha)}{N(\omega)^{1+s}} = \sum_{N(\omega)>M} N(\omega)^{-(1+s)} \sideset{}{^*}\sum_{d\,|\,(\omega,\alpha)} N(d)\,\mu\left(\frac{\omega}{d}\right) =$$

$$= \sideset{}{^*}\sum_{d\,|\,\alpha} N(d) \sum_{\substack{N(\omega)>M \\ \omega\equiv 0 (\mathrm{mod}\, d)}} N(\omega)^{-(1+s)}\,\mu\left(\frac{\omega}{d}\right) =$$

$$= \sideset{}{^*}\sum_{d\,|\,\alpha} N(d)^{-s} \sum_{N(\omega)>M/N(d)} N(\omega)^{-(1+s)}\,\mu(\omega) <<$$

$$<< \sideset{}{^*}\sum_{d\,|\,\alpha} N(d)^{-\sigma} \sum_{n>M/N(d)} \frac{r(n)}{n^{1+\sigma}} <<$$

$$<< \sideset{}{^*}\sum_{d\,|\,\alpha} N(d)^{-\sigma}\left(\frac{M}{N(d)}\right)^{-\sigma} = M^{-\sigma}\tau(\alpha),$$

где $\tau(\alpha)$ — число делителей α.

Следовательно,

$$S_2 = \zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} \sum_{N(\omega)>M} N(\omega)^{-(1+s)} c_\omega(\alpha) \ll$$

$$\ll M^{-\sigma}\frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} \tau(\alpha) \ll M^{-\sigma}\frac{x}{N(\gamma)}\log x \frac{1}{\sigma}.$$

Теперь вычислим сумму S_1:

$$S_1 = \zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega\ne 0}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\,\omega) \\ (q,\omega)=1}} \sum_{\substack{N(\alpha)\le x \\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q\alpha}{\omega}\right).$$

Применяя к последней сумме лемму 3, получаем

$$S_1 = \frac{x}{N(\gamma)}\pi\zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega | \gamma}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\,\omega) \\ (q,\omega)=1}} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{\alpha_0 q}{\omega}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{x^{1/3}}{N(\gamma)^{2\varepsilon/3}} M^{1-\sigma}\right) + O\left(\sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega \nmid \gamma}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\,\omega) \\ (q,\omega)=1}} \left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{x}{N(\gamma)}\pi\zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega | \gamma}} N(\omega)^{-(1+s)} c_\omega(\alpha_0) + O\left(\frac{x^{1/3}}{N(\gamma)^{2\varepsilon/3}} M^{1-\sigma}\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega \nmid \gamma}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\,\omega) \\ (q,\omega)=1}} \left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{x}{N(\gamma)}\pi\zeta(1+s;0,0) \sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega | \gamma}} N(\omega)^{-(1+s)} \mu(\omega) +$$

$$+ O\left(\frac{x^{1/3}}{N(\gamma)^{2\varepsilon/3}} M^{1-\sigma}\right) + O\left(\sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega \nmid \gamma}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\,\omega) \\ (q,\omega)=1}} \left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}\right).$$

При этом мы учли, что $(\alpha_0,\omega)=1$, ибо $(\alpha_0,\gamma)=1$ и $\omega | \gamma$, поэтому $c_\omega(\alpha_0) = \mu(\omega)$.

Оценим теперь сумму под знаком O:

$$S' = \sum_{\substack{N(\omega)\le M \\ \omega \nmid \gamma}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\,\omega) \\ (q,\omega)=1}} \left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}.$$

Пусть $q\overline{\omega}\gamma = c+id$, $\omega = u+iv$, тогда $q\gamma\omega^{-1} = (c+id)(N(\omega))^{-1}$ и

$$S' \ll \sum_{N(\omega)\le M} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{c,d (\mathrm{mod}\, u+iv)} \frac{N(\omega)^{1+\varepsilon}}{(c^2+d^2)^{1+\varepsilon}} \le$$

$$\leq \sum_{N(\omega)\leq M} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{c,d (\mathrm{mod}\, u+iv)} \frac{N(\omega)^{1+\varepsilon}}{cd} \ll$$

$$\ll \sum_{N(\omega)\leq M} N(\omega)^{-(1+s)} N(\omega)^{1+2\varepsilon} \ll M^{1-\sigma}.$$

Итак, полагая $M = x^{2/3} N(\gamma)^{-1}$ и учитывая, что

$$\sum_{\substack{N(\omega)\leq x^{2/3}/N(\gamma)\\ \omega\,|\,\gamma}} \frac{\mu(\omega)}{N(\omega)^{(1+s)}} =$$

$$= \sum_{\omega\,|\,\gamma} \frac{\mu(\omega)}{N(\omega)^{(1+s)}} - \sum_{\substack{N(\omega)> x^{2/3}/N(\gamma)\\ \omega\,|\,\gamma}} \frac{\mu(\omega)}{N(\omega)^{(1+s)}} =$$

$$= \sum_{\omega\,|\,\gamma} \frac{\mu(\omega)}{N(\omega)^{(1+s)}} + O\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{x^{2/3}}{N(\gamma)}\right)^{-\sigma}\right),$$

получаем

$$\sum_{\substack{N(\alpha)\leq x\\ \alpha\equiv\alpha_0 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} \sigma_{-s}(\alpha) = \frac{x}{N(\gamma)} \pi\zeta(1+s; 0, 0) \prod_{\wp|\gamma}\left(1 - \frac{1}{N(\wp)^{1+s}}\right) + O\left(\frac{x^{1-2\sigma/3}}{N(\gamma)^{1-\sigma}}\right),$$

что завершает доказательство теоремы.

5. Сумма делителей в секторе. Изучим теперь распределение значений функции $\sigma_{-s}(\alpha)$ в узких секторах $\varphi_1 \leq \arg\alpha < \varphi_2$. Для этого воспользуемся леммой 6 и проведем рассуждения такие же, как и при доказательстве теоремы. Для краткости, чтобы не повторяться, приведем лишь некоторые выкладки. Положим в лемме 6 $\varphi = \arg\alpha$, $\Omega = \pi/2$. Тогда

$$f(\arg\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{4mi\arg\alpha}.$$

Рассмотрим

$$\Phi(x, [\varphi_1, \varphi_2]) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leq x\\ \alpha\equiv\alpha_0(\gamma)}} \sigma_{-s}(\alpha) f(\arg\alpha) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leq x\\ \alpha\equiv\alpha_0(\gamma)}} \sigma_{-s}(\alpha) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{4im\arg(\alpha)} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \sum_{\substack{N(\alpha)\leq x\\ \alpha\equiv\alpha_0(\gamma)}} \sigma_{-s}(\alpha) e^{4im\arg(\alpha)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m D_m(x, \alpha_0, \gamma).$$

Тогда

$$A(x, [\varphi_1, \varphi_2]) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leq x\\ \alpha\equiv\alpha_0\ (\mathrm{mod}\,\gamma)\\ \varphi_1\leq\arg\alpha<\varphi_2}} \sigma_{-s}(\alpha) =$$

$$= \Phi(x, [\varphi_1, \varphi_2]) + \Theta_1\Phi(x, [\varphi_1 - \Delta, \varphi_1]) + \Theta_2\Phi(x, [\varphi_2, \varphi_2 + \Delta]),$$

где $|\Theta_1|, |\Theta_2| \leq 1$.

Далее будем полагать, что $m \neq 0$, если не оговорено противное. Займемся вычислением $\Phi([\varphi_1, \varphi_2])$. Для этого оценим сумму

$$S_m\left(x, \frac{q}{\omega}\right) = \sum_{\substack{N(\alpha) \le x \\ \alpha \equiv \alpha_0(\gamma)}} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q\alpha}{\omega}\right) e^{4mi \arg(\alpha)}.$$

Производящий ряд для $S_m(x, q/\omega)$

$$E_m\left(s, \frac{q}{\omega}\right) = N(\gamma)^{-s} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q\alpha_0}{\omega}\right) e^{4mi \arg(\gamma)} \zeta\left(s; \frac{\alpha_0}{\gamma}, \frac{q\gamma}{\omega}\right).$$

Тогда согласно теореме о частичных суммах ряда Дирихле имеем

$$S_m\left(x, \frac{q}{\omega}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s} E_m\left(s, \frac{q}{\omega}\right) ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)}\right) + O\left(\frac{xA(x)\log x}{T}\right) =$$

$$= Y + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)}\right) + O\left(\frac{xA(x)\log x}{T}\right),$$

где $A(x) << 1$, $b = 1 + 1/\log x$.

Для вычисления Y перенесем линию интегрирования на $\operatorname{Re} s = -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $m \neq 0$, то подынтегральная функция имеет плюс только в точке $s = 0$ с вычетом, равным

$$e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q\alpha_0}{\omega}\right) \zeta_m\left(0; \frac{\alpha_0}{\gamma}, \frac{q\gamma}{\omega}\right) << 1.$$

Следовательно,

$$Y = \operatorname*{res}_{s=0} \left\{\frac{x^s}{s} E_m\left(s, \frac{q}{\omega}\right)\right\} + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT} + \int\limits_{-\varepsilon-iT}^{b-iT} + \int\limits_{-\varepsilon+iT}^{b+iT} \right\} \frac{x^s}{s} E_m\left(s, \frac{q}{\omega}\right) ds =$$

$$= Y_1 + Y_2 + Y_3 + O(1).$$

Интегралы по горизонтальным участкам оцениваются аналогично интегралам Y_2 и Y_3 из леммы 3, поэтому

$$Y_2 + Y_3 << \frac{xm^\varepsilon}{TN(\gamma)\log x} + \frac{\left(T^2 + m^2\right)^{1/2}}{T \log x}.$$

Далее, с помощью функционального уравнения для $\zeta_m(s; \delta, \alpha)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT} \frac{x^s}{s} E_m\left(s, \frac{q}{\omega}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT} \frac{x^s}{s} N(\gamma)^{-s} \pi^{2s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{|m|}{2} + 1 - s\right)}{\Gamma\left(\frac{|m|}{2} + s\right)} \zeta_m\left(1 - s; -\frac{q\gamma}{\omega}, \frac{\alpha_0}{\gamma}\right) e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{\alpha_0 q}{\omega}\right) ds.$$

Тогда по формуле Стирлинга

$$\frac{\Gamma\left(\frac{|m|}{2}+1-s\right)}{\Gamma\left(\frac{|m|}{2}+s\right)} =$$

$$= \left(m^2+t^2\right)^{1/2+\varepsilon} e^{it\left(2-2\log\left(m^2+t^2\right)\right)-im\arg(|m|/2+it)}\left(1+O\left(\frac{1}{|m+t|}\right)\right).$$

Следовательно, последний интеграл примет вид

$$\sum_{\substack{\delta \\ \delta\neq q\gamma/\omega}} \frac{e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0\delta}{\gamma}\right)}{N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)} e^{4mi\arg(\delta-q\gamma/\omega)}\, e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{q\alpha_0}{\omega}\right) y^{-\varepsilon}\times$$

$$\times\int_1^T \frac{y^{it}}{-\varepsilon+it}\left(m^2+t^2\right)^{1/2+\varepsilon} e^{it\left(2-2\log\left(m^2+t^2\right)\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt =$$

$$= \sum_{\substack{\delta \\ \delta\neq q\gamma/\omega}} \frac{e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0\delta}{\gamma}\right)}{N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)} e^{4mi\arg(\delta-q\gamma/\omega)}\, e\left(\frac{1}{2}Sp\frac{\alpha_0 q}{\omega}\right) y^{-\varepsilon} I_m,$$

где

$$y = \frac{xN\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)}{N(\gamma)}.$$

Разобьем интеграл I_m на два интеграла $\int_1^m$ и $\int_m^T$. Первый из них оценивается тривиально $\ll m^{1+\varepsilon/2}\log m$. Оценку второго интеграла проведем аналогично оценке интеграла I из леммы 3. В результате получим

$$I_m \ll \begin{cases} m^{1+\varepsilon/2}\log m + y^{(1+2\varepsilon)/4}, & \text{если} \quad N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right)\leq 2\frac{N(\gamma)\left(m^2+T^2\right)}{x}, \\ m^{1+\varepsilon/2}\log m + \frac{\left(m^2+T^2\right)^{1/2}}{T}, & \text{если} \quad N\left(\delta-\frac{q\gamma}{\omega}\right) > 2\frac{N(\gamma)\left(m^2+T^2\right)}{x}. \end{cases}$$

Тогда сумма $S_m\left(x,\frac{q}{\omega}\right)$ будет оцениваться как

$$S\left(x,\frac{q}{\omega}\right) \ll \left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{-\varepsilon} m^{1+\varepsilon/2}\log m + \left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{\varepsilon} T^{1/2+\varepsilon} + \frac{xm^{\varepsilon}}{TN(\gamma)\log x} +$$

$$+ \frac{\left(m^2+T^2\right)^{1/2}}{T\log x} + \frac{x\log x}{T} + \left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon}\left(1+m^{1+\varepsilon}\log m\right).$$

Теперь, выбирая $T = x^{2/3}$, получаем оценку

$$S\left(x, \frac{q}{\omega}\right) << \left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{-\varepsilon} m^{1+\varepsilon/2} \log m + \frac{x^{1/3} m^{\varepsilon}}{N(\gamma)} +$$

$$+ x^{1/3} N(\gamma)^{2\varepsilon/3} \log x + \left\langle N\left(\frac{q\gamma}{\omega}\right)\right\rangle^{-1-\varepsilon} \left(1 + m^{1+\varepsilon} \log m\right).$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве основной теоремы, имеем

$$D_m(x, \alpha_0, \gamma) = \sum_{\substack{N(\alpha) \le x \\ \alpha \equiv \alpha_0 (\mathrm{mod}\, \gamma)}} \sigma_{-s}(\alpha)\, e^{4im \arg(\alpha)} =$$

$$= \zeta(1+s; 0, 0) \sum_{\substack{N(\alpha) \le x \\ \alpha \equiv \alpha_0 (\mathrm{mod}\, \gamma)}} \sum_{\omega \ne 0} c_\omega(\alpha) N(\omega)^{-(1+s)} e^{4im \arg(\alpha)} =$$

$$= \zeta(1+s; 0, 0) \sum_{\substack{N(\omega) \le M \\ \omega \ne 0}} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{q (\mathrm{mod}\, \omega) \\ (q, \omega) = 1}} \sum_{\substack{N(\alpha) \le x \\ \alpha \equiv \alpha_0 (\mathrm{mod}\, \gamma)}} e\left(\frac{1}{2} Sp \frac{q\alpha}{\omega}\right) e^{4im \arg(\alpha)} +$$

$$+ \zeta(1+s; 0, 0) \sum_{N(\omega) > M} N(\omega)^{-(1+s)} \sum_{\substack{N(\alpha) \le x \\ \alpha \equiv \alpha_0 (\mathrm{mod}\, \gamma)}} c_\omega(\alpha) e^{4im \arg(\alpha)} = S_1 + S_2.$$

Сумма S_2 оценивается так же, как и аналогичная сумма в доказательстве основной теоремы. Для оценки S_1 применим оценку $S(x, q/\omega)$. Поэтому

$$D_m(x, \alpha_0, \gamma) << \frac{x^{2/3(1-\sigma)-\varepsilon} N(\gamma)}{\varepsilon} m^{1+\varepsilon/2} \log m +$$

$$+ \frac{x^{1-2\sigma/3} m^{\varepsilon}}{N(\gamma)} + x^{1-2\sigma/3} \log x N(\gamma)^{2/3} + \frac{x^{1-2\sigma/3}}{N(\gamma)} \log x.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \ne 0}}^{\infty} a_m D_m(x, \alpha_0, \gamma) << \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \ne 0}}^{\infty} \frac{x^{1-2\sigma/3} \log x}{m^2 \Delta} N(\gamma)^{2\varepsilon/3} + x^{2/3-2\sigma/3-\varepsilon} N(\gamma)^{\varepsilon} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{|m| \le M \\ m \ne 0}} \frac{m^{1+\varepsilon/2} \log m}{m} + \sum_{|m| > M} \frac{m^{1+\varepsilon/2} \log m}{m^3 \Delta^2} \right) + \frac{x^{1-2\sigma/3}}{N(\gamma)} \left(\sum_{\substack{|m| \le M \\ m \ne 0}} m^{\varepsilon} + \sum_{|m| > M} \frac{m^{\varepsilon}}{m^2 \Delta} \right).$$

Теперь, выбирая $M = \Delta^{-1}$, получаем

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \ne 0}}^{\infty} a_m D_m(x, \alpha_0, \gamma) <<$$

$$<< \Delta^{-1} x^{1-2\sigma/3} \log x N(\gamma)^{2\varepsilon/3} + \Delta^{-1-2\varepsilon} x^{2/3-2\sigma/3-\varepsilon} N(\gamma)^{\varepsilon} + \frac{x^{1-2\sigma/3}}{N(\gamma)} \Delta^{-1-\varepsilon}.$$

Наконец, полагаем $\Delta << \dfrac{\log x N(\gamma)^{1/2}}{x^{1/3\sigma}}$ и окончательно имеем

$$A(x,[\varphi_1,\varphi_2]) = \sum_{\substack{N(\alpha)\le x\\ \alpha\equiv\alpha_0 \pmod{\gamma}\\ \varphi_1\le\arg(\alpha)<\varphi_2}} \sigma_{-s}(\alpha) =$$

$$= \frac{x(\varphi_2-\varphi_1)}{N(\gamma)}\zeta(1+s;0,0)\prod_{\wp|\gamma}\left(1-\frac{1}{N(\wp)^{1+s}}\right)+O\left(\frac{x^{1-\sigma/3}}{N(\gamma)^{1/2}}\right).$$

1. *Recknagel W.* Uber eine Vermuntung von S. Chowla und H. Walum // Arc. Math. – 1985. – **44**. – P. 348 – 354.
2. *Peterman Y.–F.* Divisor problems and exponent pairs // Ibid. – 1988. – **50**. – P. 243 – 250.
3. *Kiuchi Isao.* On an exponential sum involving the arithmetic function $\sigma_a(n)$ // Arc. Math. J. Okayama Univ. – 1987. – **29**. – P. 193 – 205.
4. *Жанбырбаева У. Б.* Асимптотические задачи теории чисел в в секторальных областях: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1986.
5. *Hecke E.* Uber eine neue Art von Zeta-functionen und ihre Besziechungen zur Verteilung der Primzahlen // Math. Z. – 1920. – **6**. – S. 11 – 15.
6. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
7. *Кубилюс И. П.* О некоторых задачах геометрии простых чисел // Мат. сб. – 1952. – **31**(78), № 3. – С. 507 – 542.

Получено 28.01.99,
после доработки — 05.05.99