УДК 517.5

С. Ф. Буслаева (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ДВУХТОЧЕЧНОМ ВАРИАНТЕ ТРАНСФИНИТНОГО ДИАМЕТРА

We study properties of a two-point variant of transfinite diameter of sets. By using relations obtained for calculation of this variant, we prove a two-point variant of the well-known Pólya theorem on upper estimate of the Hankel determinants of a holomorphic function.

Вивчаються властивості двоточкового варіанта трансфінітного діаметра множин. На основі одержаних формул для його обчислення доведено двоточковий варіант відомої теореми Поліа про оцінку зверху ганкелевих визначників голоморфної функції.

1. Формулировка результата. В 1923 г. М. Фекете [1] ввел понятие трансфинитного диаметра компактов комплексной плоскости, ставшее к настоящему времени классическим и оказавшееся весьма плодотворным. Напомним, что трансфинитным диаметром компакта F комплексной плоскости называется число

$$d(F) = \lim_{n\to\infty} \max_{(z_1,\ldots,z_n)\subset F} \prod_{i<j} \left| z_i - z_j \right|^{2/(n-1)n},$$

где максимум берется по всем наборам $(z_1, \ldots, z_n)$ точек, принадлежащих F. Позже в работах Ф. Лея [2, 3] было введено понятие трансфинитного диаметра замкнутого множества F комплексной плоскости с весовой функцией $\omega(z)$

$$\delta_{\omega(z)}(F) = \lim_{n\to\infty} \max_{(z_1,\ldots,z_n)\subset F} \prod_{i<j} \left(\left| z_i - z_j \right| \omega(z_i)\omega(z_j) \right)^{2/(n-1)n}.$$

Для достаточно широкого класса весовых функций величина $\delta_{\omega(z)}(F)$ в дальнейшем исследовалась в работах А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [4], Г. Маскара и Е. Саффа [5], Е. Саффа и В. Тотика [6]. Для весовой функции $\omega(z) = z^{-1/2}$ более конкретные результаты о поведении величины $\delta_{\omega(z)}(F)$, которую в этом случае естественно назвать двухточечным (в точках $z = 0$ и $z = \infty$) вариантом трансфинитного диаметра, были получены в работе В. И. Буслаева [7]. В данной статье аналогичные результаты получены для весовой функции $\omega(z) = z^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, которые так же, как и в [7], могут быть применены к исследованию экстремальных свойств множества особенностей T-дробей $\cfrac{a_1 z}{1 + b_1 z + \cfrac{a_2 z}{1 + b_2 z + \ldots}}$, где коэффициенты a_n и b_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеют периодические пределы $\lim_{n\to\infty} a_{nm+l} = a^l$, $\lim_{n\to\infty} b_{nm+l} = b^l$ (m — некоторое фиксированное натуральное число, $l = 1, \ldots, m$); при этом имеющееся в [7] ограничение $b^1 \ldots b^m \neq 0$ можно опустить.

Пусть замкнутое множество F не содержит точек 0 и ∞. Зафиксируем число α, $0 < \alpha < 1$, и положим

$$\delta_\alpha(F) = \lim_{n\to\infty} \max_{(z_1,\ldots,z_n)\subset F} \prod_{i<j} \left| (z_i - z_j)^{1-\alpha} (z_i^{-1} - z_j^{-1})^\alpha \right|^{2/(n-1)n}.$$

Легко видеть, что $\delta_\alpha(F) = \delta_{\omega(z)}(F)$, где $\omega(z) = z^{-\alpha}$. В статье доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для каждого замкнутого множества* F*, не содержащего точек* 0 *и* ∞*, выполняется равенство*

$$\delta_\alpha(F) = d(F)^{(1-\alpha)^2} d(F^{-1})^{\alpha^2} e^{-2\alpha(1-a)g(F)},$$

где $d(F)$ *и* $d(F^{-1})$ — *трансфинитные диаметры компактов* F *и* $F^{-1} = \{z \in C\colon z^{-1} \in F\}$ *соответственно,* $g(F) = 0$*, если точки* 0 *и* ∞ *лежат в разных связных компонентах дополнения* $C \setminus F$*, и* $g(F) = g(0,\infty)$ — *в противном случае, где* $g(z,\xi)$ — *функция Грина компоненты* $C \setminus F$*, содержащей обе точки* 0 *и* ∞.

Следствие. *Пусть* $\alpha = k/(k+m)$*, где* k, m — *натуральные числа,* E — *произвольный компакт комплексной плоскости,* $F = \left\{z \in C\colon \sum_{l=-k}^{m} p_l z^l \in E\right\}$*, где* $p_{-k} p_m \neq 0$*. Тогда*

$$\delta_\alpha(F) = d(E)^{1/(k+m)} |p_{-k}|^{-k/(k+m)^2} |p_m|^{-m/(k+m)^2}.$$

Во многих вопросах комплексного анализа часто используется известная теорема Полиа [8] об оценке сверху ганкелевых определителей $\begin{vmatrix} f_0 & \cdots & f_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & \cdots & f_{2n} \end{vmatrix}$ функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$, голоморфной в некоторой окрестности точки $z = \infty$, через трансфинитный диаметр множества ее особенностей. В статье будет доказан следующий двухточечный аналог теоремы Полиа.

Теорема 2 (двухточечный аналог теоремы Полиа). *Пусть* $0 < \alpha < 1$, F — *замкнутое, не содержащее точек* 0 *и* ∞*, множество комплексной плоскости и* $f(z)$ — *функция, мероморфная в компонентах* $C \setminus F$*, содержащих точки* $z = 0$ *и* $z = \infty$*. Если* $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} f_n^0 z^n$ *при достаточно малых* z, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{l} f_n^\infty z^n$ *при достаточно больших* z *(*k *и* l — *целые числа),* $f_n = f_n^\infty - f_n^0$, $n = 0, \pm 1, \ldots$*, где* $f_n^0 = 0$ *при* $n < k$ *и* $f_n^\infty = 0$ *при* $n > l$,

$$H_n = \begin{vmatrix} f_{2[\alpha n]-2n} & \cdots & f_{2[\alpha n]-n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{2[\alpha n]-n} & \cdots & f_{2[\alpha n]} \end{vmatrix},$$

то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |H_n|^{1/n^2} < \delta_\alpha(F)$.

Через $[\alpha n]$ здесь обозначена целая часть числа αn. Легко видеть, что в теореме 2 случай $\alpha = 0$ соответствует классической теореме Полиа.

2. Доказательства теорем 1 и 2. ***Доказательство теоремы* 1.** Будем обозначать через B_∞ и B_0 связные компоненты дополнения $C \setminus F$, содержащие соответственно ∞ и 0, через $g(z,\infty)$ и $g(z,0)$ функции Грина областей B_∞ и B_0 с особенностями в точках ∞ и 0 соответственно, а через $\gamma_\infty = \lim_{n\to\infty}(g(z,\infty) - \ln|z|)$ и $\gamma_0 = \lim_{z\to 0}(g(z,0) + \ln|z|)$ постоянные Робэна этих областей. Если $B_\infty = B_0$, то положим $g = g(0,\infty)$ и $g(z) = (1-\alpha)g(z,\infty) + \alpha g(z,0)$, $z \in B_\infty$. Если $B_\infty \neq B_0$, то положим $g = 0$, $g(z) = (1-\alpha)g(z,\infty)$ при $z \in B_\infty$ и $g(z) = \alpha g(z,0)$ при $z \in B_0$. Таким образом, функция $g(z)$ определена, неотрицательна и гармонична в $B_\infty \cup B_0 \setminus \{\infty, 0\}$, $g(z)$ стремится к 0 при z, стремящемся к F, $\lim_{z\to\infty}(g(z) - (1-\alpha)\ln|z|) = g_\infty$, где $g_\infty = (1-\alpha)\gamma_\infty + \alpha g$, и $\lim_{z\to 0}(g(z) + \alpha\ln|z|) = g_0$, где $g_0 = \alpha\gamma_0 + (1-\alpha)g$.

Поскольку трансфинитный диаметр $d(F)$ компакта F совпадает с его емкостью $e^{-\gamma_\infty}$ и соответственно $d(F^{-1}) = e^{-\gamma_0}$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\delta_\alpha(F) = e^{-(1-\alpha)g_\infty - \alpha g_0}. \tag{1}$$

Положим

$$V_n(F) = \max_{(z_1,\ldots,z_n)\subset F} \prod_{i<j} \left|(z_i - z_j)^{1-\alpha}(z_i^{-1} - z_j^{-1})^\alpha\right|, \quad m_n(F) = \inf \max_{z\in F}\left|\frac{p_n(z)}{z^{\alpha n} p_n(0)^\alpha}\right|,$$

где инфимум берется по всем полиномам $p_n(z)$ степени n с единичным старшим коэффициентом и нулями, лежащими на F, и убедимся в справедливости следующей цепочки неравенств:

$$e^{-(1-\alpha)g_\infty - \alpha g_0} \le m_n(F)^{1/n} \le \frac{V_{n+1}(F)^{1/n}}{V_n(F)^{1/n}} \le e^{-(1-\alpha)g_\infty - \alpha g_0}(1 + o(1)). \tag{2}$$

Действительно, пусть $m_n(F) = \max_{z\in F}\left|\frac{t_n(z)}{z^{\alpha n} t_n(0)^\alpha}\right|$, где $t_n(z)$ — многочлен, реализующий нижнюю грань для $m_n(F)$. Тогда функция $u(z) = g(z) - n^{-1} \times \times \ln\left|\frac{t_n(z)}{z^{\alpha n} t_n(0)^\alpha m_n(F)}\right|$ является гармонической в $B_\infty \cup B_0$, включая точки ∞ и 0, и ее предельные значения при приближении к F неотрицательны. Поэтому $u(z) \ge 0$ при всех $B_\infty \cup B_0$, включая точки ∞ и 0, и, в частности,

$$u(\infty) = g_\infty + \frac{\alpha}{n}\ln|t_n(0)| + \frac{1}{n}\ln|m_n(F)| \ge 0$$

и

$$u(0) = g_0 - \frac{1-\alpha}{n}\ln|t_n(0)| + \frac{1}{n}\ln|m_n(F)| \ge 0.$$

Умножая первое из этих неравенств на $1-\alpha$, а второе — на α и складывая их, получаем неравенство $(1-\alpha)g_\infty + \alpha g_0 + n^{-1}\ln|m_n(F)| \ge 0$, эквивалентное первому из неравенств в цепочке (2). Второе из неравенств цепочки (2) тривиально, так как

$$m_n(F) \le \max_{z\in F}\left|\frac{(z-\lambda_{1,n})\ldots(z-\lambda_{n,n})}{z^{\alpha n}(\lambda_{1,n}\ldots\lambda_{n,n})^\alpha}\right| =$$

$$= \max_{z\in F}\left|(z-\lambda_{1,n})^{1-\alpha}\ldots(z-\lambda_{n,n})^{1-\alpha}(z^{-1}-\lambda_{1,n}^{-1})^\alpha\ldots(z^{-1}-\lambda_{n,n}^{-1})^\alpha\right| \le \frac{V_{n+1}(F)}{V_n(F)},$$

где $\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{n,n}$ — точки из F, реализующие $V_n(F)$, т. е.

$$V_n(F) = \prod\nolimits_{i<j}\left|(\lambda_{i,n} - \lambda_{j,n})^{1-\alpha}(\lambda_{i,n}^{-1} - \lambda_{j,n}^{-1})^\alpha\right|.$$

Для доказательства последнего из неравенств цепочки (2) введем в рассмотрение полином $\tau_n(z) = \tau_{n,1}(z)\tau_{n,2}(z)$, где $\tau_{n,1}(z)$ — полином Чебышева степени $(1-\alpha)n$ (с нулями на F) компакта F, $\tau_{n,2}(z) = z^{\alpha n}\tau_{n,3}(z^{-1})/\tau_{n,3}(0)$, где $\tau_{n,3}(z) \equiv 1$, если $g = 0$, и $\tau_{n,3}(z)$ — полином Чебышева степени αn (с нулями на F^{-1}) компакта F^{-1}, если $g \ne 0$ (не теряя в общности можно считать здесь, что $(1-\alpha)n$ и αn — целые числа). Легко видеть, что $\tau_n(z)$ — полином степени n с единичным старшим коэффициентом и

$$\max_{z\in F}\left|\frac{\tau_n(z)}{z^{\alpha n}}\right|^{1/n} \le \max_{z\in F}|\tau_{n,1}(z)|^{1/n}\max_{z\in F}\left|\frac{\tau_{n,2}(z)}{z^{\alpha n}}\right|^{1/n} \le \max_{z\in F}|\tau_{n,1}(z)|^{1/n}\max_{w\in F^{-1}}\left|\frac{\tau_{n,3}(w)}{\tau_{n,3}(0)}\right|^{1/n}.$$

Известно, что первый множитель в правой части этого неравенства стремится при $n \to \infty$ к $e^{-(1-\alpha)\gamma_\infty}$, а второй — к $e^{-\alpha g}$ (см., например, [9, с. 305]). Таким образом,

$$\max_{z\in F}\left|\frac{\tau_n(z)}{z^{\alpha n}}\right|^{1/n} \le e^{-(1-\alpha)\gamma_\infty-\alpha g}(1+o(1)) = e^{-g_\infty}(1+o(1)). \tag{3}$$

Аналогичным образом можно определить полином $\nu_n(z)$ степени n с единичным старшим коэффициентом, для которого выполнено неравенство

$$\max_{z\in F^{-1}}\left|\frac{\nu_n(z)}{z^{(1-\alpha)n}}\right|^{1/n} \le e^{-g_0}(1+o(1)). \tag{4}$$

Обозначая через $W(z_1,\ldots,z_n)$ определитель Вандермонда в точках $(z_1,\ldots,z_n)$ и замечая, что

$$\left|\lambda_{1,n}\ldots\lambda_{n,n}\right|^{\alpha(-n+1)}W(\lambda_{1,n},\ldots,\lambda_{n,n}) = V_n(F) \tag{5}$$

(в этом и в последующих равенствах для упрощения записи подразумевается, что все определители рассматриваются по модулю), имеем

$$V_{n+1}(F) = \left|\lambda_{1,n+1}\ldots\lambda_{n+1,n+1}\right|^{-\alpha n} \times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1,n+1}^{n-1} & \ldots & \lambda_{n+1,n+1}^{n-1} \\ \tau_n(\lambda_{1,n+1}) & \ldots & \tau_n(\lambda_{n+1,n+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_{1,n+1}^{-\alpha n} & \ldots & \lambda_{n+1,n+1}^{-\alpha n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1,n+1}^{n-1-\alpha n} & \ldots & \lambda_{n+1,n+1}^{n-1-\alpha n} \\ \dfrac{\tau_n(\lambda_{1,n+1})}{\lambda_{1,n+1}^{\alpha n}} & \ldots & \dfrac{\tau_n(\lambda_{n+1,n+1})}{\lambda_{n+1,n+1}^{\alpha n}} \end{vmatrix}.$$

Оценим сверху алгебраические дополнения элементов последней строки последнего определителя. Например, первое из этих алгебраических дополнений с учетом (5) оценивается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{2,n+1}^{-\alpha n} & \ldots & \lambda_{n+1,n+1}^{-\alpha n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{2,n+1}^{n-1-\alpha n} & \ldots & \lambda_{n+1,n+1}^{n-1-\alpha n} \end{vmatrix} = \left|\lambda_{2,n+1}\ldots\lambda_{n+1,n+1}\right|^{-\alpha n}W(\lambda_{2,n+1},\ldots,\lambda_{n+1,n+1}) \le$$

$$\le \frac{V_n(F)}{\left|\lambda_{2,n+1}\ldots\lambda_{n+1,n+1}\right|^{\alpha}} = \frac{V_n(F)\left|\lambda_{1,n}\right|^{\alpha}}{\left|\lambda_{1,n+1}\ldots\lambda_{n+1,n+1}\right|^{\alpha}}.$$

Оценивая так же и остальные алгебраические дополнения и раскрывая последний определитель по последней строке, имеем

$$V_{n+1}(F) \le (n+1)\max_{z\in F}\left|\frac{\tau_n(z)}{z^{\alpha n}}\right| V_n(F)\frac{\max_{z\in F}|z|^{\alpha}}{\left|\lambda_{1,n+1}\ldots\lambda_{n+1,n+1}\right|^{\alpha}}.$$

Отсюда, учитывая (3), получаем неравенство

$$\frac{V_{n+1}(F)^{1/n}}{V_n(F)^{1/n}} \le e^{-g_\infty}\frac{1}{\left|\lambda_{1,n+1}\ldots\lambda_{n+1,n+1}\right|^{\alpha/n}}(1+o(1)). \tag{6}$$

Точно таким же образом, используя неравенство (4) и равенство

$$\left|\lambda_{1,n}\ldots\lambda_{n,n}\right|^{(1-\alpha)(n-1)}W(\lambda_{1,n}^{-1},\ldots,\lambda_{n,n}^{-1}) = V_n(F),$$

находим

$$\frac{V_{n+1}(F)^{1/n}}{V_n(F)^{1/n}} \le e^{-g_0}\left|\lambda_{1,n+1}\ldots\lambda_{n+1,n+1}\right|^{(1-\alpha)/n}(1+o(1)). \tag{7}$$

Возводя неравенство (6) в степень $1-\alpha$, а неравенство (7) — в степень α и перемножая их, получаем последнее из неравенств цепочки (2).

Из (2) следует, что

$$\lim_{z\to\infty} m_n(F)^{1/n} = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{V_{n+1}(F)}{V_n(F)}\right|^{1/n} = e^{-(1-\alpha)g_\infty-\alpha g_0}.$$

Стандартными рассуждениями (см., например, [9, с. 288]) из равенства

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{V_{n+1}(F)}{V_n(F)}\right|^{1/n} = e^{-(1-\alpha)g_\infty-\alpha g_0}$$

получаем равенство $\delta_\alpha(F) = \lim_{n\to\infty}|V_n(F)|^{2/(n-1)n} = e^{-(1-\alpha)g_\infty-\alpha g_0}$. Таким образом, равенство (1), а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

Доказательство следствия. Заметим, что точки ∞ и 0 переходят при отображении $z\to\sum_{l=-k}^{m}p_l z^l$ в точку ∞, а связные компоненты B_∞ и B_0 дополнения $C\setminus F$ — в связную компоненту $C\setminus E$, содержащую ∞. Рассмотрим функцию $(k+m)^{-1}g^E\left(\sum_{l=-k}^{m}p_l z^l,\infty\right)$, где $g^E(z,\infty)$ — функция Грина компоненты $C\setminus E$, содержащей ∞, с особенностью в ∞. Эта функция определена, неотрицательна и гармонична в $B_\infty\cup B_0$, за исключением точек ∞ и 0, и, как нетрудно видеть, совпадает с функцией $g(z)$, определенной в начале доказательства теоремы 1. При этом

$$g_\infty = \lim_{z\to\infty}(g(z)-(1-\alpha)\ln|z|) =$$

$$= (k+m)^{-1}\lim_{z\to\infty}\left(g^E\left(\sum_{l=-k}^{m}p_l z^l,\infty\right)-m\ln|z|\right) = \frac{\ln|p_m|+\gamma}{k+m},$$

$$g_0 = \lim_{z\to 0}(g(z)+\alpha\ln|z|) =$$

$$= (k+m)^{-1}\lim_{z\to 0}\left(g^E\left(\sum_{l=-k}^{m}p_l z^l,\infty\right)+k\ln|z|\right) = \frac{\ln|p_{-k}|+\gamma}{k+m},$$

где $\gamma = \lim_{z\to\infty}\left(g^E(z,\infty)-\ln|z|\right)$. Поэтому в силу равенства (1) имеем $\delta_\alpha(F) = e^{-(1-\alpha)g_\infty-\alpha g_0} = e^{-(\gamma+(1-\alpha)\ln|p_m|+\alpha\ln|p_{-k}|)/(k+m)}$. Поскольку $e^{-\gamma} = d(E)$, то отсюда следует равенство

$$\delta_\alpha(F) = d(E)^{1/(k+m)}|p_{-k}|^{-k/(k+m)^2}|p_m|^{-m/(k+m)^2}.$$

Доказательство теоремы 2. Сначала рассмотрим случай, когда $f(z)$ голоморфна в $B_\infty\cup B_0$, за исключением точек ∞ и 0, в которых $f(z)$ может иметь полюс. Для любого $\rho>0$ положим $F_\rho = \{z\in B_\infty\cup B_0\colon g(z)=\rho\}$, где $g(z)$ определена в начале доказательства теоремы 1. Согласно теореме о вычетах при всех $n=0,\pm1,\ldots$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{F_\rho} f(z)z^n dz = -\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)z^n - \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)z^n = f^\infty_{-(n+1)} - f^0_{-(n+1)} = f_{-(n+1)}.$$

Поэтому

$$H_n = \begin{vmatrix} f_{2[\alpha n]-2n} & \cdots & f_{2[\alpha n]-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{2[\alpha n]-n} & \cdots & f_{2[\alpha n]} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}}\int_{F_\rho}\cdots\int_{F_\rho} f(z_1)\ldots f(z_{n+1})\begin{vmatrix} z_1^{2n-2[\alpha n]-1} & z_2^{2n-2[\alpha n]-2} & \ldots & z_{n+1}^{n-2[\alpha n]-1} \\ z_1^{2n-2[\alpha n]-2} & z_2^{2n-2[\alpha n]-3} & \ldots & z_{n+1}^{n-2[\alpha n]-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{n-2[\alpha n]-1} & z_2^{n-2[\alpha n]-2} & \ldots & z_{n+1}^{-2[\alpha n]-1} \end{vmatrix} dz_1\ldots dz_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int\limits_{F_\rho} \dots \int\limits_{F_\rho} f(z_1)\dots f(z_{n+1}) z_1^{n-2[\alpha n]-1} \dots z_{n+1}^{-2[\alpha n]-1} \begin{vmatrix} z_1^n & z_2^n & \dots & z_{n+1}^n \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} dz_1 \dots dz_{n+1}.$$

Производя под интегралом все возможные $(n+1)!$ перестановок в наборе $(z_1, \dots, z_{n+1})$, при которых интеграл не меняет своего значения, и суммируя, получаем (с точностью до знака) равенство

$$(n+1)!\, H_n = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int\limits_{F_\rho} \dots \int\limits_{F_\rho} f(z_1)\dots f(z_{n+1})\, z_1^{n-2[\alpha n]-1} \dots z_{n+1}^{n-2[\alpha n]-1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1^{-1} & z_2^{-1} & \dots & z_{n+1}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{-n} & z_2^{-n} & \dots & z_{n+1}^{-n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1^n & z_2^n & \dots & z_{n+1}^n \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} dz_1 \dots dz_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int\limits_{F_\rho} \dots \int\limits_{F_\rho} f(z_1)\dots f(z_{n+1}) \prod_{i<j} (z_i z_j)^{(n-2[\alpha n]-1)/n} (z_i - z_j)(z_i^{-1} - z_j^{-1})\, dz_1 \dots dz_{n+1}.$$

Так как

$$\prod_{i<j} (z_i z_j)^{1-2\alpha} (z_i - z_j)(z_i^{-1} - z_j^{-1}) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2(1-\alpha)} (z_i^{-1} - z_j^{-1})^{2\alpha},$$

то

$$(n+1)!\, H_n \le C(\rho)^{n+1} \max_{(z_1,\dots,z_{n+1}) \subset F_\rho} \prod_{i<j} \left| z_i - z_j \right|^{2(1-\alpha)} \left| z_i^{-1} - z_j^{-1} \right|^{2\alpha} \le C(\rho)^{n+1} V_{n+1}(F_\rho)^2,$$

где $C(\rho)$ зависит только от ρ, $V_n(F)$ определено при доказательстве теоремы 1. Возводя последнее неравенство в степень $1/n^2$ и переходя к пределу, получаем $\overline{\lim}_{n\to\infty} |H_n|^{1/n^2} \le \delta_\alpha(F_\rho)$. Поскольку $\delta_\alpha(F_\rho) = e^\rho \delta_\alpha(F)$ и ρ можно выбрать сколь угодно малым, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |H_n|^{1/n^2} \le \delta_\alpha(F)$.

Пусть теперь $f(z)$ — произвольная мероморфная в $B_\infty \cup B_0$ функция. Обозначим через $\tilde{F}$ все полюсы $f(z)$ в B_∞ и B_0, за исключением ∞ и 0. Тогда $F \cup \tilde{F}$ — замкнутое, не содержащее точек ∞ и 0 множество. Так как точками накопления полюсов $f(z)$ могут служить только лишь точки из F, то $\delta_\alpha(F \cup \tilde{F}) = \delta_\alpha(F)$ и согласно доказанному $\overline{\lim}_{n\to\infty} |H_n|^{1/n^2} \le \delta_\alpha(F \cup \tilde{F}) = \delta_\alpha(F)$. Теорема 2 доказана.

1. *Fekete M.* Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzah igen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – **17**. – S. 228 – 249.
2. *Leja F.* Une generalisation de l'ecart et du diametre transfini d'un ensemble // Ann. soc. pol. math. – 1949. – **22**. – P. 35 – 42.
3. *Leja F.* Proprietes des points extremaus des ensembles plans et leur application a la represantation conforme // Ann. pol. math. – 1957. – **3**. – P. 319 – 342.
4. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных полиномов // Мат. сб. – 1984. – **125** (167). – С. 117 – 127.
5. *Mhaskar H. N., Staff E. B.* Weighted analogues of capacity, transfinite diameter, and Chebyshev constant // Constr. Approxim. – 1992. – **8**. – P. 105 – 124.
6. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields // Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. – Berlin: Springer, 1997. – Vol. 316.
7. *Буслаев В. И.* О сходимости непрерывных *T*-дробей // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2001. – **235**.
8. *Polya D.* Beitrag zur Veralldemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhngende Gebiete. III // Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-math. Kl. – 1929. – P. 55 – 62.
9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплксного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Получено 28.02.2001