УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ АППРОКСИМАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАССОВ БЕСОВА $B^r_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q. I

We obtain order estimates of approximation of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions in the space L_q by using operators of orthogonal projection as well as linear operators subjected to some conditions.

Одержано порядкові оцінки наближення класів $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, що підпорядковані деяким умовам.

В настоящей работе устанавливаются точные по порядку оценки ортопроекционных поперечников классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q при некоторых соотношениях между параметрами p и q. Как известно, понятие ортопроекционного поперечника было введено В. Н. Темляковым [1] (см. также [2, 3]). Для того чтобы привести определение этого понятия, нам понадобятся некоторые обозначения.

Пусть $L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, обозначает пространство 2π-периодических по каждому аргументу функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ таких, что

$$\| f \|_q = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} | f(x) |^q dx \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q < \infty,$$

$$\| f \|_\infty = \operatorname{ess\,sup} | f(x) | < \infty, \quad q = \infty.$$

Ниже будем предполагать, что для функций $f(x) \in L_q(\pi_d)$ выполнено условие

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Пусть $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ — ортонормированная система функций $u_i(x) \in L_\infty(\pi_d)$. Каждой функции $f(x) \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставим в соответствие приближающий агрегат вида $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(x)$, т. е. ортогональную проекцию функции $f(x)$ на подпространство, порожденное системой функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$. Тогда для функционального класса F из $L_q(\pi_d)$ величина

$$d_M^\perp(F, L_q) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(x) \right\|_q \tag{1}$$

называется ортопроекционным поперечником этого класса в пространстве $L_q(\pi_d)$.

В работе наряду с ортопроекционными поперечниками будем исследовать величины $d_M^B(F, L_q)$, рассмотренные В. Н. Темляковым [1], которые определяются следующим образом:

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \| f(x) - G f(x) \|_q. \tag{2}$$

Здесь через $L_M(B)_q$ обозначено множество линейных операторов, удовлетворяющих условиям:

а) область определения $D(G)$ этих операторов содержит все тригонометрические полиномы, а их область значений содержится в подпространстве размерности M пространства $L_q(\pi_d)$;

б) существует число $B \geq 1$ такое, что для всех векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$ выполнено неравенство $\left\| Ge^{i(k,x)} \right\|_2 \leq B$.

Отметим, что к $L_M(1)_2$ принадлежат операторы ортогонального проектирования на пространства размерности M, а также операторы, которые задаются на ортонормированной системе функций с помощью мультипликатора, определяющегося последовательностью $\{\lambda_l\}$ такой, что $|\lambda_l| \leq 1$ для всех l. Нетрудно видеть также, что величины $d_M^{\perp}(F, L_q)$ и $d_M^B(F, L_q)$ связаны между собой неравенством

$$d_M^B(F, L_q) \leq d_M^{\perp}(F, L_q). \tag{3}$$

Ниже установлены порядковые оценки величин (1) и (2) на классах $B^r_{p,\theta}$. Напомним их определение.

Пусть $V_n(t)$ обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2n-1$, т.е.

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1 - \frac{k-n}{n}\right)\cos kt.$$

Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathcal{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставим в соответствие полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d}\left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

и для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ обозначим свертку

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x).$$

Тогда (см., например, [4, с. 368]) при каждом $1 \leq p \leq \infty$ и $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$,

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \;\middle|\; \| f(\cdot) \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f, \cdot) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\},$$

если $1 \leq \theta < \infty$, и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(\cdot) \;\middle|\; \| f(\cdot) \|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \| A_s(f, \cdot) \|_p \leq 1 \right\}$$

при $\theta = \infty$.

В последнем случае классы $B^r_{p,\infty}$ совпадают с классами H^r_p (см., например, [3, с. 31]). Если $p \in (1, \infty)$, то можно записать определение классов $B^r_{p,\theta}$ в других терминах.

Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathcal{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставим в соответствие множество

$$\rho(s) = \left\{ k \colon k = (k_1, \ldots, k_d),\ 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j} \right\}$$

и для

$$f(x) = \sum_k \hat f(k) e^{i(k,x)}, \qquad \hat f(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

положим

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \hat f(k) e^{i(k,x)}.$$

Тогда при $p \in (1,\infty)$, $r = (r_1,\dots,r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$,

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \,\middle|\, \| f(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\},$$

если $1 \le \theta < \infty$, и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(\cdot) \,\middle|\, \| f(\cdot)\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p \le 1 \right\}$$

при $\theta = \infty$.

В последующих рассуждениях предполагается, что координаты вектора $r = (r_1,\dots,r_d)$ упорядочены следующим образом: $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \dots \le r_d$, а $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_d)$, $\gamma' = (\gamma'_1,\dots,\gamma'_d)$ — векторы с координатами $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = \overline{1,d}$, $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1,\nu}$, а $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$.

Полученные ниже оценки будем записывать в виде порядковых соотношений. При этом функции $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ называем функциями одного порядка и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если начиная с некоторого N_0 для всех $N > N_0$ $C_1\mu_1(N) \le \mu_2(N) \le C_2\mu_1(N)$. Здесь и далее C_i, $i = 1, 2, \dots$, могут зависеть от параметров, определяющих класс, от метрики, в которой измеряется погрешность приближения, и от размерности пространства R^d. Аналогичным образом определяются порядковые неравенства $\mu_1 << \mu_2$ и $\mu_1 >> \mu_2$. Если A — конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

Перейдем к изложению полученных результатов.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le q \le p \le \infty$, $p \ge 2$, $(q,p) \ne (\infty,\infty)$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta < \infty$

$$d_M^\perp(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp d_M^B(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1 + (1/2 - 1/\theta)_+}, \tag{4}$$

$a_+ = \max\{a, 0\}$.

Прежде чем перейти к доказательству (4), сделаем одно замечание. Поскольку согласно (3) $d_M^B(B^r_{p,\theta}, L_q) \le d_M^\perp(B^r_{p,\theta}, L_q)$, то для доказательства теоремы нам будет достаточно оценить снизу величину $d_M^B(B^r_{p,\theta}, L_q)$ и, соответственно, сверху величину $d_M^\perp(B^r_{p,\theta}, L_q)$.

Доказательство. Оценка сверху в (4) следует из ранее полученных результатов. Действительно, подберем по заданному M число n из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и рассмотрим приближение класса $B^r_{p,\theta}$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f,x) = \sum_{(s,\gamma')<n} \delta_s(f,x)$ при $\theta \ge 2$ и $S_n^{\gamma}(f,x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta_s(f,x)$ при $1 \le \theta < 2$. Тогда в силу теоремы 3 из [5], согласно неравенствам $d_M^\perp(B^r_{p,\theta}, L_q) \le \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - S_n^{\gamma'}(f,x) \right\|_q$ при $\theta \ge 2$ и

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^r, L_q) \le \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \left\| f(x) - S_n^{\gamma}(f,x) \right\|_q \quad \text{при} \quad 1 \le \theta < 2,$$

получаем искомую оценку сверху для $d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^r, L_q)$, а значит, и для $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_q)$.

Заметим, что оценку снизу в (4) достаточно получить при условии $\nu = d$. Более того, поскольку полученная оценка сверху не зависит от параметров p и q, то для доказательства оценки снизу $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_q)$ достаточно рассмотреть случай $p = \infty$, $q = 1$. Доказательство разобьем на две части.

Пусть сначала $2 \le \theta < \infty$. В этом случае нам понадобится одно вспомогательное утверждение, для формулировки которого введем несколько обозначений.

Положим

$$S_n = \left\{ s \colon \|s\|_1 = n, \quad s_j \text{ — четные числа}, \quad j = \overline{1, d} \right\},$$

$$\rho^+(s) = \left\{ k \colon k = (k_1, \ldots, k_d), \quad 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1, d} \right\}.$$

$\overline{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho^+(s)$ и $|\overline{Q}_n|$ — количество элементов множества $\overline{Q}_n$.

Для вектора $m = (m_1, \ldots, m_d)$ (m_j — целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$) через $RT(m)$ обозначим множество действительных тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le m_j} \hat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Пусть далее $k_j^{s_j} = 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}$ и

$$T(\overline{Q}_n) = \left\{ t(x) = \sum_{s \in S_n} t_s(x) e^{i(k^s, x)}, \; t_s(x) \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Для $g(x) \in T(\overline{Q}_n)$ обозначим

$$\overline{\delta}_s(g, x) = \sum_{k \in \rho^+(s)} \hat{g}(k) e^{i(k,x)}.$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 [2]. *Пусть* $M \le |\overline{Q}_n|/4$. *Тогда для любого пространства* $\Phi \in L_1(\pi_d)$, *размерность которого не больше* M, *найдется функция* $g(x) \in T(\overline{Q}_n)$ *такая, что*

$$\left\| \overline{\delta}_s(g, x) \right\|_\infty \le |S_n|^{-1/2}, \qquad s \in S_n,$$

$$\|g\|_2 \ge C_3 > 0$$

и для произвольного $\varphi \in \Phi$ *выполнено условие* $(g, \varphi) = 0$.

Итак, пусть число M задано. Рассмотрим некоторый линейный оператор G из $L_M(B)_1$, для которого $\dim G(B_{\infty,\theta}^r \cap T(\overline{Q}_n)) \le M$. Подберем четное n из условия $|\overline{Q}_{n-2}| < 4M \le |\overline{Q}_n|$. Тогда $\dim G(T(\overline{Q}_n)) \le M$, и поскольку $M \le |\overline{Q}_n|/4$, то размерность подпространства $\Omega \subset T(\overline{Q}_n)$ такого, что $G(\Omega) = 0$, будет больше M. Кроме того, согласно лемме 1, найдется функция $g(x) \in \Omega$ такая, что

$$\left\| \overline{\delta}_s(g,x) \right\|_\infty \le |S_n|^{-1/2}, \quad s \in S_n,$$

и

$$\|g\|_2 \ge C_3 > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = C_4 2^{-nr_1} |S_n|^{1/2} n^{-(d-1)/\theta} g(x), \quad C_4 > 0,$$

и оценим $\|f_1\|_{B^r_{\infty,\theta}}$, $1 \le \theta < \infty$.

В силу определения $\|f_1\|_{B^r_{\infty,\theta}}$ имеем

$$\|f_1\|_{B^r_{\infty,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f_1,x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll 2^{-nr_1} |S_n|^{1/2} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in S_n} 2^{(s,r)\theta} \left\| \overline{\delta}_s(g,x) \right\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in S_n} 1 \right)^{1/\theta} \ll n^{-(d-1)/\theta} n^{(d-1)/\theta} = 1.$$

Из полученного соотношения заключаем, что функция $C_4 f_1(x)$ с соответствующей постоянной $C_4 > 0$ принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$.

Теперь перейдем к оценке $\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1$. Заметим, что поскольку $g(x) \in \Omega$ и $G(\Omega) = 0$, то

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 = \|g\|_1. \tag{5}$$

Для оценки снизу $\|g\|_1$ воспользуемся неравенством [6, с. 330]

$$\|g\|_2 \le \|g\|_1^{1/3} \|g\|_4^{2/3},$$

согласно которому

$$\|g\|_1 \ge \|g\|_2^3 \|g\|_4^{-2}. \tag{6}$$

Таким образом, поскольку в силу леммы 1 $\|g\|_2 \ge C_3 > 0$, то для получения искомой оценки снизу $\|g\|_1$ остается соответствующим образом оценить снизу $\|g\|_4^{-2}$. Принимая во внимание, что $g(x) \in \Omega \subset T(\overline{Q}_n)$, и используя теорему Литтлвуда – Пэли (см., например, [4, с. 65]) и неравенство Минковского, находим

$$0 < \|g\|_4 \ll \left\| \left(\sum_{s \in S_n} \left| \overline{\delta}_s(g,x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_4 \ll \left(\sum_{s \in S_n} \left\| \overline{\delta}_s(g,x) \right\|_4^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{s \in S_n} \left\| \overline{\delta}_s(g,x) \right\|_\infty^2 \right)^{1/2} \le |S_n|^{-1/2} \left(\sum_{s \in S_n} 1 \right)^{1/2} \ll |S_n|^{-1/2} |S_n|^{1/2} = 1.$$

Отсюда имеем $\|g\|_4^{-1} \ge C_5$ и, следовательно, согласно (6) получаем оценку

$$\|g\|_1 \ge C_6. \tag{7}$$

Наконец, сопоставляя (5) и (7), имеем

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 \ge C_6$$

и в силу выбора функции $f_1(x)$ получаем искомую оценку снизу в случае $2 \leq \leq \theta < \infty$:

$$\| f_1(x) - G f_1(x)\|_1 = C_4 2^{-nr_1} |S_n|^{1/2} n^{-(d-1)/\theta} \| g(x) - Gg(x)\|_1 >>$$
$$>> 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} = M^{-r_1}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Для установления оценки снизу величины $d_M^B(B^r_{\infty,\theta}, L_1)$ в случае $1 \leq \theta < 2$ нам также понадобится вспомогательное утверждение.

Пусть $\overline{S}_n$ и $\tilde{Q}_n$ обозначают следующие множества:

$$\overline{S}_n = \left\{ s\colon \|s\|_1 = n, \quad s_j \in \mathcal{N}, \quad j = \overline{1, d}\right\},$$
$$\tilde{Q}_n = \bigcup_{s \in \overline{S}_n} \rho(s).$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2 [3]. *Пусть* $G \in L_M(B)_1$ *и число* n *таково, что* $C_7(B,d)\left|\tilde{Q}_{n-1}\right| < < M < C_8(B,d)\left|\tilde{Q}_n\right|$. *Тогда существуют вектор* $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_d^0) \in \tilde{Q}_n$ *и постоянная* $C_9(d) > 0$ *такие, что*

$$\left\| e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)} \right\|_1 \geq C_9(d).$$

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = 2^{-nr_1} e^{i(k^0,x)},$$

которая, как легко видеть, принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta}$. Тогда, согласно лемме 2, для $f_2(x)$ имеем

$$\| f_2(x) - G f_2(x)\|_1 = 2^{-nr_1} \left\| e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)} \right\|_1 >> 2^{-nr_1} \asymp M^{-r_1}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1}.$$

Оценки снизу величины $d_M^B(B^r_{\infty,\theta}, L_1)$ в обоих случаях установлены. Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** Порядки величин $d_M^\perp(F, L_q)$ и $d_M^B(F, L_q)$ в тех случаях, когда в качестве F используются классы $W^r_{p,\alpha}$ либо H^r_p, а p и q удовлетворяют условиям теоремы 1, установлены В. Н. Темляковым [2].

***Следствие* 1.** *Пусть* $p \geq 2$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta < \infty$. *Тогда*

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - S_n^{\gamma'}(f,x)\right\|_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{8}$$

Оценка сверху в (8) следует из оценки приближения классов $B^r_{p,\theta}$ суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f,x)$ в метрике L_q при $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$ [5], а оценка снизу — из теоремы 1 при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ в силу неравенства

$$d_M^\perp(B^r_{p,\theta}, L_1) \leq \sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - S_n^{\gamma'}(f,x)\right\|_1.$$

Теперь сформулируем и докажем еще одно утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq q \leq p \leq 2$, $(p,q) \neq (1,1)$, $r_1 > 0$ *и* $1 \leq \theta < \infty$. *Тогда*

$$d_M^\perp(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp d_M^B(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+(1/p-1/\theta)_+}. \tag{9}$$

Доказательство. Оценка сверху в соотношении (9) следует из результата приближения функций класса $B^r_{p,\theta}$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S^{\gamma'}_n(f,x)$, полученного Э. М. Галеевым [7]. Переходя к установлению оценки снизу для $d^B_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$, заметим, что ее достаточно установить для случая $q=1$, $1<p\le 2$, а также, как отмечалось выше, при $\nu = d$. Кроме того, если $\theta\in[1,p)$, то оценка снизу величины $d^B_M(B^r_{p,\theta}, L_1)$ устанавливается с помощью тех же рассуждений, которые проводились при доказательстве оценки снизу в теореме 1 в случае $1\le\theta<2$. Таким образом, остановимся на рассмотрении случая $p\le\theta<\infty$.

Приведем некоторые обозначения и затем сформулируем утверждение, которое используется ниже.

Через Θ_n, $\tilde\Theta_n$ и Q_n обозначим следующие множества:

$$\Theta_n = \left\{s\colon (s,1)=n,\ s_j\in\mathcal{N},\ j=\overline{1,d}\right\},$$

$$\tilde\Theta_n = \left\{s\in\Theta_n\colon\ s_j\ge\frac{n}{2d},\ j=\overline{1,d}\right\},\qquad Q_n = \bigcup_{s\in\Theta_n}\rho(s).$$

Поскольку $|\Theta_n|\asymp n^{d-1}$, то легко видеть, что и $\left|\tilde\Theta_n\right|\asymp n^{d-1}$.

Пусть далее $K_n(t)$ обозначает ядро Фейера порядка n, т. е.

$$K_n(t) = 1+2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kt.$$

Через k^s обозначим вектор $k^s = (k_1^{s_1},\ldots,k_d^{s_d})$, где

$$k_j^{s_j} = \begin{cases}2^{s_j-1}+2^{s_j-2}, & s_j\ge 2;\\ 1, & s_j=1,\ j=\overline{1,d}.\end{cases}$$

Далее, разбив куб π_d на n^{d-1} кубов с длиной ребра $\dfrac{2\pi}{\left|\tilde\Theta_n\right|^{1/d}}$, установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\tilde\Theta_n$ и получившимся множеством кубов. При этом через $x^s\in\pi_d$ обозначим центр куба, соответствующего вектору $s\in\tilde\Theta_n$, и положим $u=2^{[(1-1/d)\log_2 n]}$.

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 3 [2]. *Пусть* $G\,\dot\in\, L_M(B)_1$. *Тогда существуют число* n *и множество* $\tilde\Theta_n\subset\Theta_n$ *такие, что* $|Q_n| < C_{10}(B,d)M$, $\left|\tilde\Theta_n\right|\ge|\Theta_n|/2$ *и в каждом* $\rho(s)$, $s\in\tilde\Theta_n$, *найдутся кубы с центром в* k^s *и длинами ребер* $2u$ *такие, что для функции*

$$g_1(x) = \sum_{s\in\tilde\Theta_n} e^{i(k^s,x)}\prod_{j=1}^{d}K_u(x_j-x_j^s)$$

и некоторого вектора y^* *имеет место оценка*

$$\left\|g_1(x+y^*)-Gg_1(x+y^*)\right\|_1 \gg \log^{d-1}M.$$

Теперь возвратимся непосредственно к оценке снизу величины $d^B_M(B^r_{p,\theta}, L_1)$. Рассмотрим функцию

$$f_3(x) = 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} g_1(x)$$

и оценим $\| f_3 \|_{B^r_{p,\theta}}$.

Учитывая, что в силу выбора параметра u

$$\| A_s(g_1, x) \|_p << \| K_u(x) \|_p \asymp u^{d(1-1/p)} \asymp n^{(d-1)(1-1/p)} \quad \forall s \in \tilde{\Theta}_n,$$

отсюда имеем

$$\| f_3 \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s \in \tilde{\Theta}_n} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(g_1, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} <<$$

$$<< 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \tilde{\Theta}_n} 2^{(s,r)\theta} n^{(d-1)(1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} << n^{(d-1)(1-1/p)}. \tag{10}$$

Таким образом, из (10) заключаем, что функция

$$g_2(x) = C_{11} n^{-(d-1)(1-1/p)} f_3(x),$$

или

$$g_2(x) = C_{11} 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} g_1(x),$$

с соответствующей постоянной $C_{11} > 0$ принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$. Далее, согласно лемме 3, существует вектор y^* такой, что

$$\left\| g_2(x+y^*) - G g_2(x+y^*) \right\|_1 >> 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} \times$$

$$\times \left\| g_1(x+y^*) - G g_1(x+y^*) \right\|_1 >> 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} \log^{d-1} M \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/p-1/\theta)} \asymp M^{-r_1} \left(\log^{d-1} M \right)^{r_1+1/p-1/\theta}.$$

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 2.** Порядки величин $d_M^{\perp}(F_p^r, L_q)$ и $d_M^B(F_p^r, L_q)$, $1 \le q \le p \le 2$, $(p,q) \ne (1,1)$, где F_p^r — класс $W^r_{p,\alpha}$ либо H^r_p, установлены В. Н. Темляковым [2].

***Следствие* 2.** *Пусть* $1 < p \le 2$, $r_1 > 0$, $1 \le \theta < \infty$. *Тогда*

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x) \right\|_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)_+}.$$

Оценка сверху следует из [7], а оценка снизу — из теоремы 2 при условии, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

1. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 314 – 317.
2. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
3. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука: 1969. – 480 с.
5. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
7. *Галеев Э. М.* Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 3. – С. 32 – 41.

Получено 21.04.2000